УДК 517.9 + 533

С.С. Кузиков

Корректность смешанной краевой задачи для квазилинейного вырождающегося эллиптического уравнения*

S.S. Kuzikov

Correctness of the Mixed Boundary Problem for a Quasi-Linear Generating Elliptical Equation

Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения краевой задачи для квазилинейного вырождающегося эллиптического уравнения, описывающего установившееся безвихревое дозвуковое течение газа с выходом на скорость звука.

Ключевые слова: краевая задача, вырождающееся уравнение, корректность, околозвуковая газовая динамика.

The theorem of existence and uniqueness of the mixed solution of the boundary problem for a quasi-linear degenerating elliptical equation describing steady non-rotational subsonic gas flow with access to sound velocity has been proved.

Key words: boundary problem, degenerating equation, correctness, transonic gas dynamics.

Рассматривается вопрос о существовании решения смешанной краевой задачи для вырождающегося квазилинейного уравнения, описывающего установившееся безвихревое течение газа [1]

$$(K(\sigma)+Q_\sigma^2)Q_{\psi\psi}-2Q_\sigma Q_\psi Q_{\sigma\psi}+Q_\psi^2 Q_{\sigma\sigma}=0 \quad (1)$$

в прямоугольной области $AOBC = P = \{(\sigma,\psi):\ \sigma_0<\sigma<0,\quad 0<\psi<\psi_0\}$ с данными на ее границе Γ:

$$\begin{aligned} &Q=0 \text{ на AO},\\ &Q_\sigma=0 \text{ на AB и OC},\\ &Q=Q^*(\sigma), Q^*(\sigma)\le 0 \text{ на BC}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $OA=\{\sigma_0\le\sigma\le 0,\psi=0\}, AB=\{\sigma_0, 0\le\psi\le\psi_0\}, BC=\{\sigma_0\le\sigma\le 0,\psi_0=1\}, OC=\{\sigma=0, 0\le\psi\le\psi_0\}$, $Q^*(\sigma)$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция,

$$Q^*_{\sigma\sigma}(0)=0,\quad Q^*_\sigma(0)=Q^*_\sigma(\sigma_0)=0, \quad (3)$$

$K(\sigma)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$K'(\sigma)<0,\quad K(0)=0. \quad (4)$$

Для $n=1,2,...$ рассмотрим семейство операторов

$$L_n=\frac{1}{n}\triangle+L, \quad (5)$$

где $\triangle=\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}$ – оператор Лапласса, и соответствующие ему уравнения

$$L_n\overset{(n)}{Q}=(K(\sigma)+\overset{(n)}{Q}{}_\sigma^2+\tfrac{1}{n})\overset{(n)}{Q}_{\psi\psi}-2\overset{(n)}{Q}_\sigma\overset{(n)}{Q}_\psi\overset{(n)}{Q}_{\sigma\psi}+ +(\overset{(n)}{Q}{}_\psi^2+\tfrac{1}{n})\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}=0. \quad (6)$$

Для каждого конечного n это и есть невырожденное квазилинейное уравнение. Поэтому, пользуясь методами [2, 3], можно доказать существование $\overset{(n)}{Q}$ – решение уравнения для задачи (6), удовлетворяющее краевым условиям (2), причем $\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi)\in W_2^2(P)$.

Докажем, что имеет место следующая лемма.

Лемма.

1. $\max|Q^{(n)}(\sigma,\psi)|<M,\ M=\max\limits_{(\sigma,\psi)\in BC}|Q(\sigma,\psi)|$

2. $\max|\bigtriangledown Q^{(n)}(\sigma,\psi)|<M_1$, $M_1=\max\limits_{(\sigma,\psi)\in BC}(|Q^*_\sigma|,M)$

3. $\iint_P(K+\frac{1}{n})(\overset{(n)}{Q}{}^2_{\psi\psi}+\overset{(n)}{Q}{}^2_{\sigma\psi}+(\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi+\frac{1}{n})\overset{(n)}{Q}{}^2_{\sigma\sigma})dP<M_2,\quad M_2=M_2(M_1)$, M_2 зависит только от M_1, где $\bigtriangledown=(\frac{\partial}{\partial\sigma},\frac{\partial}{\partial\psi})$ и M, M_1, M_2 не зависят от номера n.

1. Действительно, для уравнения (6) $n=1,2,...$ справедлив принцип максимума. На AB и OC, в силу краевых условий, $\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi)$ не может достигать экстремума, и поэтому для решения $\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi)$ уравнения (6) справедлива оценка [4, 5]:

*Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2012–2015 гг.)»(проект №1.3820.2011).

$$\min_{(\sigma,\psi)\in BC} Q(\sigma,\psi) \le \overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi) \le \max_{(\sigma,\psi)\in BC} Q(\sigma,\psi),$$

откуда и следует первое утверждение.

2. Обозначим $\overset{(n)}{Q}_\sigma(\sigma,\psi) = P_1, \overset{(n)}{Q}_\psi(\sigma,\psi) = P_2^{(n)}$. Продифференцировав (6) по σ и исключая $P_{2\psi}^{(n)}$ с помощью (6), получаем уравнение для $P_1^{(n)}$

$$\begin{aligned}&(K(\sigma)+\overset{(n)}{Q}{}^2_\sigma+\tfrac{1}{n})P^{(n)}_{1\psi\psi} - 2\overset{(n)}{Q}_\sigma \overset{(n)}{Q}_\psi P^{(n)}_{1\sigma\psi}+\\ &+(\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi+\tfrac{1}{n})P^{(n)}_{1\sigma\sigma} = \varphi_1,\end{aligned} \tag{7}$$

где φ_1 – полином второй степени относительно первых производных функции $P_1^{(n)}$.

Для этого уравнения также имеет место принцип максимума, поэтому

$$\max_{\overline{P}} |P_1^{(n)}| \le C_1, \quad C_1 = \max_{(\sigma,\psi)\in\Gamma} |P_1(\sigma,\psi)|$$

и C_1 не зависит от n. Повторяя аналогично рассуждения относительно $P_2^{(n)}$, приходим к выводу, что для оценки $\max\limits_{\overline{P}} |P_2^{(n)}|$ нужно оценить $P_2^{(n)}$ на BC, так как на AB, OA и OC $P_2^{(n)}$, согласно краевым условиям, не может достигать экстремума.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}&v^{(n)}(\sigma,\psi) = -1 + e^{\alpha(Q^*(\sigma)-\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi))}+\\ &+e^{\alpha(1-\psi)}e^{\alpha M} - e^{\alpha M}, \quad \alpha = const > 0\end{aligned}$$

и покажем, что форма

$$\begin{aligned}&L_n^0 v^{(n)} = L_n(\overset{(n)}{Q}; v^{(n)}) =\\ &= (K+\overset{(n)}{Q}{}^2_\sigma+\tfrac{1}{n})v^{(n)}_{\psi\psi} - 2\overset{(n)}{Q}_\sigma \overset{(n)}{Q}_\psi v^{(n)}_{\sigma\psi} + (\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi+\tfrac{1}{n})v^{(n)}_{\sigma\sigma}\end{aligned}$$

будет неотрицательной при подходящем выборе $\alpha > 0$. Действительно, подставляя $v^{(n)}(\sigma,\psi)$, имеем

$$\begin{aligned}&L_n^0 v^{(n)} = (K+\overset{(n)}{Q}{}^2_\sigma+\tfrac{1}{n})\alpha^2 e^{\alpha M} e^{\alpha(1-\psi)}+\\ &+[(K+\overset{(n)}{Q}{}^2_\sigma+\tfrac{1}{n})(-\alpha\overset{(n)}{Q}_{\psi\psi}+\alpha^2\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi)-\\ &-2\overset{(n)}{Q}_\sigma\overset{(n)}{Q}_\psi(-\alpha\overset{(n)}{Q}_{\sigma\psi}-\alpha^2\overset{(n)}{Q}_\psi(Q^*_\sigma-\overset{(n)}{Q}_\sigma))+\\ &+(\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi+\tfrac{1}{n})(-\alpha\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}+\alpha Q^*_{\sigma\sigma}+\\ &+\alpha^2(Q^*_\sigma-\overset{(n)}{Q}_\sigma)^2]e^{\alpha(Q^*-\overset{(n)}{Q})}.\end{aligned}$$

Производя необходимые преобразования, учитывая что $\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi)$ решение (6) и $e^{\alpha M}e^{\alpha(1-\psi)} \ge e^{\alpha(Q^*-\overset{(n)}{Q})}$, где M – константа из первого утверждения леммы, получаем

$$\begin{aligned}&L_n^0 v^{(n)} \ge (K+\overset{(n)}{Q}{}^2_\sigma+\tfrac{1}{n})\alpha^2+\tfrac{1}{n}\alpha Q^*_{\sigma\sigma}+\\ &+(K+\tfrac{1}{n})\alpha^2\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi+\alpha\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi Q^*_{\sigma\sigma}+\\ &+\tfrac{1}{n}\alpha^2(Q^*_\sigma-\overset{(n)}{Q}_\sigma)^2+\alpha^2\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi(Q^{*2}_\sigma+\overset{(n)}{Q}{}^2_\sigma) >\\ &> \tfrac{1}{n}(\alpha^2+\alpha Q^*_{\sigma\sigma})+\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi(\alpha^2 K+\alpha Q^*_{\sigma\sigma}) > 0,\end{aligned}$$

так как $K(\sigma)$ и $Q^*(\sigma)$ удовлетворяют условиям (3)–(4), поэтому можно выбрать такое $\alpha < \infty$, чтобы выполнялось это соотношение независимо от номера n. Пусть S^* – окрестность точки $\zeta_0(\sigma_*, 1)$ на $\psi = 1$

$$S^* = \{|\sigma-\sigma_*| \le \varepsilon, \psi = 1\},$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно малое число. Введем дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(\sigma)$:

$$\varphi(\sigma) = \beta > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \in S^*,$$

$$0 \le \varphi(\sigma) \le \beta \quad \text{при} \quad \varepsilon \le |\sigma-\sigma_0| \le 2\varepsilon,$$

$$\varphi(\sigma) = 0 \quad \text{при} \quad |\sigma-\sigma_*| \ge 2\varepsilon$$

такую, что при $\varepsilon < |\sigma-\sigma_*| < 2\varepsilon$, $|\varphi'(\sigma)| > 0$ и $\varphi_{\sigma\sigma} = 0$ при $\sigma = \sigma \pm \varepsilon$, $\sigma = \sigma_0 \pm 2\varepsilon$. Обозначим через Ω область, ограниченную прямой $\psi = 1$ и кривой $l : \psi+\varphi(\sigma) - 1 = 0$, в $\overline{\Omega}$ рассмотрим функцию $w(\sigma,\psi) = e^{\gamma(\psi+\varphi(\sigma)-1)}$, где $\gamma > 0$ выберем так, чтобы выполнялось неравенство $e^{\gamma\beta} > 1 + \max\limits_{(\sigma,\psi)\in\overline{\Omega}} v(\sigma,\psi)$.

Рассмотрим теперь при $(\sigma,\psi) \in \Omega$ следующее выражение

$$\begin{aligned}&L_n^0 w = \left(K+\overset{(n)}{Q}{}^2_\sigma+\tfrac{1}{n}\right)\gamma^2 - 2\overset{(n)}{Q}_\sigma\overset{(n)}{Q}_\psi\gamma^2\varphi_\sigma+\\ &+\left(Q^2_\psi+\tfrac{1}{n}\right)\left(\gamma^2\varphi^2_\sigma+\gamma\varphi_{\sigma\sigma}\right),\end{aligned}$$

для второго слагаемого применим неравенство $-2ab \ge -\frac{1}{\varepsilon}a^2 - \varepsilon b^2$ и, заменяя, при $-\varepsilon\gamma^2\varphi^2_\sigma$, $\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi$ на $\left(\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi+\frac{1}{n}\right)$, что только усиливает неравенство, имеем

$$\begin{aligned}&L_n^0 w \ge \left(K+\left(1-\tfrac{1}{\varepsilon}\right)\overset{(n)}{Q}{}^2_\sigma+\tfrac{1}{n}\right)\gamma^2+\\ &+\left(\overset{(n)}{Q}{}^2_\psi+\tfrac{1}{n}\right)\left((1-\varepsilon)\gamma^2\varphi^2_\sigma+\gamma\varphi_{\sigma\sigma}\right),\end{aligned}$$

так как $\overset{(n)}{Q}{}^2_\sigma$ равномерно ограничены, $K(\sigma)$ и $Q^*(\sigma)$ удовлетворяют условиям (3)–(4), то можно выбрать $\varepsilon(K, c_1) < 1$ независимо от n, что 1-е слагаемое будет неотрицательным. Далее в силу построения $\varphi(\sigma)$ найдется такое $\gamma(\varepsilon,\sigma) < \infty$, что и второе слагаемое будет неотрицательным равномерно относительно n, следовательно

$$L_n^0 W(\sigma,\psi) \ge 0,$$

$$\text{где } (\sigma,\psi) \in \Omega,\ W(\sigma,\psi) = v^{(n)}(\sigma,\psi) + w(\sigma,\psi),$$

и поэтому $W(\sigma,\psi)$ не имеет максимума в P. Нет его и на l, в силу построения $w(\sigma,\psi)$. Поэтому максимум достигается на S^*, так как при $\psi = 1$

$v^{(n)}(\sigma,1)=0$. Следовательно, согласно принципу Хопфа, имеем

$$\frac{\partial}{\partial\psi}W\geq 0 \qquad \text{на} \qquad S^*.$$

Или в развернутом виде

$$-\alpha e^{\alpha M}-\alpha \overset{(n)}{Q}_{\psi}+\gamma e^{\gamma\beta}\geq 0, \qquad \text{откуда}$$

$$\overset{(n)}{Q}_{\psi}\leq -e^{\alpha M}+\frac{\gamma}{\alpha}e^{\gamma\beta}=c_2 \qquad \text{на} \qquad S^*,$$

где α и γ не зависят от n, а зависят от свойств $Q^*(\sigma)$, $K(\sigma)$ и построенной $\varphi(\sigma)$. Аналогично рассматривая $\widetilde{W}=-e^{\gamma(\psi+\varphi(\sigma)-1)}-e^{\alpha(1-\psi)}e^{\alpha M}-e^{\alpha M}+1-e^{-\alpha(Q^*-Q)}$, приходим к заключению, что $L_n^0\widetilde{W}\leq 0$ в Ω и для достаточно больших $\alpha=\widetilde{\alpha}$ и $\gamma=\widetilde{\gamma}$,т.е. $\widetilde{W}$ достигает минимума на S^*, таким образом, имеем, что

$$\overset{(n)}{Q}_{\psi}\geq e^{\widetilde{\alpha}M}-\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{\alpha}}e^{\widetilde{\alpha}\beta}=c_3,$$

следовательно, $\max\limits_{\psi=1}|Q_{\psi}|<c_4$ (где $c_4=\max\left(|c_2|,|c_3|\right)$), что окончательно доказывает второе утверждение. Следуя методу [7], докажем третье утверждение.

3. Так как $\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi)$ – решение уравнения (6), то имеет место следующее равенство

$$\left(K+\overset{(n)}{Q^2_{\sigma}}+\tfrac{1}{n}\right)\left(\overset{(n)}{Q^2_{\psi\psi}}+\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\psi}}\right)-$$
$$-2\overset{(n)}{Q}_{\sigma}\overset{(n)}{Q}_{\psi}\left(\overset{(n)}{Q}_{\psi\psi}\overset{(n)}{Q}_{\sigma\psi}+\overset{(n)}{Q}_{\sigma\psi}\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}\right)+$$
$$+\left(\overset{(n)}{Q^2_{\psi}}+\tfrac{1}{n}\right)\left(\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\psi}}\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\sigma}}\right)=$$
$$=\left(K+\overset{(n)}{Q^2_{\sigma}}+\overset{(n)}{Q^2_{\psi}}+\tfrac{2}{n}\right)\left(\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\psi}}-\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}\overset{(n)}{Q}_{\psi\psi}\right),$$

откуда получаем, что

$$\begin{aligned}&K\left(\overset{(n)}{Q^2_{\psi\psi}}+\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\psi}}\right)\leq\\ &\leq\left(K+\left|\nabla\overset{(n)}{Q}\right|^2\right)\left(\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\psi}}-\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}\overset{(n)}{Q}_{\psi\psi}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

Умножив (6) на $\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}\left(K+\overset{(n)}{Q^2_{\sigma}}+\frac{1}{n}\right)$ и применяя ко второму слагаемому неравенство $-2ab\geq-a^2-b^2$, приходим к первенству

$$\left[\left(K+\tfrac{1}{n}\right)\left(\overset{(n)}{Q^2_{\psi}}+\tfrac{1}{n}\right)+\tfrac{1}{n}\right]\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\sigma}}\leq$$
$$\leq\left(K+\overset{(n)}{Q^2_{\sigma}}+\tfrac{1}{n}\right)^2\left(\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\psi}}-\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}\overset{(n)}{Q}_{\psi\psi}\right)$$

или

$$\begin{aligned}&K\left(\overset{(n)}{Q^2_{\psi}}+\tfrac{1}{n}\right)\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\sigma}}\leq\\ &\leq\left(K+\overset{(n)}{Q^2_{\sigma}}+\tfrac{1}{n}\right)\left(\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\psi}}-\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}\overset{(n)}{Q}_{\psi\psi}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Объединяя (8)–(9) и интегрируя по P, в силу утверждения 2, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{J}=&\iint\limits_P\left(K+\tfrac{1}{n}\right)\left(\overset{(n)}{Q}{}^2_{\psi\psi}+\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\psi}}+\right.\\ &\left.+\left(\overset{(n)}{Q^2_{\psi}}+\tfrac{1}{n}\right)\overset{(n)}{Q}{}^2_{\sigma\sigma}\right)dP\leq\\ &\leq M_3\iint\limits_P\left(\overset{(n)}{Q^2_{\sigma\psi}}-\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}\overset{(n)}{Q}_{\psi\psi}\right)dP=M_3\mathcal{J}_1.\end{aligned}$$

Интегрируя по частям выражение в правой части неравенства, получаем

$$\mathcal{J}_1=\int\limits_{\Gamma}\overset{(n)}{Q}_{\sigma\psi}\overset{(n)}{Q}_{\psi}\cos(n,\sigma)\,dS-\iint\limits_P\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma\psi}\overset{(n)}{Q}_{\psi}\,dP-$$
$$-\int\limits_{\Gamma}\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma}\overset{(n)}{Q}_{\psi}\cos(n,\psi)\,dS+\iint\limits_P\overset{(n)}{Q}_{\sigma\sigma\psi}\overset{(n)}{Q}_{\psi}\,dP=$$
$$=-\int\limits_{CB}\overset{(n)}{Q^*}_{\sigma\sigma}\overset{(n)}{Q}_{\psi}\,d\sigma\leq M_4. \tag{10}$$

Следовательно, $\mathcal{J}_1\leq M_5$, где $M_5=M_3+M_4$ равномерна относительно n. Таким образом, лемма доказана.

Замечание. Вывод относительно ограниченности модуля $\overset{(n)}{P}_i$ $i=1,2$ при $(\sigma,\psi)\in P$, как и получение (10), не корректен, если не предполагать, что $\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi)$ имеет производные 3-го порядка. Однако это можно обойти посредством аппроксимии $\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi)$ последовательностью $\overset{(n)}{Q}_k(\sigma,\psi)$

трижды дифференцируемых функций, у которых, кроме того, первые и вторые производные равномерно сходятся к соответствующим производным $\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi)$. В результате приходим к заключению о правомерности вывода (10).

Из последовательности $\left\{\overset{(n)}{Q}(\sigma,\psi)\right\}$ выберем такую подпоследовательность $\{\overset{(m)}{Q}(\sigma,\psi)\}$, для которой выполнены следующие условия:

1. $\overset{(m)}{Q}_{\psi\psi}\to Q_{\psi\psi}$ в $L_2(P)$,
$\overset{(m)}{Q}_{\sigma\psi}\to Q_{\sigma\psi}$ в $L_2(P)$;
2. $\overset{(m)}{Q}_{\psi}\rightrightarrows Q_{\psi}$ почти всюду в P;
3. $\overset{(m)}{Q}_{\sigma}\to Q_{\sigma}$ в $L_2(P)$;
4. $\overset{(m)}{Q}(\sigma,\psi)\rightrightarrows Q(\sigma,\psi)$ в P;
5. $\overset{(m)}{Q}_{\psi}\overset{(m)}{Q}_{\sigma\sigma}\to w$ в $L_2(P)$.

Возможность выбора такой подпоследовательности следует из свойств обобщенных производных и приведенных выше оценок. Слабый предел в $L_2(P)$ последовательности $\left\{\overset{(m)}{Q}_{\psi}\overset{(m)}{Q}_{\sigma\sigma}\right\}$, равный w, мы будем записывать в виде $Q_\psi Q_{\sigma\sigma}$. Установим, следуя методу, аналогичному в [6], что $Q(\sigma,\psi)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в P. Так как $\overset{(m)}{Q}(\sigma,\psi)$ является решением из $W_2^2(P)$ задачи (6), (2), то справедливо тождество

$$\iint\limits_P\left(\left(K+\overset{(m)}{Q^2_\sigma}+\frac{1}{m}\right)\overset{(m)}{Q^2_{\psi\psi}}-2\overset{(m)}{Q}_{\sigma}\overset{(m)}{Q}_{\psi}\overset{(m)}{Q}_{\sigma\psi}+\right.$$
$$\left.+\left(\overset{(m)}{Q^2_\psi}+\frac{1}{m}\right)\overset{(m)}{Q}_{\sigma\sigma}\right)\eta(\sigma,\psi)\,dP=0$$

для любой $\eta(\sigma,\psi)\in L_2(p)$. Перепишем интеграл

$$\mathcal{J}=\iint\limits_P\left[\left(K+Q^2_\sigma\right)Q_{\psi\psi}-2Q_\sigma Q_\psi Q_{\sigma\psi}+\right.$$
$$\left.+\,Q^2_\psi Q_{\sigma\sigma}\right]\,\eta(\sigma,\psi)\,dP=0$$

в виде

$$\mathcal{J}=\iint\limits_P[\left(Q_{\psi\psi}(Q^2_\sigma-\overset{(m)}{Q^2_\sigma}-\tfrac{1}{m})\right)+$$
$$+(K+\overset{(m)}{Q^2_\sigma}+\tfrac{1}{m})](Q_{\psi\psi}-\overset{(m)}{Q}_{\psi\psi})-$$
$$-2Q_{\sigma\psi}Q_\psi(Q_\sigma-\overset{(m)}{Q}_\sigma)-2Q_{\sigma\psi}\overset{(m)}{Q}_\sigma(Q_\psi-\overset{(m)}{Q}_\psi)-$$
$$-2\overset{(m)}{Q}_\sigma\overset{(m)}{Q}_\sigma(Q_{\sigma\psi}-\overset{(m)}{Q}_\sigma\psi)+$$
$$+Q_\psi(Q_\psi Q_{\sigma\sigma}-\sqrt{\overset{(m)}{Q^2_\psi}+\tfrac{1}{m}}\,\overset{(m)}{Q}_{\sigma\sigma})+$$
$$+\sqrt{\overset{(m)}{Q^2_\psi}+\frac{1}{m}}\,\overset{(m)}{Q}_{\sigma\sigma}\,(Q_\psi-\sqrt{\overset{(m)}{Q^2_\psi}+\frac{1}{m}})]\times\eta dP.\quad(11)$$

Отсюда, используя свойства 1–5, следует, что интегралы в (11) стремятся к нулю. Поэтому получим, что $J=0$, т.е. уравнение (1) удовлетворяется почти всюду. Единственность $Q(\sigma,\psi)$ будет вытекать непосредственно из утверждения, что разность $\omega=Q_1-Q_2$ двух решений удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению [6; 7, с. 292]. Из всего вышеизложенного вытекает следующая теорема.

Теорема. Задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение $Q(\sigma,\psi)$, удовлетворяющее уравнению (1) почти всюду, и для которого конечны следующие величины

$$\max_P|Q|,$$
$$\max_P|\nabla Q|,$$
$$\iint\limits_P K(Q^2_{\sigma\psi}+Q^2_{\psi\psi}+Q^2_\psi Q^2_{\sigma\sigma})dP.$$

Библиографический список

1. Кузиков С.С. Численный расчет некоторых задач газовой динамики со свободными границами // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. – Новосибирск, 1975. – Вып. 21

2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Нелинейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М., 1964.

3. Ладыженская О.А. О дифференциальных свойствах обобщенных решений некоторых многомерных вариационных задач // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120.

4. Бакельман И.Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. – М., 1965.

5. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. Т. III: (Уравнение в частных производных). – М., 1960.

6. Берс Л.Ф., Джон. Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными (современное состояние теории). – М., 1964.

7. Соломяк Т.Б. Задача Дирихле для одного класса вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений // Известия высших учебных заведений. – 1964. – №2(93).