

К.О. Кизбикенов, А.А. Попов

**Шестишвенные замкнутые геодезические на прямоугольном параллелепипеде**

К.О. Kizbikenov, A.A. Popov

**Hexangular Closed Geodetic on a Rectangular Parallelepiped**

Доказано, что на прямоугольном параллелепипеде при выполнении некоторых ограничений на длины ребер существуют четыре вида неизоморфных замкнутых шестишвенных геодезических.

**Ключевые слова:** замкнутая геодезическая, параллелепипед, шестишвенная геодезическая, кратчайшая на многограннике.

It is proved that on a rectangular parallelepiped at performance of Some restrictions on lengths of edges there are four kinds not isomorphic closed 6 - costal geodetic.

**Key words:** the closed geodetic, parallelepiped, Geodetic from six pieces, the shortest on a polyhedron.

В 2008 г. В.Ю. Протасовым в статье «Геодезические на многогранниках» [1] была предложена задача: «Какие могут быть геодезические у прямоугольного параллелепипеда?». В работе дается ответ для шестишвенных замкнутых геодезических.

**Определение.** Кривая на поверхности называется геодезической, если она является локально кратчайшей, т.е. для каждой точки кривой существует окрестность этой точки на поверхности, внутри которой она является кратчайшей среди всех других кривых, соединяющих любые две точки этой кривой, лежащие в этой окрестности [2].

Очевидно, что геодезической на многограннике является ломаная с вершинами на ребрах многогранника.

Известна [1] следующая теорема о геодезических на многогранниках.

**ТЕОРЕМА.** Ломаная на поверхности многогранника является геодезической тогда и только тогда, когда она не проходит через его вершины и обладает «свойством отражения»: две последовательные стороны ломаной образуют равные углы с ребром.

**Определение.** Геодезические называются изоморфными, если они пересекают одни те же ребра в одинаковой последовательности [1].

Далее будем рассматривать замкнутые шестишвенные несамопересекающиеся неизоморфные геодезические, которые будем просто иногда называть гелдезическими. У всех изоморфных геодезических длины равны и соответствующие стороны параллельны. Поэтому задача состоит в классификации всех неизоморфных геодезических [1].

Мы будем искать шестишвенные замкнутые геодезические на поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями  $a, b, c$ . Причем, не теряя общности, будем считать, что

$$a \geq b \geq c. \quad (1)$$

Будем задавать замкнутую геодезическую с помощью последовательности ребер, которые она пересекает. Например,  $abcabc$ . Здесь мы убрали, для краткости, последнее ребро  $a$ , которое обязательно должно присутствовать в этой последовательности, чтобы геодезическая замкнулась. Эта последовательность – цикл. Поэтому  $abcabc = cbacba = bcabca...$  и т.д. Цикл «прокручивается», поскольку его конец соединен с началом. Его также можно «вращать» в обратную сторону и записывать в обратном порядке.

Рассмотрим свойства таких последовательностей. Эти свойства были установлены путем полного перебора всевозможных разверток прямоугольного параллелепипеда.

Всего всевозможных разверток параллелепипеда, которые начинаются с фиксированной грани  $a, b$ , составленных из шести граней параллелепипеда, – шестьдесят четыре. При этом оказалось, что только в 22 случаях начальная грань совпадает по размеру с конечной. Все эти случаи отражены в таблице 1. Из этих 22 случаев только в восьми линия замыкается. В первой строке таблицы представлены номера случаев, в столбцах указаны последовательности ребер, которые пересекают геодезические. Замкнутые шестишвенные геодезические соответствуют случаям 4, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 19. Вот эти последовательности —  $aabccb$ ,  $acbbca$ ,  $acbacb$ ,  $accabb$ ,  $bccbaa$ ,  $bcabca$ ,  $bcaacb$ ,  $bbacca$ . Следует обратить внимание, что среди этих вось-

Развертки параллелепипеда

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	a	a	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	b	b	b	b	b	b
a	a	a	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	a	a	a	a	a	b	b	b
a	a	c	c	b	b	b	a	a	a	c	c	b	b	b	a	a	a	c	c	b	b
a	b	c	c	a	b	c	c	a	b	c	c	a	b	c	c	a	b	c	c	a	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

ми случаев есть совпадения: цикл  $aabccb = bccbaa$ ,  $acbbca = bcabca$ ,  $acbacb = bcabca$ ,  $bccbaa = bbacca$ .

Таким образом, у прямоугольного параллелепипеда возможно не более четырех неизоморфных шестизвенных замкнутых геодезических, которые могут быть заданы последовательностями  $abcabc$ ,  $abccba$ ,  $abbacc$ ,  $aacbbc$ .

Можно заметить свойства этих последовательностей.

1. Существует запрещенная трехбуквенная последовательность  $xux$ , где  $x$  и  $y$  принимают одно из значений  $a, b, c$  и шестибуквенная последовательность  $xyyzz$ .

2. Каждая буква  $a, b, c$  в последовательности  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$  встречается ровно два раза.

3. Любая последовательность  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ , которая задает замкнутую шестизвенную геодезическую, должна содержать все ребра  $a, b, c$ . Например, не существует замкнутой геодезической, которая задана последовательностью  $abbaab$ .

Исходя из этих свойств мы можем любую последовательность начинать с любой буквы. Поэтому будем начинать с буквы  $a$ .

1. Рассмотрим **первый случай**  $abcabc$  (рис. 1). Развертка изображена в прямоугольной системе координат, связанной с гранями параллелепипеда.

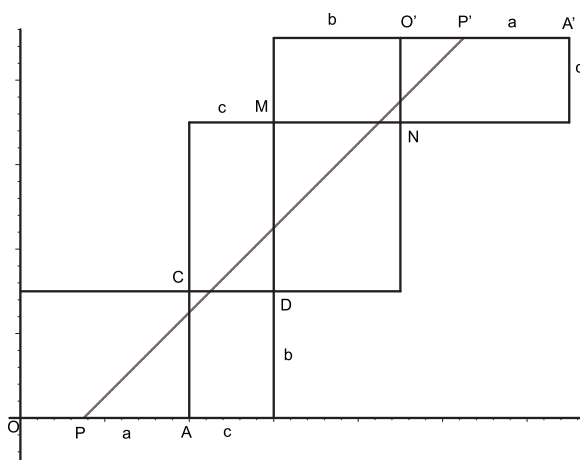


Рис. 1. Первый случай

На рисунке отрезок  $PP'$  – развертка замкнутой геодезической, которая задана последователь-

ностью  $abcabc$  ребер, которые она пересекает. При этом на самом параллелепипеде ребра  $OA$  и  $O'A'$  «склеиваются» в одно ребро, а точка  $P$  совпадает с точкой  $P'$ . Поэтому  $OP = O'P'$ . Прямые  $OO'$  и  $PP'$  параллельны. При этом координаты точки  $O'(a+b+c, a+b+c)$ . Поэтому эти прямые образуют с осью  $Ox$  угол в  $45^\circ$ . Выясним, в каком случае прямая  $PP'$ , пересекая отрезок  $CD$ , не пересекает отрезок  $MN$ . Это случится, если вектор  $\vec{CN}(b+c, a)$  будет образовывать с осью  $Ox$  угол больше или равный  $45^\circ$ . То есть когда

$$a \geq b+c. \quad (2)$$

Чтобы прямая  $PP'$ , пересекая отрезок  $MN$ , не смогла пересечь отрезок  $CD$ , необходимо, чтобы вектор  $\vec{CN}(b+c, a)$  образовывал с осью  $Ox$  угол больше или равный  $45^\circ$ , т.е. удовлетворял условию (2). Следовательно, если выполняется условие

$$a < b+c, \quad (3)$$

то геодезическая существует! Заметим, что точки  $C$  и  $N$  наиболее близкие к прямой  $PP'$ . Докажем это.

Точка  $M$  имеет координаты  $(a+c, b+a)$ . Тогда  $\vec{CM}(c, a)$  и угловой коэффициент прямой  $CM$  равен  $a/c \geq 1$ , так как по условию  $a \geq b$ . Поэтому точка  $C$  ближе к прямой  $PP'$ , чем точка  $M$ . Аналогично доказывается, что точка  $N$  ближе к прямой  $PP'$ , чем точка  $D$ . Проводя такие же рассуждения, легко установить, что точки  $O'$  и  $A$  более удалены от прямой  $PP'$ , чем точки  $C$  и  $N$ . Таким образом, в случае 1 все геодезические находятся внутри полосы, ограниченной точками  $C$  и  $N$ . Уравнения граничных прямых этой полосы имеют вид  $y-x+a-b=0$ ,  $y-x+c=0$ . Эти прямые высекают на отрезке  $OA$  интервал  $(a-b, c)$ , каждая точка которого задает одну из изоморфных замкнутых геодезических. Длина этого интервала равна  $b+c-a$  и в силу неравенства (3) его длина больше нуля. Все эти геодезические имеют одинаковый угловой коэффициент  $k=1$  и одинаковую длину  $(a+b+c)\sqrt{2}$  (рис. 2).

## 2. Второй случай $abccba$ .

В этом случае (рис. 3) вновь геодезическая  $PP'$  параллельна прямой  $OO'$ . Точка  $O'$  имеет координаты  $(a+c, a+2b+c)$ . Поэтому прямая  $OO'$

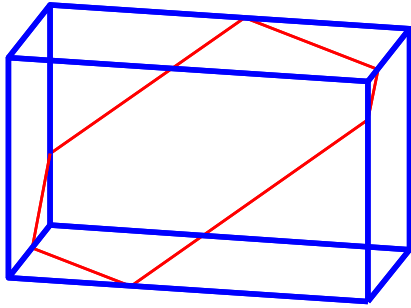


Рис. 2. Замкнутая геодезическая в первом случае

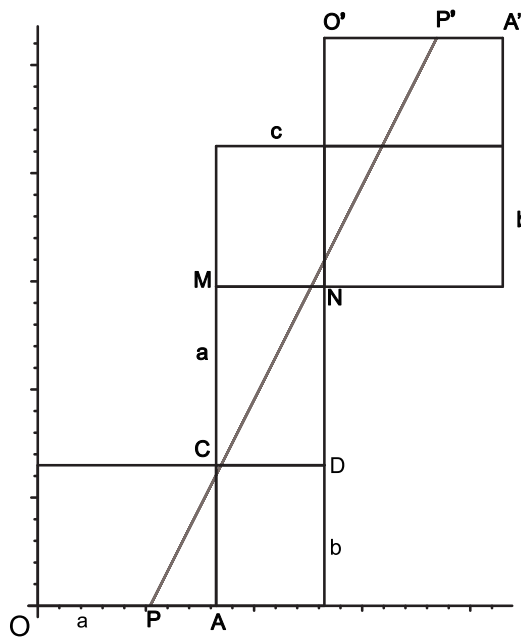


Рис. 3. Второй случай

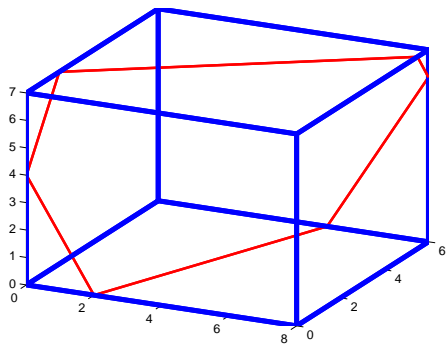


Рис. 4. Замкнутая геодезическая во втором случае

имеет угловой коэффициент, равный  $k = (a + 2b + c)/(a + c)$ . Прямая  $PP'$ , пересекая отрезок  $MN$ , не сможет пересечь отрезок  $CD$ , если угловой коэффициент прямой  $CN$  ( $C(a, b)$ ,  $N(a + c, b + a)$ ) будет больше или равен  $k$  (вектор  $\overrightarrow{CN}$  имеет координаты  $(c, a)$ ) или

$$\frac{a}{c} \geq \frac{2b + a + c}{a + c}.$$

После упрощений, получим

$$a^2 \geq 2bc + c^2.$$

Следовательно, геодезическую можно провести, если

$$a^2 < 2bc + c^2. \quad (4)$$

В этом случае ближайшими точками к прямой  $PP'$  являются точки  $C$  и  $N$ . Искомые геодезические проходят внутри полосы, ограниченной точками  $C$  и  $N$ . Уравнения граничных прямых имеют вид

$$\begin{aligned} (a + c)y - (a + 2b + c)x + ba - bc + ac + a^2 &= 0, \\ (a + c)y - (a + 2b + c)x + ba + ac + bc + c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Эти прямые высекают на отрезке  $OA$  интервал

$$\left( \frac{ba - bc + ac + a^2}{2b + c + a}, \frac{(a + c)(b + c)}{2b + c + a} \right),$$

каждая точка которого задает одну из изоморфных замкнутых геодезических. Длина этого интервала равна

$$\frac{2bc + c^2 - a^2}{2b + c + a},$$

и в силу условия (4) эта длина больше нуля. Все эти геодезические имеют одинаковый угловой коэффициент

$$k = \frac{a + 2b + c}{a + c}$$

и одинаковую длину  $l = \sqrt{(a + c)^2 + (a + 2b + c)^2}$ .

На рисунке 4 изображена геодезическая.

### 3. Третий случай *abbacc*.

В этом случае геодезическая  $PP'$  не пересекает отрезок  $CN$ , если угловой коэффициент прямой  $NO'$  будет не больше углового коэффициента прямой  $OO'$  (рис. 5). Имеем  $O'(2a + b + c, b + c)$ ,  $N(2a + c, b)$ ,  $\overrightarrow{NO'}(b, c)$  и

$$\frac{c}{b} \leq \frac{b + c}{2a + b + c},$$

или

$$b^2 \geq 2ac + c^2.$$

Геодезическая в этом случае существует, если

$$b^2 < 2ac + c^2. \quad (5)$$

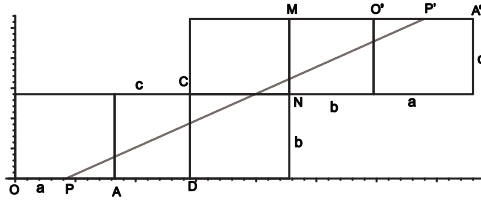


Рис. 5. Третий случай

Изоморфные между собой геодезические заполняют полосу, которая заключена между прямыми, проходящими через точки  $C$  и  $N$ . Уравнения этих прямых имеют вид

$$\begin{aligned} (2a + b + c)y - (b + c)x - ab - b^2 + ac + c^2 &= 0, \\ (2a + b + c)y - (b + c)x + 2ac + c^2 - b^2 &= 0. \end{aligned}$$

Эти прямые пересекают на отрезке  $OA$  интервал

$$\left(0, \frac{2ac + c^2 - b^2}{b + c}\right).$$

Длина этого интервала по условию (5) больше нуля. Все эти геодезические имеют одинаковый угловой коэффициент

$$k = \frac{b + c}{2a + b + c}$$

и одинаковую длину (рис. 6)

$$l = \sqrt{(2a + b + c)^2 + (b + c)^2}.$$

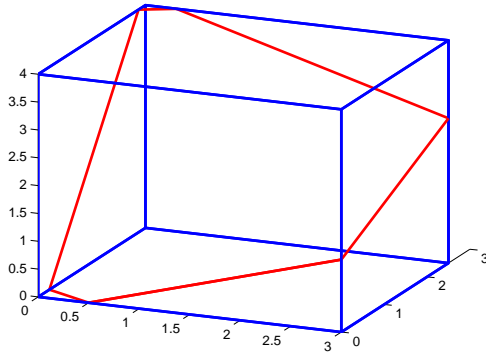


Рис. 6. Замкнутая геодезическая в третьем случае

#### 4. Наконец, **четвертый случай** $aacbbcs$ .

В этом случае (рис. 7) геодезической не существует, если вектор  $\overrightarrow{CN}(b, a)$  будет образовывать с осью  $Ox$  угол, тангенс которого не меньше тангенса угла наклона прямой  $OO'$ , так как  $O'(a + b, a + b + 2c)$ , то мы получаем неравенство

$$\frac{a}{b} \geq \frac{a + b + 2c}{a + b},$$

или

$$a^2 \geq b^2 + 2bc.$$

Таким образом, в этом случае замкнутая геодезическая существует только в том случае, когда

$$a^2 < b^2 + 2bc. \quad (6)$$

Полоса, содержащая изоморфные геодезические, ограничена прямыми

$$\begin{aligned} (a + b)y - (2c + a + b)x - b^2 - bc + ac + a^2 &= 0, \\ (a + b)y - (2c + a + b)x + bc + ac &= 0. \end{aligned}$$

Эти прямые пересекают на отрезке  $OA$  интервал

$$\left(\frac{-b^2 - bc + ac + a^2}{b + 2c + a}, \frac{c(b + a)}{b + 2c + a}\right).$$

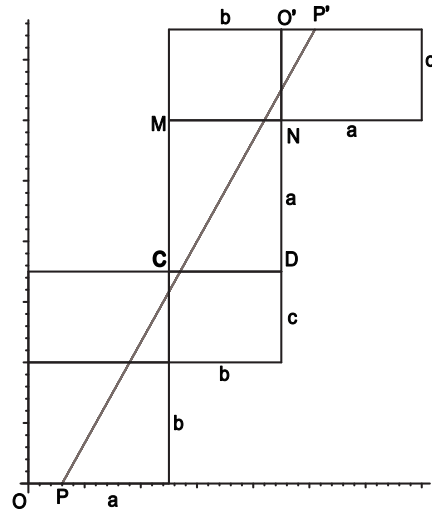


Рис. 7. Четвертый случай

Его длина равна

$$\frac{2bc + c^2 - a^2}{2b + c + a}$$

и в силу условия (6), она больше нуля. Все эти геодезические имеют одинаковый угловой коэффициент

$$k = \frac{2c + a + b}{a + b}$$

и одинаковую длину  $l = \sqrt{(a + b)^2 + (2c + a + b)^2}$ .

Выпишем все полученные ограничения

$$a < b + c; \quad (7)$$

$$a^2 < c^2 + 2bc; \quad (8)$$

$$b^2 < c^2 + 2ac; \quad (9)$$

$$a^2 < b^2 + 2bc. \quad (10)$$

Возведем обе части первого неравенства в квадрат. По предположению,  $a \geq b \geq c$ , поэтому некоторые неравенства этой системы мы можем упорядочить в виде цепочки неравенств

$$a^2 < c^2 + 2bc \leq b^2 + 2bc < (b + c)^2.$$

Отсюда следует, что если существует замкнутая шестизвенная геодезическая типа 2, то существует геодезическая типа 4 и 1. Если не существует геодезической типа 1, то не существует геодезических типа 2 и 4.

Выпишем по порядку угловые коэффициенты геодезических всех четырех типов

$$k_1 = 1;$$

$$k_2 = \frac{a + 2b + c}{a + c};$$

$$k_3 = \frac{b + c}{2a + b + c};$$

$$k_4 = \frac{2c + a + b}{a + c}.$$

Сравним длины геодезических разных видов.

Для этого выпишем их длины

$$l_1 = (a + b + c)\sqrt{2},$$

$$l_2 = \sqrt{(a + c)^2 + (a + 2b + c)^2},$$

$$l_3 = \sqrt{(2a + b + c)^2 + (b + c)^2},$$

$$l_4 = \sqrt{(a + b)^2 + (2c + a + b)^2}.$$

Заметим, что  $l_1$  имеет наименьшую длину. Их длины упорядочены следующим образом:  $l_1 < l_4 \leq l_3 \leq l_2$ . Причем  $l_3 - l_4 = \sqrt{2}\sqrt{a^2 - c^2}$  и  $l_3 = l_4$ , если  $a = c$ , т.е. для куба (так как по предположению  $a \geq b \geq c$ ). В этом случае, однако  $k_3 = 1/2$ , а  $k_4 = 2$  и геодезические не изоморфны, хотя имеют одинаковую длину.

Далее  $l_2 - l_3 = \sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2}$  и  $l_2 = l_3$ , когда  $a = b$ . В этом случае параллелепипед превратится в правильную четырехугольную призму. Сравним их угловые коэффициенты  $k_2 = (3a + c)/(a + c)$ , а  $k_3 = (a + c)/(3a + c)$ , и они не равны. Значит геодезические не изоморфны.

**Замечание.** Если некоторые измерения параллелепипеда совпадают, то количество возможных замкнутых геодезических сокращается. Если  $b = c$  (случай  $a = b$  рассмотрен выше), то неравенства 8 и 10 совпадут, совпадут и их угловые коэффициенты  $k_2 = k_4$  и длины  $l_2 = l_4$  и последовательности. Количество геодезических сократится до трех. Если же все измерения совпадут, то получим куб, у которого три вида шестизвенных геодезических с угловыми коэффициентами  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 1/2$ .

## Библиографический список

1. Протасов В.Ю. Замкнутые геодезические на поверхности симплекса // Математический сборник. — 2007. — №2.
2. Протасов В.Ю. Геодезические на многогранниках // Московская математическая конференция школьников, март 2008. [Electronic resource]. — URL: <http://www.mccme.ru/mmks/mar08/Poincare.pdf>.