

*Е.А. Карабут, Е.Н. Журавлева***Шесть течений со свободной границей, описываемых одной формулой****E.A. Karabut, E.N. Zhuravleva***Six free Boundary Flows Generating by one Formulae**

Предложен новый подход к конструированию точных решений для нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Найдено шесть примеров таких течений.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, течения со свободной границей, точные решения, комплексная скорость.

Введение. Рассмотрим плоское нестационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в отсутствии внешних сил и поверхностного натяжения. Жидкость в каждый момент времени t занимает некоторую область в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$. Граница области состоит или из участков свободной границы, на которых поддерживается нулевое давление P , или из твердых стенок, где должно быть выполнено условие непротекания.

Движение имеет либо инерционный характер, т.е. вызывается начальным полем скоростей, либо вызывается источниками, диполями или другими гидродинамическими особенностями заданной интенсивности. Во все последующие моменты времени необходимо найти форму области и скорость во всех точках жидкости.

Известно не много примеров точных решений такого рода задач. Первый и, по-видимому, единственный известный класс точных решений – течения с линейным полем скоростей. Открыт Дирихле в 1860 г. В современном изложении можно найти в [1–3]. Свободная поверхность в этом случае представляет собой кривую второго порядка: гиперболу, эллипс или параболу. Эволюция эллипса изучена в [4]. Обобщение на трехмерный случай – эволюция эллипсоида – рассмотрена в [5–6].

Функция $U(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t)$ является аналитической функцией от комплексной переменной z и называется комплексной скоростью. Здесь $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ – декартовы компоненты вектора скорости. Произвольная аналитическая

New approach to the construction of the exact solutions of unsteady free-boundary flows with ideal incompressible liquid is proposed. Six examples of such flows have been found.

Key words: ideal incompressible liquid, free-boundary flows, exact solutions, complex velocity.

функция $U(z, t)$ всегда будет описывать какое-то течение жидкости, хотя, возможно, в многолистной области. Это связано с тем, что реальная и мнимая части аналитической функции всегда удовлетворяют уравнению Лапласа, т.е. выполнены уравнение безвихревого движения. Для заданной функции $U(z, t)$ можно проверить – являются ли некоторые линии постоянства давления одновременно и жидкими линиями, т.е. состоят из одних и тех же частиц. Для этого из интеграла Коши-Лагранжа находим изобары и проверяем выполнение для них кинематического условия. Однако заранее неизвестно, чем нужно руководствоваться при выборе функции $U(z, t)$, чтобы эта функция описывала какое-либо течение со свободной границей.

Первое течение. Представим некоторые изображения, которые позволят построить новые точные решения.

Пусть жидкость занимает тонкую полосу, расположенную симметричным образом вдоль положительной части оси x (рис. 1). В начальный момент времени $t = 0$ компонента вектора скорости вдоль оси x квадратичным образом зависит от координаты

$$u(x, 0, 0) = x^2/4. \quad (1)$$

Границу полосы считаем свободной, на ней поддерживается нулевое давление. Необходимо определить временную эволюцию полосы, т.е. найти форму границ и скорость жидкости для $t > 0$.

Такая задача может быть решена для тонкой полосы. Пусть она настолько тонкая, что давление поперек полосы не меняется. Тогда давление равно нулю всюду в полосе. Таким образом, градиент давления равен нулю, а следовательно, и

*Работа выполнена при финансовой поддержке проекта фундаментальных исследований Президиума РАН № 4.8.

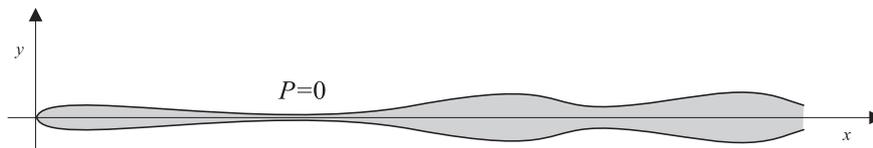


Рис. 1. Первое течение

ускорение является нулевым. Поэтому каждая частичка жидкости в бесконечно тонкой полосе движется с той скоростью, которую имела в начальный момент времени.

Если использовать лагранжеву координату a , то для нахождения перемещения $x(a, t)$ необходимо решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} x_{tt} &= 0, \\ x_t|_{t=0} &= a^2/4, \\ x|_{t=0} &= a, \quad (a \geq 0), \end{aligned} \tag{2}$$

которая имеет решение

$$x = \frac{a^2}{4}t + a. \tag{3}$$

Найдем скорость $u = x_t$ как функцию от эйлеровой координаты x . Возьмем положительный корень квадратного уравнения (3):

$$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{1 + xt} - 1}{t}.$$

Подставляя его в (2), получим

$$u(x, 0, t) = \left(\frac{\sqrt{1 + xt} - 1}{t} \right)^2. \tag{4}$$

Таким образом, если в начальный момент времени $t = 0$ профиль скорости дается формулой (1) и каждая частичка жидкости двигается с постоянной скоростью, то в последующие моменты времени скоростной профиль дается формулой (4).

Основная идея данной работы состоит в аналитическом продолжении решения (4) с вещественной оси в комплексную плоскость:

$$U(z, t) = \left(\frac{\sqrt{1 + zt} - 1}{t} \right)^2. \tag{5}$$

Мы установили, что комплексная скорость (5) описывает эволюцию бесконечно тонкой полосы жидкости. Замечательно, что, кроме этого, она описывает еще пять различных течений со свободной границей.

Свойства решения. В формуле (5) будем брать ту ветвь квадратного корня, для которой $\sqrt{1 + zt}$ при $z = 0$ равен единице. Отсюда следует, что $U(0, t) = 0$. Можно показать, что ускорение и все последующие временные производные более

высокого порядка от скорости в точке $z = 0$ тоже равны нулю. Это означает, что частичка жидкости, первоначально находившаяся в начале координат, там и остается.

Свободная поверхность бесконечно тонкой полосы, эволюцию которой мы рассматривали выше, проходит через начало координат. Поэтому естественно считать, что давление для течения, даваемого формулой (5), равно нулю в начале координат:

$$P|_{z=0} = 0. \tag{6}$$

Момент времени $t = 0$ является выделенным. Скорость в этот момент квадратичная $U(z, 0) = z^2/4$. Время t в формуле (5) может быть любого знака. Удобнее разделить положительные и отрицательные моменты времени. Отрицательные моменты времени удобнее дополнительно сделать положительными. В результате получим два случая.

В первом случае (назовем его *положительным*) имеем исходную формулу (5), которую будем рассматривать только для $t \geq 0$.

Для $t < 0$ время пустим вспять. Для этого достаточно поменять вектор скорости на противоположный. Делая замену переменных $t \rightarrow -t$, $z \rightarrow -z$, получим из (5) второй *отрицательный* случай

$$U(z, t) = - \left(\frac{\sqrt{1 + zt} - 1}{t} \right)^2, \quad (t \geq 0). \tag{7}$$

Отметим также, что функции (5), (7) содержат точку ветвления

$$x^* = -1/t. \tag{8}$$

Необходимо, чтобы эта особенность находилась вне жидкости. Таким виртуальным особым точкам в последнее время уделяется повышенное внимание. Анализ их поведения является определяющим для интегрируемости плоской задачи со свободной границей. Отметим легко проверяемое свойство: скорость жидкости в особой точке (8) и скорость самой особой точки совпадают.

Положительный случай. Комплексный потенциал $\Phi(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t)$, где $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$ — потенциал скорости и функция тока, находится из уравнение $\Phi_z = U$. Полагая $\Phi = 0$ в начале координат, получим

$$\Phi = \frac{2z}{t^2} + \frac{z^2}{2t} - \frac{4}{3t^3} \left[(1 + zt)^{3/2} - 1 \right]. \tag{9}$$

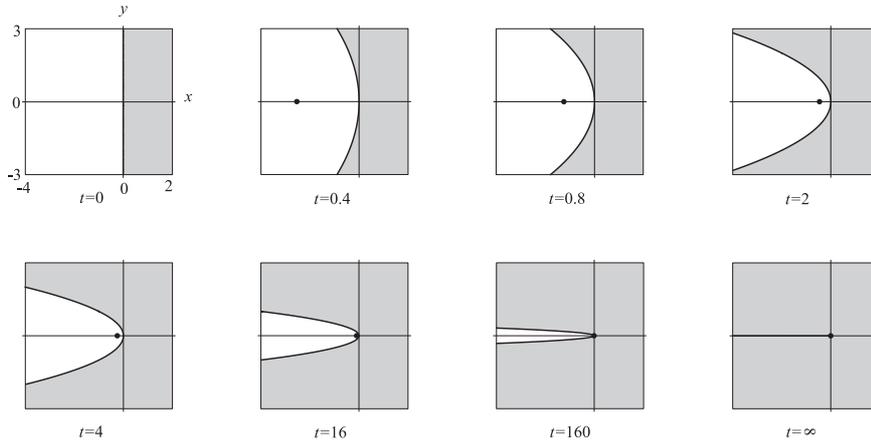


Рис. 2. Второе течение

Дальнейшие выкладки непосредственно с формулами (5), (9) проводить практически невозможно, поскольку содержащиеся в них радикалы приведут к очень громоздким вычислениям. Избавимся от радикалов путем введения комплексного параметра

$$\zeta = \sqrt{1 + zt} - 1. \quad (10)$$

Теперь вместо комплексной плоскости z имеем комплексную плоскость ζ . Формула (10) обеспечивает соответствие между плоскостями, причем точка $\zeta = 0$ соответствует точке $z = 0$.

Дополнительно договоримся время обозначать буквой t только тогда, когда второй независимой переменной является z , и обозначать буквой τ , когда второй переменной является ζ . Например, комплексная скорость может быть функцией первой или второй пары переменных: $U(z, t)$ или $U(\zeta, \tau)$. Такое соглашение сделано для удобства различения частных производных. Хотя $t = \tau$, однако частные производные имеют разный смысл и не совпадают: $\partial/\partial t \neq \partial/\partial \tau$. Если в формулах (5), (9), (10) z заменить на ζ , то получим следующее параметрическое представление решения без радикалов

$$U(\zeta, \tau) = \left(\frac{\zeta}{\tau}\right)^2, \quad (11)$$

$$\Phi(\zeta, \tau) = \frac{3\zeta^4 + 4\zeta^3}{6\tau^3}, \quad (12)$$

$$z(\zeta, \tau) = \frac{\zeta^2 + 2\zeta}{\tau}. \quad (13)$$

Изобары. Для нахождения давления воспользуемся интегралом Коши-Лагранжа

$$\operatorname{Re} \Phi_t + \frac{1}{2}|U|^2 + \frac{P}{\rho} = c(t). \quad (14)$$

Из условия (6) определяем: $c(t) = 0$. Переходя к параметрическим переменным ζ, τ в (14), получим

$$\operatorname{Re}(\Phi_\tau + \Phi_\zeta \zeta_t) + \frac{1}{2}|U|^2 + \frac{P}{\rho} = 0. \quad (15)$$

Подставим сюда (11), (12) и производную ζ_t , найденную из (13). Дифференцируя (13) по t , получим

$$z_t = -\frac{\zeta^2 + 2\zeta}{\tau^2} \cdot \tau_t + \frac{2\zeta + 2}{\tau} \cdot \zeta_t.$$

Учитывая, что $z_t = 0$, $\tau_t = 1$, находим

$$\zeta_t = \frac{1}{2\tau} \frac{\zeta^2 + 2\zeta}{\zeta + 1}. \quad (16)$$

В результате интеграл Коши-Лагранжа (15) принимает вид

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\operatorname{Re} \zeta^4 - |\zeta|^4}{2\tau^4}. \quad (17)$$

Используя представление $\zeta = \eta e^{i\theta}$, получим, что числитель в (17) равен нулю, только если $\cos 4\theta = 1$. Таким образом, в плоскости ζ мы имеем две прямые, на которых давление равно нулю: мнимая ось $\zeta = i\eta$ и вещественная ось $\zeta = \eta$.

Найдем, каким линиям в плоскости z соответствуют найденные прямые. Подставив $\zeta = i\eta$ в формулу (13)

$$z = \frac{\eta^2 + 2i\eta}{t}$$

и взяв затем реальную и мнимую части, получим

$$x = -\eta^2/t, \quad y = 2\eta/t. \quad (18)$$

Таким образом, мнимая ось $\zeta = i\eta$ в плоскости z соответствует параболе

$$x = -ty^2/4, \quad (19)$$

вдоль которой давление всегда равно нулю.

Аналогично проверяем, что вещественная положительная полуось $\zeta = \eta$ ($\eta \geq 0$) переходит в плоскости z также в вещественную положительную полуось

$$y = 0, \quad x \geq 0. \quad (20)$$

Здесь давление тоже равно нулю.

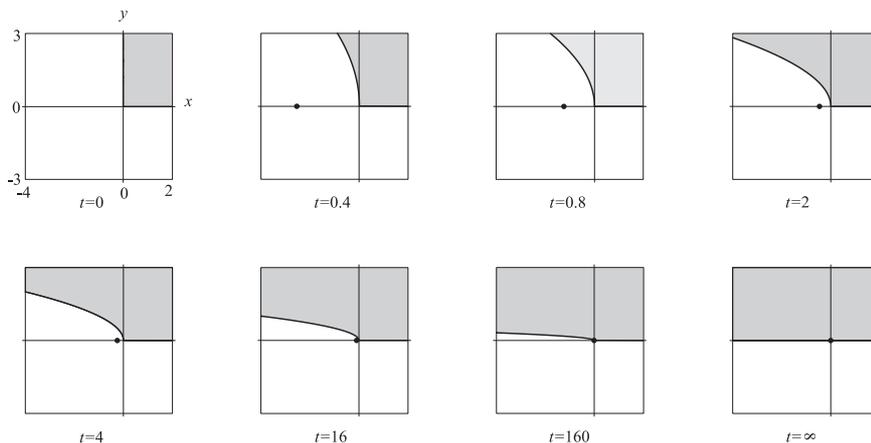


Рис. 3. Третье течение

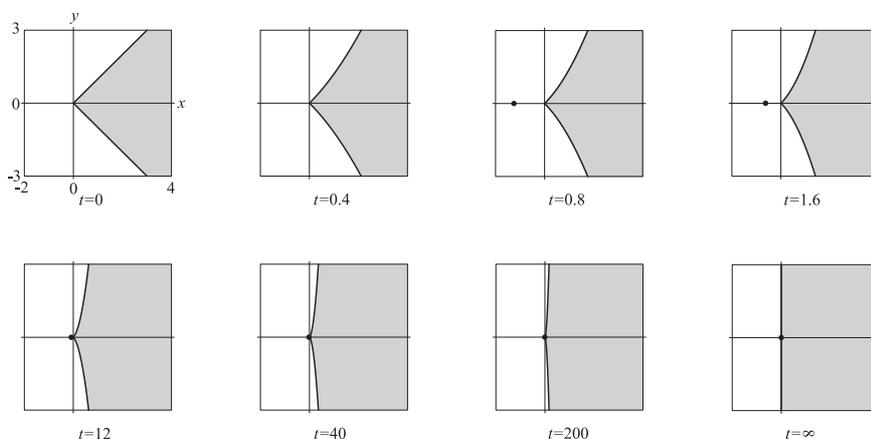


Рис. 4. Четвертое течение

Кинематическое условие. Если свободная поверхность задана уравнением $y = f(x, t)$, то кинематическое условие записывается в виде

$$f_t + f_x u = v. \tag{21}$$

Это условие для изобары (20) выполнено, поскольку $f = 0$, а из (5) следует $v = 0$. Таким образом, луч (20) является свободной границей.

Если свободная поверхность записывается в форме $x = g(y, t)$, то кинематическое условие можно записать в другой форме

$$g_t + g_y v = u. \tag{22}$$

На изобаре (19) имеем $g = -ty^2/4$. Подставляя в (11) $\zeta = i\eta$, найдем компоненты вектора скорости:

$$v = 0, \quad u = -\eta^2/t^2.$$

Используя вторую формулу в (18), получим $u = -y^2/4$. Применяя найденные формулы в (22), убеждаемся, что кинематическое условие выполнено. Парабола (19) является свободной границей.

Эволюция свободной поверхности (19) с ростом времени изображена на рисунке 2. Точкой отмечено местоположение особенности x^* . В результате движения жидкость, первоначально занимающая полуплоскость, трансформируется в конце концов в плоскость с прямолинейным разрезом. Получили второе течение, описываемое формулой (5).

Как было показано выше, ось x на рисунке 2 является не только линией симметрии, но и свободной поверхностью. Поэтому рассматривая верхнюю половину течения на этом рисунке, получим третье течение (рис. 3). Найден интересный пример течения, когда часть свободной поверхности остается прямой линией во все время течения.

Ускорение. Из самого способа построения комплексной скорости (5) известно, что движение на прямолинейной свободной поверхности происходит с нулевым ускорением. Определим ускорение на другой свободной поверхности (19). В комплексной записи ускорение находится из формулы

$$\frac{dU}{dt} = U_t + \bar{U}U_z.$$

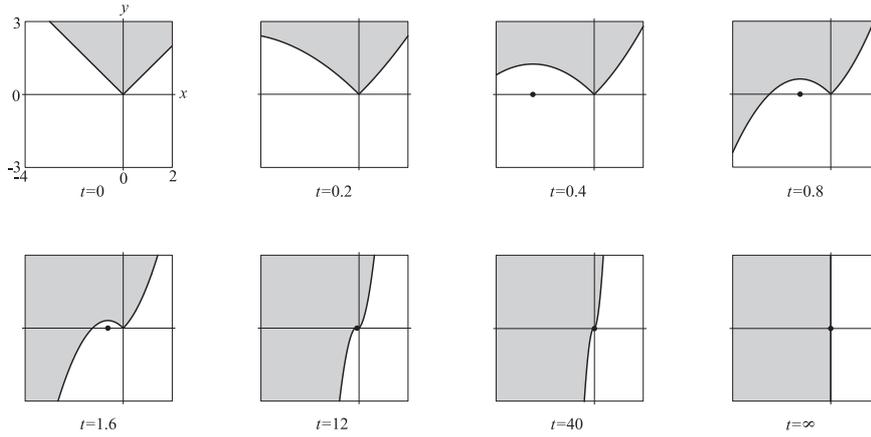


Рис. 5. Пятое течение

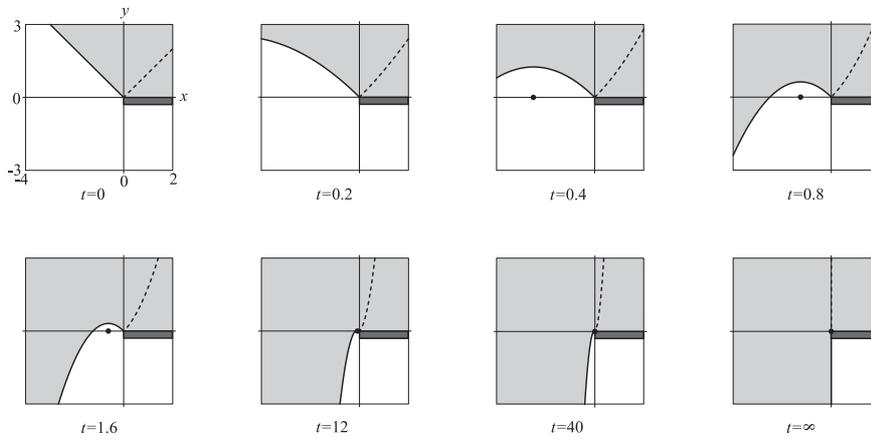


Рис. 6. Шестое течение

Заменяя здесь переменные z, t на переменные ζ, τ , получим

$$\frac{dU}{dt} = U_\tau + U_\zeta \zeta_t + \bar{U}(U_\zeta \zeta_z). \quad (23)$$

Подставим в (23) комплексную скорость (11), ранее вычисленную производную (16), а также производную

$$\zeta_z = \frac{t}{2(\zeta + 1)},$$

полученную из (13). В результате находим

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\bar{\zeta}^2 \zeta - \zeta^3}{\tau^3 (\zeta + 1)}. \quad (24)$$

Видно, что при $\zeta = i\eta$ имеем $dU/dt = 0$. Таким образом, на свободной поверхности (19) ускорение равно нулю. Каждая частица жидкости на этой поверхности двигается параллельно оси x с постоянной скоростью.

Отрицательный случай. Аналогичным образом построим течения, описываемые комплексной скоростью (7). В этом случае изменится знак

комплексного потенциала и комплексной скорости. В результате из интеграла Коши-Лагранжа вместо формулы (17) получим

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{\operatorname{Re} \zeta^4 + |\zeta|^4}{2\tau^4}.$$

Делая замену $\zeta = \eta e^{i\theta}$, убеждаемся, что давление равно нулю, если $\cos 4\theta = -1$. Таким образом, в плоскости ζ свободной поверхности соответствуют две прямые:

$$\zeta = \eta e^{i\pi/4}, \quad \zeta = \eta e^{3i\pi/4}. \quad (25)$$

Подставим в (13) первую прямую:

$$z = \frac{i\eta^2 + \eta(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{t}.$$

Взяв реальную и мнимую часть, получим

$$x = \eta\sqrt{2}/t, \quad y = (\eta^2 + \sqrt{2}\eta)/t. \quad (26)$$

Таким образом, имеем параболу

$$y = x + tx^2/2, \quad (27)$$

вдоль которой давление постоянно. Аналогично из второй прямой (25) получим вторую аналогичную параболу

$$y = -x - tx^2/2. \quad (28)$$

Подставим в уравнение $U = -(\zeta/t)^2$ первую прямую (25). Взяв реальные и мнимые части, получим компоненты скорости на изобаре (27): $u = 0$, $v = (\eta/t)^2$. Далее используя первую формулу в (26), получим $v = x^2/2$. Подставляя найденные компоненты скорости и функцию $f = x + tx^2/2$ в кинематическое условие (21), убеждаемся, что оно выполнено. Таким образом, парабола (27) является свободной поверхностью. Аналогично доказывается, что другая парабола (28) также является свободной поверхностью.

Формула для ускорения жидкости отличается от (24):

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\bar{\zeta}^2 \zeta + \zeta^3}{\tau^3(\zeta + 1)}. \quad (29)$$

Используя (29), нетрудно показать, что на обоих свободных поверхностях ускорение равно нулю. Каждая частица жидкости на свободной поверхности движется с постоянной скоростью. Траектория частицы — прямая линия, параллельная оси y .

Течение со свободной границей (27) изображено на рисунке 4. Точкой изображена особенность x^* . Она, первоначально находясь на бесконечности, оказывается, в конце концов, на свободной

поверхности. Найдено течение, в котором жидкий клин с прямым углом при вершине трансформируется в полуплоскость.

Течение жидкости, расположенной между двумя свободными поверхностями (27) и (28), показано на рисунках 4 и 5. Жидкий клин с прямым углом, биссектриса которого направлена вдоль оси y , превращается с ростом времени в полуплоскость.

Замечательной особенностью двух течений, показанных на рисунке 4 и 5, является одинаковая форма свободной поверхности. Поэтому еще одно течение можно построить, если верхнюю половину течения на рисунке 4 состыковать с течением на рисунке 5. Такое течение изображено на рисунке 6. Вдоль оси x расположена твердая стенка. Пунктиром обозначена парабола (28). В данной ситуации ее можно назвать *внутренней* свободной границей, поскольку эта изобара, состоящая из одних и тех же частиц, расположена внутри жидкости. Имеем эволюцию жидкого клина с первоначальным углом $3\pi/4$ в клин с углом $3\pi/2$.

Заключение. Предложена новая техника, позволяющая строить точные решения в задаче о движении жидкости со свободной границей. Суть этой техники состоит в аналитическом продолжении решения, полученного из простых физических соображений, в комплексную область. Например, если вместо начального квадратичного профиля жидкости (1) взять кубический или какой-либо иной профиль, то получим совсем другие новые решения.

Авторы благодарят П.И. Плотникова за полезные обсуждения.

Библиографический список

1. Овсянников Л.В. Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. — Новосибирск, 1967.
2. Longuet-Higgins M.S. A class of exact, time-dependent, free-surface flows // J. Fluid. Mech. — 1972. — Vol. 55, No. 3.
3. Налимов В.И., Пухначев В.В. Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. — Новосибирск, 1975.
4. Пухначев В.В. О движении жидкого эллипса // Динамика сплошной среды. — 1978. — Вып. 33.
5. Лаврентьева О.М. О движении жидкого эллипсоида // ДАН СССР. — 1980. — Т. 253, № 4.
6. Лаврентьева О.М. Об одном классе движения жидкого эллипсоида // ПМТФ. — 1984. — Т. 25, № 4.