УДК 536.25

О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова

Моделирование двухслойных течений с учетом испарения на границе раздела на основе точных решений (часть 1)*

O.N. Goncharova, E.V. Rezanova

Modeling of the Two-layer Flows by Evaporation on the Basis of the Exact Solutions (part 1)

В работе изучаются двухслойные течения с учетом испарения на границе раздела. Построены точные решения стационарной задачи. При этом на твердых границах заданы условия прилипания, температура, соотношение для концентрации пара на верхней границе. На недеформируемой термокапиллярной границе раздела выполняются кинематическое, динамическое условия, непрерывность скорости и температуры, условия теплопереноса, баланса массы и соотношение для концентрации насыщенного пара.

Ключевые слова: конвекция в жидкости, термокапиллярная граница раздела, испарение с границы раздела, условия на границе раздела, точные решения.

Two-layer flows with evaporation at interface are studied. Exact solutions of a stationary problem are constructed. At fixed boundaries the no-slip conditions, temperature, a condition for vapor concentration on the upper fixed boundary are given. Following conditions are fulfilled at thermocapillary non-deformable interface: kinematic and dynamic conditions, continuity of velocity and temperature, mass balance and heat transfer relations and a relation for saturated vapor concentration.

Key words: convection in a fluid, thermocapillary interface, evaporation through the interface, interface conditions, exact solutions.

Введение. Исследование различных аспектов течений жидких слоев и процессов тепло- и массопереноса в них является сложной и актуальной задачей. Интерес к подобным проблемам возрос в связи с проведением новых экспериментов на Земле и в космосе. Необходимость предсказания поведения жидкостей в условиях гравитационных полей различной интенсивности привела к изучению процессов конвекции, тепло- и массопереноса в двухслойных системах в случае, когда данные процессы сопровождаются испарением с границы раздела. Один из первых результатов построения примеров точных решений в задаче о двухслойных течениях с учетом испарения опубликован в [1], где граница раздела не предполагается термокапиллярной. В [1] изучается задача о стационарной конвекции в двухслойной бинарной системе с испарением с учетом влияния концентрационных и температурных эффектов на процесс. Там же получены зависимости количества жидкости, испаряющейся через границу раздела, и концентрации жидкости на этой границе от горизонтального градиента температуры. В [2,3] построены примеры точных решений задачи о двухслойном течении жидкости и газа в полной постановке. При этом испарение явно не учитывается, но моделируется с помощью подходящих условий для температуры на границе раздела. Построенные в этих работах решения могут быть названы обобщением известного решения о конвекции в горизонтальном слое со свободной границей [4].

В настоящей статье изучается стационарная задача конвекции в двухслойной системе жидкостей с границей раздела в условиях действия продольного градиента температуры. В качестве математической модели используются уравнения Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска [5]. В верхнем слое, представляющем собой смесь газа и паров жидкости, изучается процесс диффузии газа и учитывается эффект Дюфура. На верхней и нижней твердых границах выполняются условия прилипания, условия для температуры и концентрации. При этом распределение температуры полагается заданным в виде линейной относительно продольной координаты зависимости. Для концентрации пара рассматриваются два условия на верхней твердой границе: равенство нулю потока пара или отсутствие паров жидкости. На термокапиллярной границе раздела должны быть выполнены кинематическое

*Работа выполнена в рамках проекта №7.3975.2011 (поддержан Министерством образования и науки РФ) и при поддержке РФФИ (грант 10-01-00007).

и динамическое условия, условия непрерывности скорости и температуры, условия переноса тепла и массы через границу раздела, а также соотношение, определяющее концентрацию насыщенного пара. Постановка задачи в случае недеформируемой границы раздела дополняется заданием условия замкнутости потоков.

1. Постановка задачи. Построение точных решений. Система уравнений для нахождения компонент скорости, давления, температуры жидкостей, заполняющих как нижний, так и верхний слой, а также концентрации пара (пассивной примеси) в верхнем слое записывается в стационарном случае в следующем виде [5]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}+\nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}+\nu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})+g(\beta T+\gamma C), \qquad (2)$$

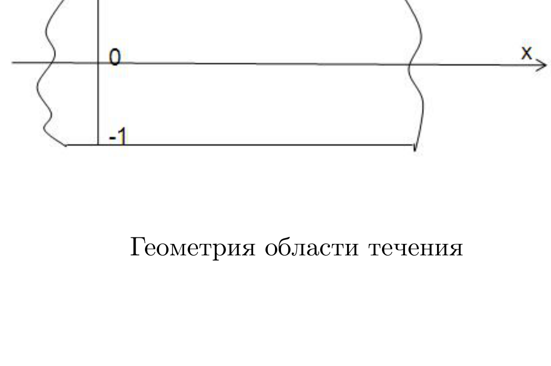
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad (3)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\chi(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\delta(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2})), \qquad (4)$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=D(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}). \qquad (5)$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости на оси Ox и Oy декартовой системы координат; p' — модифицированное давление (отклонение от гидростатического), задается выражением $p'=p-\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$; p — давление; T — температура; C — концентрация; ρ — плотность; ν — коэффициент кинематической вязкости; χ — коэффициент температуропроводности; D — коэффициент диффузии пара; β — коэффициент теплового расширения; γ — концентрационный коэффициент плотности; коэффициент δ характеризует эффект Дюфура.

Пусть система координат выбрана таким образом, что вектор силы тяжести направлен противоположно оси Oy. На рисунке изображена система двух бесконечных горизонтальных слоев вязких несжимаемых жидкостей с твердыми верхней и нижней границами $y=h$, $y=-1$ и границей раздела $y=0$.



Геометрия области течения

В рассматриваемой задаче процессы динамики и теплообмена в нижней жидкости описываются уравнениями (1)–(4) без учета эффекта термодиффузии и с правой частью в уравнении (2) вида $g\beta T$. Процессы динамики, теплообмена и диффузии пара в верхнем слое описываются уравнениями (1)–(5) с учетом эффекта Дюфура.

Пусть решение системы (1)–(4) для нижней жидкости и (1)–(5) для верхней жидкости имеет вид:

$$u_i=u_i(y),\ \ v_i=0,\ \ C=(b_1+b_2y)x+\phi_i(y), \qquad (6)$$

$$T_i=(A+a_2^iy)x+\vartheta_i(y),\ i=1,2. \qquad (7)$$

Здесь a_2^i и b_i — постоянные, определяемые с помощью граничных условий, $i=1,2$. Искомые функции или параметры, имеющие индекс $i=1$ характеризуют нижний слой, а индекс $i=2$ — верхний слой.

В ходе решения задачи (1)–(5) с учетом формул (6), (7) получаются следующие соотношения, определяющие скорость нижней жидкости, ее температуру и давление:

$$u_1=\frac{g}{\nu_1}\beta_1(a_2^1\frac{y^4}{24}+A\frac{y^3}{6})+c_1\frac{y^2}{2}+c_2y+c_3, \qquad (8)$$

$$T_1=(A+a_2^1y)x+\frac{y^7}{42}\{\frac{ga_2^1}{24\nu_1\chi_1}\beta_1a_2^1\}+ \qquad (9)$$
$$+\frac{y^6}{30}\{\frac{gA}{24\nu_1\chi_1}\beta_1a_2^1+\frac{ga_2^1}{6\nu_1\chi_1}\beta_1A\}+$$
$$+\frac{y^5}{20}\{\frac{gA}{6\nu_1\chi_1}\beta_1A+\frac{c_1a_2^1}{2\chi_1}\}+\frac{y^4}{12}\{\frac{c_1A}{2\chi_1}+\frac{c_2a_2^1}{\chi_1}\}+$$
$$\frac{y^3}{6}\{\frac{c_2A}{\chi_1}+\frac{c_3a_2^1}{\chi_1}\}+\frac{y^2}{2}\frac{c_3A}{\chi_1}+y\,c_4+c_5,$$

$$p_1'=\rho_1\nu_1(\frac{g}{\nu_1}\beta_1(Ay+a_2^1\frac{y^2}{2})+c_1)x+\frac{y^8}{8}k_7+ \qquad (10)$$
$$+\frac{y^7}{7}k_6+\frac{y^6}{6}k_5+\frac{y^5}{5}k_4+\frac{y^4}{4}k_3+\frac{y^3}{3}k_2+\frac{y^2}{2}k_1+yk_0+\widetilde{c_3}.$$

Имеют место следующие соотношения, определяющие продольную скорость, давление, температуру и концентрацию пара в верхнем слое:

$$u_2=\frac{g}{\nu_2}\{\frac{y^3}{6}(\beta_2A+\gamma b_1)+\frac{y^4}{24}(\beta_2a_2^2+\gamma b_2)\}+ \qquad (11)$$
$$+\overline{c}_1\frac{y^2}{2}+\overline{c}_2y+\overline{c}_3,$$

$$p_2'=\rho_2\nu_2(\frac{g}{\nu_2}\{\beta_2(Ay+a_2^2\frac{y^2}{2})+\gamma(b_1y+b_2\frac{y^2}{2})\}\overline{c}_1)x+ \qquad (12)$$
$$+\frac{y^8}{8}\overline{k}_7+\frac{y^7}{7}\overline{k}_6+\frac{y^6}{6}\overline{k}_5+\frac{y^5}{5}\overline{k}_4+\frac{y^4}{4}\overline{k}_3+\frac{y^3}{3}\overline{k}_2+$$
$$+\frac{y^2}{2}\overline{k}_1+y\overline{k}_0+\widetilde{c_4},$$

$$T_2=(A+a_2^2y)x+\frac{y^7}{1008}\Big[\frac{ga_2^2}{\chi_2\nu_2}(\beta_2a_2^2+\gamma b_2)- \qquad (13)$$
$$-\delta\frac{b_2}{D_2}(\frac{g\beta_2a_2^2}{\nu_2}+\frac{g\gamma b_2}{\nu_2})\Big]+$$
$$+\frac{y^6}{720}\Big[\frac{gA}{\chi_2\nu_2}(\beta_2a_2^2+\gamma b_2)+\frac{ga_2^2}{4\chi_2\nu_2}(\beta_2A+\gamma b_1)-$$
$$-\delta(\frac{b_1}{D}(\frac{g\beta_2a_2^2}{\nu_2}+\frac{g\gamma b_2}{\nu_2})+4\frac{b_2}{D}(\frac{g\beta_2A}{\nu_2}+\frac{g\gamma b_1}{\nu_2}))\Big]+$$

$$+\frac{y^5}{120}\Big[\frac{gA}{\chi_2\nu_2}(\beta_2A+\gamma b_1)+\frac{ga_2^2\bar{c}_1}{3\chi_2\nu_2}-\delta(\frac{b_1}{D}(\frac{g\beta_2A}{\nu_2}+ +\frac{g\gamma b_1}{\nu_2})+\frac{b_2}{D}3\bar{c}_1)\Big]+\frac{y^4}{24}\Big[\frac{gA\bar{c}_1}{\chi_2\nu_2}+\frac{gA\bar{c}_2}{2\chi_2\nu_2}-\delta(\bar{c}_1\frac{b_1^2}{D}+ +2\bar{c}_2\frac{b_2}{D})\Big]+\frac{y^3}{6}\Big[\frac{g(A\bar{c}_2+a_2^2\bar{c}_3)}{\chi_2\nu_2}-\delta(\bar{c}_2\frac{b_1}{D}+\bar{c}_3\frac{b_2}{D})\Big]+ +\frac{y^2}{2}\Big[\frac{gA\bar{c}_3}{\chi_2\nu_2}-\delta\bar{c}_3\frac{b_1}{D}\Big]+y\bar{c}_4+\bar{c}_5,$$

$$C=(b_1+b_2y)x+\frac{y^7}{1008}\Big[\frac{b_2}{D}(\frac{g\beta_2a_2^2}{\nu_2}+\frac{g\gamma b_2}{\nu_2})\Big]+ \quad (14)$$

$$+\frac{y^6}{720}\Big[\frac{b_1}{D}(\frac{g\beta_2a_2^2}{\nu_2}+\frac{g\gamma b_2}{\nu_2})+4\frac{b_2}{D}(\frac{g\beta_2A}{\nu_2}+\frac{g\gamma b_1}{\nu_2})\Big]+ +\frac{y^5}{120}\Big[\frac{b_1}{D}(\frac{g\beta_2A}{\nu_2}+\frac{g\gamma b_1}{\nu_2})+\frac{b_2}{D}3\bar{c}_1\Big]+\frac{y^4}{24}\Big[\bar{c}_1\frac{b_1}{D}+2\bar{c}_2\frac{b_2}{D}\Big] +\frac{y^3}{6}\Big[\bar{c}_2\frac{b_1^2}{D}+\bar{c}_3\frac{b_2}{D}\Big]+\frac{y^2}{2}\bar{c}_3\frac{b_1}{D}+\bar{c}_6y+\bar{c}_7.$$

Отметим, что в формулах (10) и (12) $p_1'=p_1+\rho gy$, $p_2'=p_2+\rho gy$.

Таким образом, согласно выражениям (8)–(14), находятся все искомые функции. Константы интегрирования должны быть определены с помощью граничных условий задачи.

2. Формулировка граничных условий. На верхней $y=h$ и нижней $y=-1$ твердых непроницаемых границах должны быть выполнены условия прилипания: $u_2(h)=0,\ \ u_1(-1)=0$. Пусть на твердых границах температура распределена линейно относительно продольной координаты: $T_{1\,|\,y=-1}=A_1x+\vartheta^-$, $T_{2\,|\,y=h}=A_2x+\vartheta^+$. Полагая A, $A_1=A+a_2^1(-1)$, $A_2=A+a_2^2h$ заданными константами, находим a_2^1, a_2^2. Заданные параметры ϑ^- и ϑ^+ определят поперечный перепад температуры. Условие для концентрации пара в газовой среде будем использовать в двух вариантах. В первом случае полагаем, что отсутствует поток пара на верхней границе: $\frac{\partial C}{\partial y}|_{y=h}=0$. Второй вариант состоит в предположении, что концентрация пара на верхней границе равна нулю [1]: $C|_{y=h}=0$. На границе раздела сред выполняются условия непрерывности скорости и температуры: $u_1(0)=u_2(0)$, $T_1|_{y=0}=T_2|_{y=0}$. Распределение температуры также удовлетворяет условию теплопереноса: $\kappa_1\frac{\partial T_1}{\partial y}-\kappa_2\frac{\partial T_2}{\partial y}-\delta D\frac{\partial C}{\partial y}|_{y=0}=-\lambda M_0$. Здесь λ — теплота испарения, а M_0 — масса жидкости, испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени, κ_1 и κ_2 — коэффициенты теплопроводности. Уравнение баланса масс на границе раздела имеет следующий вид: $M_0=-D\rho_2\frac{\partial C}{\partial y}|_{y=0}$. Концентрация насыщенного пара находится с помощью уравнения Клапейрона-Клаузиуса [1]. Для не слишком больших значений T_2 может быть использовано линеаризованное уравнение: $C|_{y=0}=C_*[1+\varepsilon T_2|_{y=0}]$, $\varepsilon=\frac{\lambda\mu}{RT_0^2}$. Здесь C_* — концентрация насыщения пара при $T_2=0$; μ — молекулярный вес испаряющейся жидкости; R — газовая постоянная; T_0 — температура, принятая за начало отсчета (например, $20\,^0$C). На границе раздела двух сред должны выполняться кинематическое и динамическое условия. Кинематическое условие выполняется автоматически, исходя из вида функции скорости (см. (6)). Проекция динамического условия на касательный вектор записывается следующим образом: $\rho_1\nu_1u_{1\,y}=\rho_2\nu_2u_{2\,y}+\sigma_T\frac{\partial T_2}{\partial x}$, где σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения σ. В случае линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры имеем: $\sigma=\sigma_0+\sigma_T(T-T_0)$, где $\sigma_T<0$ (нормальный термокапиллярный эффект). Предположение о недеформируемой границе раздела диктует использование дополнительного условия замкнутости потоков (см.: [1, 5]). С помощью заданных сформулированных условий определяются все константы c_i, $\overline{c_i}$, M_0 $(i=1,...,5)$ для нахождения профилей скорости и температуры для обеих сред и концентрации пара в газе (см. (8), (9), (11), (13), (14)).

Заключение. Построенные точные решения описывают стационарные двухслойные течения жидкости и газа с учетом испарения жидкости на границе раздела. При этом граница раздела предполагается недеформируемой термокапиллярной поверхностью.

Библиографический список

1. Шлиомис М.И., Якушин В.И. К вопросу о граничных условиях на поверхности раздела двух жидкостей // Гидродинамика. — 1972. — № 4.

2. Гончарова О.Н., Кабов О.А. Гравитационно-термокапиллярная конвекция жидкости в горизонтальном слое при спутном потоке газа // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 426, №2.

3. Goncharova O.N., Kabov O.A. Mathematical and numerical modeling of convection in a horizontal layer under co-current gas flow // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. — 2010. — Vol. 53.

4. Бирих Р.В О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. — 1966. — № 3.

5. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. — М., 2008.