УДК 517.765

С.В. Дронов

Неполные пределы и структура семейства измеримых классов в AST

S.V. Dronov

Deficient Limits and Structure of the Family of Measurable Classes in AST

Работа выполнена в аксиоматике альтернативной теории множеств. Изучается соотношение пределов последовательности по двум сегментам класса натуральных чисел. Предел по меньшему из них назван неполным. Полученные результаты позволяют вывести необходимое и достаточное условие замкнутости семейства измеримых классов относительно произвольных объединений своих элементов.

Ключевые слова: сегмент, измеримый класс, предел последовательности, парафундаментальность.

We work in the Alternative Set Theory axiomatics and study relationship between the limits of sequences with a respect to two unequal cuts of the class of natural numbers. A limit taken by a smaller cut we call deficient. Some results obtained below on such a limits allow us to get necessary and sufficient condition for the closure of the family of all measurable classes with a respect to the arbitrary unions.

Key words: cut, measurable class, sequence limit, parafundamentality.

1. Вводные замечания. Постановка задачи. Работа выполнена в рамках аксиоматики альтернативной теории множеств (AST), основы которой изложены в [1], и продолжает цикл исследований автора [2] по применению этой аксиоматики к задачам математического анализа и теории меры.

Главной отличительной чертой AST является признание существования нетривиальных нечетких «горизонтов» внутри класса натуральных чисел $\mathbf{N}$. Понятие «горизонта» традиционно формализуется с помощью сегмента, начального отрезка класса $\mathbf{N}$. Класс $A \subset \mathbf{N}$ называют сегментом, если

$$1 \in A,\ (\forall \alpha \in A)(\forall \beta \in \mathbf{N})\ (\beta < \alpha \Rightarrow \beta \in A).$$

В частности, любое натуральное число считается сегментом, элементами которого являются все предшествующие ему натуральные числа. Наименьший аддитивный сегмент, т.е. такой, что если $\alpha, \beta \in A$, то и $\alpha + \beta \in A$, называется классом конечных натуральных чисел и обозначается $\mathbf{FN}$. В настоящей работе мы чаще всего рассматриваем аддитивные сегменты.

Будем изучать функции натурального аргумента, принимающие значения в некотором линейно упорядоченном подклассе X метрического пространства, в котором метрика d и порядок согласованы. Как правило, в качестве X будет рассматриваться класс рациональных чисел $\mathbf{Q}$ или некоторая его часть. Рассматриваемые функции назовем последовательностями и будем обозначать $\mathbf{x} = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Если изучаемая функция определена лишь на некотором сегменте A, условимся называть ее A-последовательностью, сохранив тем не менее за ней обозначение $\mathbf{x}$.

В работе [3] (см. также: [2, гл. 3]) было введено понятие предела последовательности относительно сегмента. Рассмотрим более общую конструкцию. Пусть имеются два сегмента $A, C,\ C \subset A$ и C-последовательность $\mathbf{x}$. Будем говорить, что $a \in X$ является AC-пределом $\mathbf{x}$, если для каждого $\gamma \in A$ может быть указано такое $\delta_\gamma \in C$, что

$$(\forall \delta \in C)\ \left(\delta \geq \delta_\gamma \Rightarrow d(x_\delta, a) < \frac{1}{\gamma}\right). \qquad (1)$$

Условимся в этом случае писать

$$a\ =\ A\text{-}\lim_{\gamma \in C} x_\gamma.$$

Если $C = \mathbf{FN}$, то понятие AC-предела совпадает с понятием σ-предела [2, гл. 4] и является, следовательно, его естественным обобщением. При выполнении $C \subset A$ рассмотрение AC-пределов равносильно временному «приближению горизонта», в силу чего такие пределы можно назвать неполными. Именно им и посвящена настоящая работа.

2. Основные теоремы. В процессе изучения σ-пределов в [4] был обнаружен нетривиальный характер этого понятия лишь в случае, когда основной сегмент A является σ-сегментом, т.е. может быть представлен в виде объединения монотонно возрастающей $\mathbf{FN}$-последовательности натуральных чисел. Сейчас мы обобщим этот результат на случай AC-пределов.

Рассмотрим два сегмента $A \supset C$. A назовем C-исчерпываемым, если существует такая строго возрастающая C-последовательность натуральных чисел $\mathbf{n}$, что $A = \cup\{n_s,\ s \in C\}$. Последовательность $\mathbf{n}$ будем называть исчерпывающей.

Договоримся называть C-последовательность $\mathbf{x}$ A-стабилизирующейся, если может быть указано такое $k_0 \in C$, что для произвольного $\gamma \in A$ справедливо

$$(\forall j, k \in C)\ \left(j, k \geq k_0 \Rightarrow d(x_j, x_k) < \frac{1}{\gamma}\right).$$

Это свойство последовательности можно интерпретировать как A-тождественность всех ее членов, начиная с некоторого места (терминология [2, глава 4]). В частности, если все элементы $\mathbf{x}$ являются натуральными числами, то последовательность стабилизируется в обычном понимании этого термина: $(j, k \in C,\ j, k \geq k_0) \Rightarrow (x_j = x_k)$.

Лемма 1. *Сегмент A C-исчерпываем тогда и только тогда, когда найдется неубывающая теоретико-множественно определимая не A-стабилизирующаяся A-последовательность $\mathbf{m}$ элементов C.*

Доказательство. Если имеется соответствующая исчерпывающая C-последовательность $\mathbf{n}$, то, заменив при необходимости n_0 на 0, можно требуемую $\mathbf{m}$ задать формулой $m_j = k, \quad n_{k-1} \leq j < n_k,\ j \in A$.

Обратно. Возьмем строго возрастающую подпоследовательность $m_{\gamma_s},\ s \in A$. Тогда в силу ее строгой монотонности имеет место неравенство $m_{\gamma_s} \geq s$, откуда $\cup\{m_{\gamma_s},\ s \in C\} \supset C$.

Поскольку класс $\{\gamma \in A |\ m_\gamma \leq m_{\gamma_s}\}$ является теоретико-множественно определимым сегментом, то это – натуральное число. Обозначим его n_s. Покажем, что $A = \cup\{n_s,\ s \in A\}$. Действительно, если $\delta \in A$, то $m_\delta \in C$, а следовательно, может быть указано $s \in C$ такое, что $m_\delta \leq m_{\gamma_s}$, значит, $\delta \in n_s$, что и завершает доказательство.

Теорема 1. *Если A, C – сегменты, A аддитивен и $C \subset A$, а также существует такая имеющая AC-предел C-последовательность $\mathbf{x}$, которая не A-стабилизируется, то A является C-исчерпываемым.*

Доказательство. Рассмотрим для $\mathbf{x}$ последовательность $\delta_\gamma, \gamma \in A$, определяемую (1). Если бы эта последовательность стабилизировалась, то и $\mathbf{x}$ тоже A-стабилизировалась бы. Поскольку это не так, то сегмент A C-исчерпываем по лемме 1.

Приведенные утверждения, очевидно, были доказаны практически дословно так же, как лемма 5 в [4, замечание 3]. Таким образом, далее имеет смысл ограничиться лишь случаем, когда больший из рассматриваемых сегментов исчерпывается меньшим.

Для A-последовательности $\mathbf{x} = \{x_n,\ n \in A\}$ и исчерпывающей последовательности $\mathbf{n}$ через $\mathbf{x(n)}$ условимся обозначать C-последовательность $x_{n_s},\ s \in C$ (можно смотреть на нее как на подпоследовательность $\mathbf{x}$).

Теорема 2.

1. *a – предел $\mathbf{x}$ относительно сегмента A в том и только том случае, когда a является AC-пределом $\mathbf{x(n)}$ для произвольной исчерпывающей последовательности $\mathbf{n}$.*
2. *Если $\mathbf{x}$ – монотонная A-последовательность, $\mathbf{n}$ – произвольная исчерпывающая последовательность, то для существования AC-предела $\mathbf{x(n)}$ необходимо и достаточно существования предела $\mathbf{x}$ относительно A, причем два этих предела равны.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения сначала предположим, что у $\mathbf{x}$ имеется предел a относительно сегмента A, и, следовательно, для каждого $\gamma \in A$ может быть указано $\delta_\gamma \in A$ так, что

$$(\forall \delta \in A)\ \left(\delta \geq \delta_\gamma\ \Rightarrow\ d(x_\delta, a) < \frac{1}{\gamma}\right). \qquad (2)$$

В произвольной исчерпывающей последовательности $\mathbf{n}$ по такому δ_γ в свою очередь найдется элемент $n_{k_\gamma} \geq \delta_\gamma$. Поскольку $\mathbf{n}$ возрастает, то

$$(\forall k \in C)\ (k \geq k_\gamma \Rightarrow n_k \geq \delta_\gamma),$$

а значит, в силу (2), $d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{\gamma}$, откуда следует, что a – AC-предел $\mathbf{x(n)}$.

Обратно. Пусть $a = A\text{-}\lim_{k \in C} x_{n_k}$ для произвольно выбранной исчерпывающей последовательности $\mathbf{n} = \{n_k,\ k \in C\}$, но a не является пределом X относительно A. Это означает, что существует такое $\gamma_0 \in A$, для которого

$$(\forall \gamma \in A)(\exists s_\gamma \in A)\ s_\gamma \geq \gamma\ \&\ d(x_{s_\gamma}, a) \geq \frac{1}{\gamma_0}. \quad (3)$$

Ясно, что A-последовательность $s_\gamma,\ \gamma \in A$ можно без ограничения общности считать возрастающей, откуда, если $\mathbf{n}$ исчерпывающая, то $\mathbf{m} = \{m_k = s_{n_k},\ k \in C\}$ также является исчерпывающей. Но, в силу условия (3), a не может быть AC-пределом $\mathbf{x(m)}$, что противоречит его выбору, и первое утверждение полностью доказано.

Для обоснования второго утверждения рассмотрим монотонную A-последовательность $\mathbf{x}$. Достаточность следует из уже доказанного первого утверждения. Пусть a – AC-предел $\mathbf{x(n)}$ для какой-то из исчерпывающих последовательностей $\mathbf{n} = \{n_k,\ k \in C\}$. Если $\delta_\gamma \in C$ выбрано по $\gamma \in A$ в соответствии с (1), то при $k \in C$

$$k \geq \delta_\gamma \Rightarrow \max\{d(x_{n_k}, a), d(x_{n_{k+1}}, a)\} < \frac{1}{\gamma}.$$

Возьмем $n \in A, n \geq n_{\delta_\gamma}$. Тогда, в силу монотонности $\mathbf{x}$, согласованности метрики и порядка, последнего условия и того факта, что для какого-то $k \in C$ справедливо $n_k \leq n \leq n_{k+1}$, выполнено неравенство $d(x_n, a) < \frac{1}{\gamma}$, что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь в некотором смысле обратную процедуру. Пусть имеются два последовательных сегмента $C \subset A$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{n}$ – C-последовательность и исчерпывающая последовательность для A соответственно. Без ограничения общности полагая, что $n_0 = 0$, определим новую A-последовательность $\mathbf{x^n} = \{z_\gamma,\ \gamma \in A\}$ соотношением

$$z_\gamma = x_k, \quad n_k \leq k < n_{k+1}, \quad k \in C.$$

Теорема 3. $\mathbf{x^n}$ *имеет предел относительно сегмента A тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}$ *имеет AC-предел, причем два этих предела совпадают.*

Доказательство. Необходимость здесь сразу следует из теоремы 2, достаточно заметить, что $\mathbf{x^n}(\mathbf{n}) = \mathbf{x}$. Для получения достаточности из той же теоремы нужно проверить, что если для $\mathbf{x}$ имеет место (1), а $\mathbf{m} = \{m_k, k \in C\}$ – еще одна исчерпывающая последовательность для A, то $\mathbf{x^n}(\mathbf{m})$ имеет тот же AC-предел. Но эта последняя последовательность составлена из членов $\mathbf{x}$ – некоторые из них могут быть пропущены, а другие могут встречаться по нескольку раз подряд. Тем не менее для каждого $k \in C$ можно указать $t_k \in C$ такое, что все члены $\mathbf{x^n}(\mathbf{m})$ с номерами, большими t_k, имели в исходной последовательности $\mathbf{x}$ номера, большие k.

Осталось, зафиксировав $\gamma \in A$ и построив по нему δ_γ с помощью (1), выбрать $\delta \geq t_{\delta_\gamma}$. Тогда член последовательности $\mathbf{x^n}(\mathbf{m})$ с номером δ удален от предела исходной последовательности на расстояние, меньшее, чем $1/\gamma$, что и завершает доказательство.

До сих пор требование аддитивности сегментов выдвигалось скорее в качестве средства, облегчающего приводимые доказательства. В следующей теореме это свойство впервые действительно является необходимым, поскольку, как это показано в [4], без аддитивности основного сегмента свойство фундаментальных последовательностей иметь предел нарушается.

Теорема 4. *Пусть сегмент A аддитивен и C-исчерпываем. Тогда C-последовательность $x_k,\ k \in C$ имеет AC-предел тогда и только тогда, когда она AC-фундаментальна, т.е. для произвольного $\gamma \in A$ имеется такое $k_\gamma \in C$, что*

$$(\forall t, s \in C)\ \left(t, s \geq k_\gamma \Rightarrow d(x_t, x_s) < \frac{1}{\gamma}\right).$$

Доказательство. Необходимость в силу аддитивности A здесь очевидна – достаточно, чтобы x_t, x_s оба подошли к пределу на расстояние, меньшее $\frac{1}{2\gamma}$. Для доказательства достаточности построим A-последовательность $\mathbf{x^n}$, которая имеет предел относительно A в силу теоремы 1 в [4], и из теоремы 3 настоящей работы выведем из этого факта существование AC-предела $\mathbf{x}$.

Отметим, что доказанная теорема обобщает теорему 3 в [4].

3. Применение к теории меры. Изложенные выше соображения позволяют продолжить детальное изучение структуры семейства измеримых в рамках основного сегмента A классов, которое было начато в [5].

Пусть x – множество с количеством элементов $\beta \notin A$. Для подмножества $u \subset x$ его вероятность (мера) определяется, как обычно, равенством

$$P_A(u) \ = \ \frac{|u|}{\beta}\,,$$

где $|u|$ – количество элементов множества u. Если для класса $Y \subset x$ и произвольного $\gamma \in A$ может быть указана пара множеств $u_\gamma \subset Y \subset v_\gamma$ так, что A-последовательность $\mathbf{u}$ не убывает, а $\mathbf{v}$ не возрастает по включению, а также

$$\lim_{\gamma \in A} P_A(u_\gamma) = \lim_{\gamma \in A} P_A(v_\gamma) = p,$$

то Y объявляется элементом семейства измеримых классов $\mathcal{B}(A)$. Число p называют вероятностью класса Y и обозначают $P_A(Y)$.

Рассмотрим вновь пару сегментов $C \subset A$, где A аддитивен, и набор измеримых классов $\{Y_\alpha,\ \alpha \in C\} \subset \mathcal{B}(A)$, монотонно возрастающий по включению. Положим $Y = \cup\{Y_\alpha,\ \alpha \in C\}$.

Теорема 5. *Если Y является измеримым, то определен AC-предел C-последовательности $P_A(Y_\alpha),\ \alpha \in C$. Если дополнительно сегмент A окажется C-исчерпываемым, то верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Если рассматриваемый набор классов стабилизируется, т.е.

$$(\exists s \in C)(\forall \alpha \in C)\ (\alpha \geq s \Rightarrow Y_\alpha = Y_s),$$

то утверждение теоремы тривиально. Будем считать, что $Y_\alpha,\ \alpha \in C$ строго возрастает.

Пусть определена вероятность $p = P_A(Y)$. Выберем A-последовательности множеств $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ согласно этому определению. Тогда можно считать, что

$$(\forall \gamma \in A)\ p - \frac{1}{\gamma} \leq P_A(u_\gamma) \leq P_A(v_\gamma) \leq p + \frac{1}{\gamma}. \quad (4)$$

Если бы при каком-то $\gamma \in A$ и всех α было бы выполнено включение $Y_\alpha \subset u_\gamma$, то оказалось бы, что $Y \subset u_\gamma$, что не так. Поэтому

$$(\forall \gamma \in A)(\exists \alpha_\gamma \in C)\ Y_{\alpha_\gamma} \supset u_\gamma.$$

С учетом того факта, что при произвольных α $Y_\alpha \subset Y$, из обычных свойств вероятностей классов, обоснованных в [5], выводим, что $P_A(u_\gamma) \leq$

$\le P_A(Y) \le p$. Если же учтем (4), то получим

$$p - \frac{1}{\gamma} \le P_A(Y_\alpha) \le p, \quad \alpha = \alpha_\gamma.$$

При увеличении α левое неравенство здесь лишь усиливается, а правое остается справедливым, откуда p действительно является AC-пределом для $P_A(Y_\alpha)$, $\alpha \in C$.

Для доказательства обратного утверждения нам понадобится следующий факт.

Лемма 2. *Рассмотрим пару сегментов $C \subset A$, в которой больший (A) аддитивен. Пусть $\mathbf{x}$ – возрастающая, $\mathbf{y}$ – убывающая C-последовательности элементов $\mathbf{Q}$ с естественной метрикой $d(x,y) = |x-y|$, причем для каждого $\gamma \in A$ имеется $k_\gamma \in C$ такое, что*

$$(\forall k \in C)\ \left(k \ge k_\gamma \Rightarrow y_k - x_k \le \frac{1}{\gamma}\right),$$

а также $x_k \le y_k$, $k \in C$. Тогда обе $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ имеют AC-пределы, которые равны между собой.

Доказательство. Сначала заметим, что при всех $s, t \in C$

$$x_s \le x_{\max\{t,s\}} \le y_{\max\{t,s\}} \le y_t. \tag{5}$$

Покажем, что $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ обе AC-фундаментальны. Действительно, по $\gamma \in A$ определим k_γ согласно условию леммы. Тогда при $t \ge s \ge k_\gamma$ из (5) получается

$$x_t - x_s \le y_{k_\gamma} - x_s \le y_{k_\gamma} - x_{k_\gamma} \le \frac{1}{\gamma}.$$

Понятно, что такие же выкладки можно проделать и для $\mathbf{y}$. Итак, нужные пределы x и y существуют по теореме 4. Осталось заметить, что при $k \ge k_\gamma$ $|x_k - y| \le |x_k - y_k| \le \frac{1}{\gamma}$, а значит, в качестве x мог быть взят y. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $p = A\text{-}\lim_{\alpha \in C} P_A(Y_\alpha)$. Изучим сначала такой случай, когда все элементы рассматриваемого набора являются множествами: $Y_\alpha = y_\alpha$, $\alpha \in C$. Для $\gamma \in A$ укажем способ построения множеств u_γ, v_γ таких, чтобы $u_\gamma \subset Y \subset v_\gamma$ и было бы выполнено

$$p - \frac{1}{2\gamma} \le P_A(u_\gamma) \le P_A(v_\gamma) \le p + \frac{1}{2\gamma}\,.$$

Ясно, что в нашем случае неравенство $P_A(y_\alpha) \le p + \frac{1}{2\gamma}$ выполнено при всех $\alpha \in C$, следовательно, мы можем продолжить нашу последовательность множеств за горизонт C с сохранением его и условия $y_\alpha \subset y_{\alpha+1}$. Это означает, что существует такое натуральное число $\delta_\gamma \notin C$, для которого $P_A(y_{\delta_\gamma}) \le p + \frac{1}{2\gamma}$. При этом поскольку при всех $\alpha \in A$ $y_\alpha \subset y_{\delta_\gamma}$, то и Y тоже в нем содержится. В силу определения AC-предела может быть найдено такое $\alpha_\gamma \in C$, что $P_A(y_{\alpha_\gamma}) \ge p - \frac{1}{2\gamma}$. Осталось только выбрать

$$u_\gamma = y_{\alpha_\gamma}, \quad v_\gamma = y_{\delta_\gamma},$$

и требуемое доказано в силу леммы 2.

Рассмотрим общий случай. Пусть последовательность n_α, $\alpha \in C$ исчерпывает A. Тогда

$$(\forall s \in A)(\exists \alpha(s) \in C)(\forall \alpha \in C)\ (\alpha \ge \alpha(s) \Rightarrow n_\alpha \ge s).$$

В силу измеримости любого из Y_α, зафиксировав $s \in A$, мы можем для каждого $\alpha \in C$ указать множества с условием $u^\alpha \subset Y_\alpha \subset v^\alpha$ так, чтобы

$$P_A(v^\alpha) - P_A(u^\alpha) < \frac{1}{2n_\alpha}\,.$$

Тогда при $\alpha \ge \alpha(s)$, $\alpha \in C$ разность этих вероятностей будет меньше, чем $1/(2s)$. Отсюда вытекает, что при достаточно больших $\alpha \in C$ справедлива цепочка неравенств

$$\begin{gathered} 0 \le p - P_A(u^\alpha) = P_A(Y_\alpha) - P_A(u^\alpha) + p - \\ - P_A(Y_\alpha) \le P_A(v^\alpha) - P_A(u^\alpha) + p - P_A(Y_\alpha) < \tfrac{1}{s}. \end{gathered}$$

Аналогичная выкладка может быть проделана для $P_A(v^\alpha)$. Итак, обе C-последовательности этих вероятностей имеют AC-пределы, причем оба они равны p.

Из рассмотренного выше случая объединения множеств выводим, что классы

$$Z = \cup\{u^\alpha, \alpha \in C\},\ W = \cup\{v^\alpha, \alpha \in C\}$$

измеримы, $P_A(Z) = P_A(W)$, и Y содержится между ними. Возьмем $\gamma \in A$. Могут быть построены множества $u_\gamma^Z, v_\gamma^Z, u_\gamma^W, v_\gamma^W$ с системой условий

$$\begin{gathered} u_\gamma^Z \subset Z \subset v_\gamma^Z, \quad u_\gamma^W \subset W \subset v_\gamma^W, \\ P_A(v_\gamma^Z) - P_A(u_\gamma^Z) < \tfrac{1}{2\gamma}, \\ P_A(v_\gamma^W) - P_A(u_\gamma^W) < \tfrac{1}{2\gamma}. \end{gathered} \tag{6}$$

При этом из (6) немедленно извлекаем, что

$$\begin{gathered} P_A(v_\gamma^W) - P_A(u_\gamma^Z) = P_A(v_\gamma^W) - P_A(W) + \\ + P_A(Z) - P_A(u_\gamma^Z) < \tfrac{1}{\gamma}, \end{gathered}$$

а это означает возможность разместить класс Y между требуемыми множествами, и полное доказательство теоремы завершается ссылкой на лемму 2. Из приведенного доказательства вытекает также следующее.

Следствие. *Если все Y_α, $\alpha \in C$ являются множествами, то требование исчерпываемости A с помощью C излишне.*

4. Некоторые выводы. Из полученных выше результатов можно сделать выводы о замкнутости семейства измеримых классов $\mathcal{B}(A)$ относительно объединений своих элементов. При этом проблемы, связанные с построением примеров к соответствующим утверждениям, снимаются с помощью следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $C \subset A$ – сегменты, причем либо A мультипликативен либо он лишь аддитивен, но не является C-исчерпываемым, а некоторая C-последовательность* $\mathbf{x}$ *задана соотношением*

$$x_k = \frac{t_k}{\delta_k}, \quad t_k \in C, \ \delta_k \notin C, \ k \in C.$$

Тогда может быть построено семейство $a_k, \ k \in C$ подмножеств x ($|x| = \beta \notin A$) такое, что

$$(\forall \gamma \in A) \ |P_A(a_k) - x_k| \leq \frac{1}{\gamma},$$

а следовательно, AC-пределы $\mathbf{x}$ *и $P_A(a_k), \ k \in C$ существуют или нет одновременно.*

Доказательство. Для каждого $k \in C$ выберем натуральное число s_k таким образом, чтобы $s_k\delta_k \leq \beta < (s_k + 1)\delta_k$. Тогда

$$(\forall k \in C) \quad \left| x_k - \frac{s_k t_k}{\beta} \right| \leq \frac{t_k}{\beta}.$$

Если A мультипликативен, то из условий $t_k, \gamma \in A, \ \beta \notin A$ получаем $\gamma t_k < \beta$. Если же A не является C-исчерпываемым, то, поскольку $\gamma t, t \in C$ не исчерпывает его, найдется такое $\alpha \in A$, что $\gamma t_k < \alpha < \beta$.

Итак, во всех вариантах обосновано

$$(\forall \gamma \in A) \quad \left| \frac{s_k t_k}{\beta} - x_k \right| \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Осталось построить множества a_k из элементов x так, чтобы $|a_k| = s_k t_k$. Такое построение всегда возможно, поскольку $t_k \in C, \ \delta_k \notin C$, а следовательно, $s_k t_k < s_k \delta_k \leq \beta$. Лемма доказана.

Рассмотрим, наконец, возможные ситуации, возникающие при попытке объединить семейство измеримых классов, индексированное при помощи некоторого сегмента $C \subset A$.

Прежде всего в [5] показано, что если C не является последовательным (или, что то же, является натуральным числом), такое объединение всегда измеримо. Если A не является C-исчерпываемым, то для построения примера семейства, объединение которого не лежит в $\mathcal{B}(A)$, достаточно взять произвольную C-последовательность, которая не A-стабилизируется, например

$$x_k = \frac{k}{s}, \quad k \in C, \ s \in A \setminus C$$

и обратиться к лемме 3.

Пусть теперь A является C-исчерпываемым. Если при этом A парафундаментален в терминах [4], т.е. любая монотонная и ограниченная последовательность имеет относительно него предел, то любое объединение изучаемого вида будет измеримым. Действительно, если $\mathbf{p} = \{p_k, \ k \in C\}$ – последовательность вероятностей классов семейства, $\mathbf{n}$ – исчерпывающая последовательность, то $\mathbf{p^n}$ имеет предел относительно A, а следовательно, по теореме 3, $\mathbf{p}$ имеет AC-предел, и осталось сослаться на теорему 5.

К сожалению, как это было показано в [4], парафундаментальные сегменты довольно редки. Если A не является таким, то объединение измеримых классов не обязано быть измеримым. Действительно, возьмем любую монотонно возрастающую ограниченную A-последовательность в классе рациональных чисел $\mathbf{Q}$, не имеющую предела, нормируем ее к интервалу $[0, 1]$ и, обозначив результат $\mathbf{x}$, применим лемму 2 к $\mathbf{x(n)}$ для какой-то исчерпывающей $\mathbf{n}$. При этом $\mathbf{x(n)}$ не может иметь AC-предела согласно теореме 2, а следовательно, объединение построенных множеств не измеримо по теореме 5.

Итак, семейство измеримых классов $\mathcal{B}(A)$ замкнуто относительно объединений произвольных своих подсемейств тогда и только тогда, когда основной сегмент A парафундаментален и исчерпывается каждым из своих последовательных подсегментов. Иные способы характеризовать такие сегменты будут исследованы в одной из следующих работ автора. Отметим лишь, что, в силу исчерпываемости A своим подсегментом $\mathbf{FN}$, он обязан являться σ-сегментом.

Библиографический список

1. Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. – Новосибирск, 2004.

2. Дронов С.В. Элементы прикладной альтернативной теории множеств. Новый подход к понятию предела. – LAP Lambert Academic Publishing, 2012.

3. Дронов С.В. О четких продолжениях последовательностей // Известия АлтГУ. – 1999. – №1.

4. Дронов С.В. О свойстве фундаментальности сегментов класса натуральных чисел // Известия АлтГУ. – 2009. – №1 (61).

5. Дронов С.В. Об одном пополнении класса событий в AST // Известия АлтГУ. – 2010. – №1 (65).