

*О.Н. Гончарова, О.А. Кондратенко*

**Численное моделирование переноса тепла в свободном слое жидкости на основе точных решений уравнений Навье-Стокса\***

*O.N. Goncharova, O.A. Kondratenko*

**Numerical Modeling of a Heat Transfer in a Free Liquid Layer on the Basis of the Exact Solutions of the Navier-Stokes Equations**

Нестационарные течения жидкости в свободном слое исследуются аналитически и численно в условиях невесомости. Моделирование течений и деформации слоя, вызываемых неоднородностью температуры и дополнительными касательными напряжениями на свободных границах, проводится на основе точных решений уравнений Навье-Стокса. Решения в двумерном случае характеризуются линейной зависимостью продольной компоненты скорости от продольной координаты. Построены численные алгоритмы для нахождения поля скоростей, положения свободных границ и распределения температуры.

**Ключевые слова:** нестационарные течения, термокапиллярные силы, свободные границы, касательные напряжения, точное решение, численное решение.

**Введение.** Задачи о нестационарном течении жидкости в областях со свободными (неизвестными) границами сложны для исследований. В случае, когда внешний поток газа является источником дополнительных касательных напряжений на свободной поверхности жидкости, а также может вызывать испарение с поверхности, необходимы тщательные исследования взаимодействия различных механизмов движения жидкости [1, 2]. Изучению неустановившихся течений плоских слоев со свободными границами посвящены работы [3–8] (см. также литературу, цитированную в [5, 8]). В [4] изучено точное решение для нестационарного плоского слоя идеальной жидкости со свободными границами, уточняющегося со временем, проанализирована его устойчивость относительно малых возмущений, дана физическая интерпретация решения. Групповая природа подобных решений исследована в [9]. В [5, 8] представле-

Non-stationary fluid flows in a free layer are investigated analytically and numerically under conditions of weightlessness. A special class of solutions of the Navier-Stokes equations is used to model the flows and layer deformations caused by inhomogeneous temperature distributions and additional tangential stresses acting on the free boundaries. Two-dimensional solutions are characterized by a linear dependence of the longitudinal component of velocity on longitudinal coordinate. Numerical algorithms are constructed in order to find the velocity field, position of free boundaries and temperature distribution.

**Key words:** non-stationary flows, thermocapillary forces, free boundaries, tangential stresses, exact solution, numerical solution.

ны математические модели, описывающие деформацию вязкого слоя жидкости термокапиллярными силами, как в плоском, так и в трехмерном случае, исследована также разрешимость начально-краевых задач. Точные решения, построенные в [5, 7, 8], представляют собой частично инвариантные решения системы уравнений Навье-Стокса в бесконечных слоях со свободными поверхностями. При этом температура, заданная на свободных границах слоя, должна представлять собой квадратичную зависимость от продольных координат, а свободные поверхности должны оставаться параллельными плоскостями во все моменты времени. Поле скоростей, а затем и давления может быть найдено с помощью вспомогательной функции, зависящей от времени и поперечной координаты, задача для которой сводится к решению интегро-дифференциального уравнения.

В случае, когда касательными напряжениями на свободной поверхности со стороны внешней среды не удастся пренебречь, требуется учесть их влияние, способное вызвать изменение характера деформации слоя (его растекание или разбухание). Нестационарная двумерная задача динами-

\*Работа выполнена в рамках проекта №7.3975.2011 (поддержан Министерством образования и науки РФ) и при поддержке РФФИ (грант 10-01-00007) и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт 14.740.11.0355).

ки теплопроводного слоя вязкой жидкости изучена в [2, 10]. При этом действие дополнительных касательных напряжений со стороны внешней среды моделируется с помощью функции, зависящей от времени и продольных координат. В [2, 10] численно исследуются условия растекания и разбухания слоя, возможные механизмы контроля деформации слоя с учетом нормального [2] и аномального [10] характера термокапиллярного эффекта. В работе [11] построен пример простейшего аналитического решения уравнений Навье-Стокса и теплопроводности, описывающего динамику слоя и процесс переноса тепла в нем при условии согласования дополнительных касательных напряжений с граничным температурным режимом.

В настоящей работе моделирование течений жидкости, вызываемых термокапиллярными силами и дополнительными касательными напряжениями на свободных границах, проводится на основе точных решений уравнений Навье-Стокса [2, 5, 7, 8, 10] (см. также: [12]). Данные решения характеризуются в двумерном случае линейной зависимостью продольной компоненты скорости от продольной координаты. Для нахождения поля скоростей и распределения температуры в слое с движущимися границами построены численные алгоритмы. Для численного моделирования распределения температуры в бесконечном слое предлагается численный алгоритм расчета, построенный на основе продольно-поперечной конечно-разностной схемы. Представлены различные типы граничных условий для температуры на искусственно вводимых торцах длинного прямоугольника.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечный плоскопараллельный слой вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости  $\Omega = \{(x, z): -\infty < x < +\infty, -Z(t) < z < Z(t)\}$  в условиях невесомости в двумерном случае. Пусть система координат выбрана таким образом, что ось  $Ox$  направлена вдоль свободных поверхностей, а ось  $Oz$  – перпендикулярно к ним. Свободные границы остаются недеформируемыми и параллельными во все последующие моменты времени.

Искомые функции удовлетворяют системе уравнений Навье-Стокса и переноса тепла и следующим условиям на свободных границах:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = w|_{z=\pm Z(t)} = \frac{dZ}{dt}, \quad (1)$$

$$-p + \frac{2}{Re} \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)} = -P_g, \quad (2)$$

$$2\mathbf{s} \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)} = \tau(x, t) - \frac{Ma}{RePr} T_x. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – вектор скорости ( $\mathbf{v} = (u, w)$ );  $p$  – давление;  $T$  – температура;  $D(\mathbf{v})$  – тензор скоростей деформации;  $P_g$  зависит от внешнего давления  $\overline{P}_g$

( $P_g = \overline{P}_g - \frac{2}{Re} \overline{\rho\nu} \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}_g)\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)}$ );  $\tau(x, t)$  – касательные напряжения, индуцируемые внешней средой. Предполагаем, что именно касательные напряжения со стороны внешней среды являются преобладающими в сравнении с нормальными напряжениями, действиями которых мы пренебрегаем.  $Re$  – число Рейнольдса ( $Re = \frac{v_* l}{\nu}$ );  $Pr$  – число Прандтля ( $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ );  $Ma$  – число Марангони ( $Ma = \frac{\sigma_T T_* l}{\rho\nu\chi}$ );  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\chi$  – коэффициент температуропроводности;  $l$  – характерный размер (например, толщина слоя в момент времени  $t = 0$ );  $v_*$  – характерная скорость;  $t_* = \frac{l}{v_*}$  – характерное время;  $T_*$  – характерная температура;  $p_* = \rho v_*^2$  – характерное давление;  $\rho$  – плотность;  $\overline{\rho}, \overline{\nu}$  – отношения плотностей и коэффициентов кинематической вязкости газа и жидкости;  $v_g$  – скорость газа (внешней среды). Пусть поверхностное натяжение линейно зависит от температуры:  $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$ ,  $\sigma_T > 0$ . Векторы нормали и касательный вектор к свободной поверхности в двумерном случае задаются как  $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$ ,  $\mathbf{s} = (1, 0)$ .

Предполагается в дальнейшем, что на свободных границах температура и касательные напряжения есть заданные функции времени и продольных координат. Условия для температуры на границе должны быть дополнены условиями на бесконечности. Для замыкания постановки задачи также должны быть определены начальные условия.

**2. Построение решения двумерной задачи.** Систему уравнений Навье-Стокса и уравнение теплопроводности запишем в следующем виде:

$$u_t + uu_x + wu_z = -p_x + \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{zz}),$$

$$w_t + ww_x + ww_z = -p_z + \frac{1}{Re}(w_{xx} + w_{zz}),$$

$$u_x + w_z = 0, \quad T_t + uT_x + wT_z = \frac{1}{RePr}(T_{xx} + T_{zz}). \quad (4)$$

Действие термокапиллярных сил и сопутствующих потоков газа на свободных границах будет задано с помощью функций  $T_x(x, t)$  и  $\tau(x, t)$  (см. (3)). Характер зависимости будет установлен с помощью решений уравнений Навье-Стокса специального вида. Пусть решение, которое определяет динамику слоя  $\Omega$  ( $0 < t < t_{end}$ ), имеет вид [2, 8]:

$$u(x, z, t) = f(t, z)x, \quad w(x, z, t) = - \int_0^z f(t, \alpha) d\alpha. \quad (5)$$

С известной функцией  $f(t, z)$  давление жидкости также может быть найдено из следующей системы уравнений

$$p_x = 0, \quad -p_z = -\int_0^z f_t(t, \alpha) d\alpha + f \int_0^z f(t, \alpha) d\alpha + \frac{1}{Re} f_z \quad (6)$$

с помощью (2).

Для изучения неизотермического течения в слое вязкой жидкости определяем температуру и касательные напряжения на свободных границах следующим образом:

$$T(x, \pm Z(t), t) = \frac{1}{2} A(t) x^2 + \Theta(t), \quad \tau(x, t) = x \tilde{\tau}(t). \quad (7)$$

Здесь  $A(t)$ ,  $\Theta(t)$ ,  $\tilde{\tau}(t)$  являются произвольными функциями, зависящими от времени. Их выбор может быть продиктован физической интерпретацией решения. Граничные условия (7) определяют температуру на обеих свободных границах. Эти условия должны быть согласованы с условиями на бесконечности, чтобы корректно сформулировать граничные условия на искусственно вводимых торцах прямоугольной области (см. раздел 4).

Дальнейшее математическое моделирование посвящено построению решений в полуслое (симметричное относительно оси  $Ox$  движение) аналогично [10]. Функция  $f(t, z)$  удовлетворяет уравнению

$$f_t + f^2 - f_z \int_0^z f(t, \alpha) d\alpha - \frac{1}{Re} f_{zz} = 0, \quad (8)$$

а также начальным и граничным условиям. На свободной границе  $z = Z(t)$  ( $0 < t < t_{end}$ ) динамическое условие (3) принимает вид:

$$f_z(Z(t), t) = \tilde{\tau}(t) - \frac{Ma}{RePr} A(t). \quad (9)$$

На линии симметрии  $z = 0$  (в случае изучения симметричного течения) должно быть задано условие

$$f_z(0, t) = 0$$

при всех  $t$  ( $0 < t < t_{end}$ ), которое позволяет продолжить функцию  $f(z, t)$  в область  $-Z(t) < z < 0$ . Положение свободной границы  $z = Z(t)$  определяется с помощью уравнения (см. (1)):

$$\frac{dZ}{dt} = -\int_0^{Z(t)} f(t, z) dz. \quad (10)$$

**3. Численное решение уравнений (8)–(10) для построения функций  $f(t, z)$  и  $Z(t)$ .** Функции  $f(t, z)$  и  $Z(t)$ , которые определяют поле скоростей и положение свободной границы и удовлетворяют интегро-дифференциальным уравнениям (8), (10), находятся с помощью численных алгоритмов. Данные алгоритмы являются алгоритмами типа предиктор–корректор [7, 13, 14]. Если функция  $f^k(z) = f(t^k, z)$  задана, то положение свободной границы  $Z^{k+1}$  можно найти согласно

алгоритму «предиктор–корректор» следующего вида:

$$Z^{k+1} = Z^{k-1} - 2\Delta t \int_0^{Z^k} f^k(z) dz$$

– предиктор (прогноз) и

$$\bar{Z}^{k+1} = Z^k - \Delta t \left[ \int_0^{Z^{k+1}} f^{k+1}(z) dz + \int_0^{Z^k} f^k(z) dz \right]$$

– корректор (коррекция) (см. [7]). На каждом временном слое  $t^{k+1}$  шаг сетки меняется и определяется как  $h_z = \bar{Z}/M$ , где  $\bar{Z} = Z^{k+1}$ . Если  $(z_m)$  сетка по вертикальной координате, то  $z_m = (m - 1)h_z$ , ( $m = 1, \dots, \bar{M}; \bar{M} = M + 1$ ). Здесь  $z_1 = 0$  и  $z_{\bar{M}} = \bar{Z}$ . В [7] проведены исследования устойчивости алгоритма и условия возможного изменения шага по времени. Для аппроксимации производных функции  $f$  используются конечно-разностные аналоги второго порядка. Алгоритм предиктор–корректор второго порядка точности используется для решения уравнения (8). Этот алгоритм предполагает реализацию следующих трех этапов:

$$f^{k+1/4} = f^k + 0.5\Delta t [-\Lambda_1 f^{k+1/4} + \Phi^k],$$

$$f^{k+1/2} = f^{k+1/4} + 0.5\Delta t [-\Lambda_2 f^{k+1/2}],$$

$$f^{k+1} = f^k + \Delta t [-\Lambda f^{k+1/2} + \Phi^k],$$

где  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , конечно-разностные операторы  $\Lambda_i$  соответствуют дифференциальным операторам  $(-1/Re)\partial^2/\partial z^2$  и  $-F\partial/\partial z$  (см. (8) для определения  $F, \Phi$ ). Интегралы, входящие в (8), (10), вычисляются с применением квадратурных формул. Тестирование построенного в данной работе численного алгоритма выполняется с помощью тех задач, результаты исследования которых представлены в работе [7], где был использован двухшаговый алгоритм предиктор–корректор. Заметим, что на каждом временном слое  $t^{k+1}$  расчеты осуществлялись

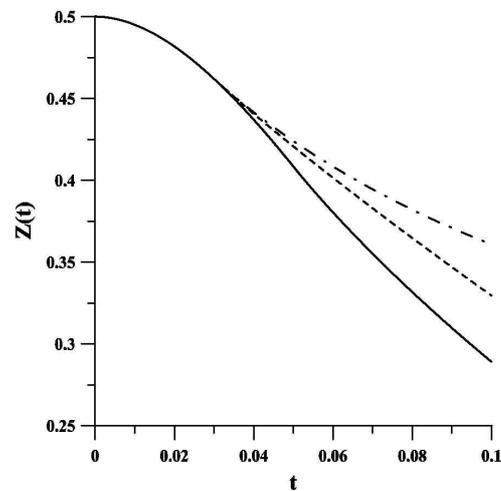


Рис. 1. Пример изменения свободной границы во времени

на новой пространственной сетке  $(z_m)$ . Поэтому, чтобы найти значения  $f_m^k = f(t^k, z_m)$  на слое  $t^k$  в новых узлах сетки  $(z_m)$ , следует использовать интерполяционные (или экстраполяционные) формулы (см. [2, 7]).

На рисунке 1 представлены графики изменения положения свободной границы  $Z(t)$  во времени. При этом начальное положение при  $t = 0$  определяется как  $Z_0 = 0.5$ . Функции, задающие продольный градиент температуры на границе и дополнительные касательные напряжения (см. (7)), определяются следующим образом:  $A(t) = \frac{A_0}{1+t^2}$ ,  $A_0 = -0.1$  (в этом случае можно говорить о нагреве «центра» слоя);  $\tau(t) = A_\tau \frac{\tau_0}{1+t^2}$ ,  $\tau_0 = -0.1$ . Заметим, что в данном случае касательные напряжения, индуцируемые внешней газовой средой, имеют направление, противоположное действию капиллярных сил. Пусть действие дополнительных касательных сил начинается в момент времени  $t_0 = 0.05$  (или 0.5 сек.; сплошная линия на рисунке 1) или в момент времени  $t_0 = 0.03$  (или 0.3 сек.; штриховая линия на рисунке 1). При этом интенсивность касательных напряжений определяется значением коэффициента  $A_\tau$ , и  $A_\tau = 400$  для обоих случаев. Отметим, что более раннее начало действия касательных сил замедляет процесс растекания слоя. Если действие дополнительных касательных сил начинается в момент времени  $t_0 = 0.05$ , но  $A_\tau = 500$  (штриховая с точками линия на рисунке 1), т.е. действуют более интенсивные дополнительные касательные напряжения, тогда наблюдается не только замедление процесса растекания слоя, но и изменение характера деформации слоя. Таким образом, точные решения вида (5) позволяют моделировать возможное поведение жидкого слоя в невесомости, а также возможный механизм контроля процесса растекания (или разбухания) слоя.

Рисунок 1 иллюстрирует поведение свободного слоя жидкости типа «этанол» при следующих значениях основных безразмерных параметров  $Pr = 17$ ,  $Re = 1$ ,  $Ma = 7800$ . Значения всех размерных величин можно найти в [2].

**4. Построение численного алгоритма для исследования процесса переноса тепла в прямоугольной области с движущимися границами.** В случае, когда компоненты скорости продиктованы точными решениями (5) уравнений Навье-Стокса и найдены численно с использованием алгоритма, описанного в разделе 3, задача сводится к численному нахождению распределения температуры в слое. Для этого введем в рассмотрение прямоугольную область

$$\Omega_L = \{-L < x < L, -\bar{Z} < z < \bar{Z}\}, \quad (11)$$

где  $\bar{Z} = Z(t)$ . На «длинных» сторонах  $z = \pm\bar{Z}$  прямоугольника  $\Omega_L$  должны быть заданы гранич-

ные условия (1)–(3). На искусственно введенных «вертикальных» торцах  $x = \pm L$  данной области должны быть поставлены «мягкие» условия для температуры, являющиеся следствием условий на бесконечности и уравнения переноса тепла [2, 15, 16]. При этом ограничимся случаем растекания слоя жидкости (см. рис. 2).

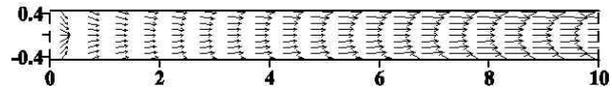


Рис. 2. Пример растекания слоя

Если на бесконечности ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) поставлены условия  $T \rightarrow T_\infty$ ,  $T_\infty = const$  и предположить, что  $T_x \rightarrow 0$ , то на вертикальных торцах может быть поставлено условие [10]:

$$T_{xx} = 0. \quad (12)$$

Если предположить, что на бесконечности ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) выполняется условие  $T_{xx} \rightarrow 0$ , то на вертикальных торцах потребуем выполнения условия

$$T_t + uT_x = \chi T_{xx}. \quad (13)$$

Для численного исследования процесса переноса тепла используется конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации. После дискретизации уравнения теплопроводности по времени и пространству численная схема запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{T^{k+1/2} - T^k}{0,5\Delta t} &= \lambda_T T_{xx}^k - (K_1 T)^k + \\ &\quad \lambda_T T_{zz}^{k+1/2} - (K_2 T)^{k+1/2}, \\ \frac{T^{k+1} - T^{k+1/2}}{0,5\Delta t} &= \lambda_T T_{xx}^{k+1} - (K_1 T)^{k+1} + \\ &\quad \lambda_T T_{zz}^{k+1/2} - (K_2 T)^{k+1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $\lambda_T = 1/(RePr)$ ,  $T^k(x, z) = T(t^k, x, z)$ .

Конвективный член  $KT = uT_x + wT_z$  представлен как сумма  $K_1 T = 0.5(uT_x + (uT))$  и  $K_2 T = 0.5(wT_z + (wT)_z)$ , где каждое слагаемое аппроксимируется центральными разностями. Сетка  $(x_n, z_m)$  вводится для реализации указанной выше схемы:  $x_n = -L + (n-1)h_x$  ( $n = 1, \dots, \bar{N}$ ,  $\bar{N} = 2N + 1$ ),  $h_x$  — шаг в направлении оси  $Ox$ ,  $h_x = L/N$ . Повторим, что сетка является подвижной по вертикальной координате:  $z_m = -\bar{Z} + (m-1)h_z$  ( $m = 1, \dots, \bar{M}$ ,  $\bar{M} = 2M + 1$ ),  $h_z$  — шаг в направлении оси  $Oz$ ,  $h_z = \bar{Z}/M$ ,  $\bar{Z} = Z^{k+1}$  — новое положение свободной границы на временном слое  $(k+1)$ . Пусть  $T_{n,m}^k = T(t^k, x_n, z_m)$ . Тогда (14) представляют собой системы линейных алгебраических уравнений, которые можно записать в виде

$$-a_{n,m} T_{n,m-1}^{k+1/2} + b_{n,m} T_{n,m}^{k+1/2} - c_{n,m} T_{n,m+1}^{k+1/2} = d_{n,m},$$

$$-a_{n,m}T_{n-1,m}^{k+1} + b_{n,m}T_{n,m}^{k+1} - c_{n,m}T_{n+1,m}^{k+1} = d_{n,m}$$

и решить методом прогонки [17]. Применяются разностные аналоги второго порядка для аппроксимации вторых производных и центральные разности для аппроксимации конвективных слагаемых. В качестве примера приведем разностную аппроксимацию слагаемого  $uT_x + (uT)_x$ :

$$uT_x + (uT)_x \approx \bar{u}_{n+1} \frac{T_{n+1,m} - T_{n,m}}{h_x} - \bar{u}_n \frac{T_{n,m} - T_{n-1,m}}{h_x} + \frac{u_{n+1}T_{n+1,m} - u_{n-1}T_{n-1,m}}{2h_x}.$$

Здесь  $\bar{u}_{n+1} = 0.5(u_{n+1} + u_n)$  ( $\bar{u}_{n+1} = u_{n+1/2}$ ). Первые производные внутри расчетной области аппроксимируются традиционно симметричными разностными аналогами со вторым порядком. Первые производные на границе расчетной области будут аппроксимироваться несимметричными конечно-разностными аналогами также второго порядка. Так как пространственная сетка подвижна в направлении  $Oz$ , а переход на новый временной слой  $(k+1)$  начинается с расчета новой пространственной сетки, то следует найти значения температуры  $T^k$ , рассчитанной на предыдущем слое, в узлах новой сетки ( $z_m$ ). Мы используем интерполяционные процедуры. С помощью интерполяционных формул Ньютона [13] вычисляем на новой пространственной сетке значения искомых функций, известных на предыдущем временном слое.

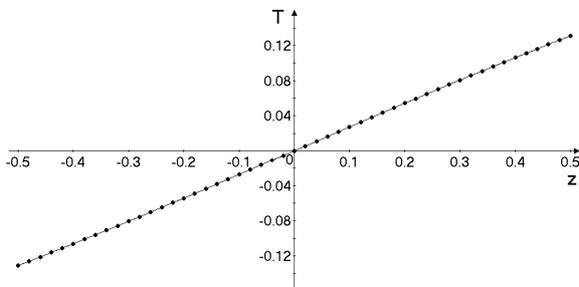


Рис. 3. Сравнение результатов расчета (численное решение: точки) и теоретических расчетов (точное решение: сплошная линия). Представлена зависимость  $T(t, x, z)$  при  $x = -6$ ,  $t = 0.2$

**5. Результаты тестирования.** Проведено тестирование численного алгоритма с использованием точного решения уравнения теплопроводности вида:

$$T = e^{-\lambda t} \sin x \sin z. \quad (15)$$

Здесь  $\lambda = 2/(RePr)$  — коэффициент температуропроводности. Пусть  $Re = 1$ ,  $Pr = 17$  для дальнейшего тестирования алгоритма. Численное решение находится в случае, когда положение границ фиксировано и определяется значением  $\bar{Z} = 0.5$ .

Таблица 1

Сравнение результатов расчета (численное решение ЧР-1, ЧР-2 и точное решение ТР):  $h_x = h_z = 0.002$  (2 столбец, ЧР-1),  $h_x = h_z = 0.02$  (3 столбец, ЧР-2),  $\tau = 0.0001$ ,  $x = -6$ ,  $t = 0.2$

$z_m$	ТР	ЧР-1	ЧР-2
-0.5	-0.13084374	-0.13084320	-0.13084220
-0.4	-0.10627918	-0.10627842	-0.10627793
-0.3	-0.08065271	-0.08065221	-0.08065176
-0.2	-0.05422039	-0.05422078	-0.05421975
-0.1	-0.02724631	-0.02724627	-0.02724599
0.0	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.02724631	0.02724623	0.02724599
0.2	0.05422039	0.05422078	0.05421975
0.3	0.08065271	0.08065221	0.08065176
0.4	0.10627918	0.10627862	0.10627793
0.5	0.13084374	0.13084320	0.13084190

Таблица 2

Сравнение результатов расчета (численное решение (ЧР) и точное решение (ТР)):  $h_x = h_z = 0.02$ ,  $\tau = 0.0001$ ,  $x = -6$ ,  $t = 0.2$ .

$Z_m$	ТР	ЧР
-0.5	-0.13084374	-0.12057220
-0.4	-0.10627918	-0.09895299
-0.3	-0.08065271	-0.07509304
-0.2	-0.05422039	-0.05048279
-0.1	-0.02724631	-0.02536813
0.0	0.00000000	0.00000000
0.1	0.02724631	0.02536813
0.2	0.02724631	0.05048279
0.3	0.08065271	0.07509304
0.4	0.10627918	0.09895299
0.5	0.13084374	0.12057220

Для численного исследования процесса теплопроводности используется конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации вида (14). Пусть  $L = 10$  (см. (11) для определения области  $\Omega_L$ , выбираемой в качестве расчетной). Для проведения тестовых расчетов вводится сетка с шагом  $h_x = h_z = 0.002$  по пространственным переменным. Сравнение точного решения (15) и результатов расчета (численное решение) приведено для значения  $x = -6$  при  $t = 0.2$  на рисунке 3. Различия между представленными решениями наблюдаются только в седьмом знаке после запятой, что демонстрирует хорошее совпадение численного (см. табл. 1, столбец 2: ЧР-1) и точного решений (ТР). В таблице 1 представлено сравнение аналитического (15) и численного решений при разных значениях шагов  $h_x$  ( $h_x = h_z$ ). При проведении тестовых расчетов в расчетной области  $\Omega_L$  с шагом  $h_x = h_z = 0.02$  по пространственным пе-

Таблица 3

Сравнение результатов расчета (численное решение ЧР-1, ЧР-2 и точное решение ТР):  
 $h_x = h_z = 0.02$ ,  $\tau = 0.0001$ ,  $x = -6$ ,  $t = 0.2$ ,  
 (2 столбец, ЧР-1), (3 столбец, ЧР-2)

$z_m$	ТР	ЧР-1	ЧР-2
-0.5	-0.13084374	-0.13084297	-0.13084220
-0.4	-0.10627918	-0.10833871	-0.10844118
-0.3	-0.08065271	-0.08212126	-0.08219339
-0.2	-0.05422039	-0.05516270	-0.05520831
-0.1	-0.02724631	-0.02770635	-0.02772827
0.0	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.02724631	0.02770635	0.02772827
0.2	0.02724631	0.05516270	0.05520831
0.3	0.08065271	0.08212126	0.08219339
0.4	0.10627918	0.10833871	0.10844118
0.5	0.13084374	0.13084297	0.13084220

ременным различия между решениями наблюдаются в шестом знаке после запятой (табл. 1, столбец 3: ЧР-2), представлены значения функции  $T$  при значениях  $x = -6$  и  $t = 0.2$ ). Здесь также  $\tau = 0.0001$ . Отметим, что при увеличении шага по пространству результаты становятся менее точными. Тестовые расчеты с помощью точного решения (15) представлены в случае, когда на границе области заданы значения самой функции. Вместе с тем проведены тестовые расчеты и в случае, когда на торцах заданы условия типа (12). Один из вариантов тестирования представлен в таблице 2. На основе точного решения неоднородного уравнения переноса тепла с правой частью, продиктованной видом полного уравнения переноса тепла (см. (4)) и точного решения (15), про-

ведены тестовые расчеты согласно полной схеме (14), которые также продемонстрировали хорошее совпадение результатов. В таблице 3 представлены результаты данного тестирования, при этом в столбце 2 приведено численное решение (ЧР-1) в случае задания на всех границах области  $\Omega_L$  «температуры» согласно (15), а в столбце 3 — численное решение (ЧР-2) в случае задания на «вертикальных» торцах условия (12). Расчеты выполнены при  $h_x = h_z = 0.002$ ,  $\tau = 0.0001$  и представлены для  $x = -6$  и  $t = 0.2$ .

**Заключение.** Представлен общий алгоритм решения задачи о динамике слоя жидкости со свободными границами в условиях невесомости с помощью точных решений уравнений Навье-Стокса. В случае, когда наряду с термокапиллярными силами на свободной границе действуют дополнительные касательные напряжения, возникает возможность контролировать процессы деформации слоя. При этом требуется провести моделирование распределения температуры в слое, что, в свою очередь, требует численного решения задачи о распределении тепла в прямоугольной области с движущимися границами. Поскольку торцы прямоугольной области, условно называемые «вертикальными», вводятся искусственно, то возникает проблема постановки различных типов мягких граничных условий. В данной работе представлены результаты тестирования отдельных частей численного алгоритма общей задачи, выполненного с помощью точных решений соответствующих уравнений.

*Авторы выражают глубокую благодарность профессору А.Ф. Воеводину за обсуждение методов численного исследования.*

### Библиографический список

1. Гончарова О.Н., Кабов О.А. Гравитационно-термокапиллярная конвекция жидкости в горизонтальном слое при спутном потоке газа // ДАН. — 2009. — Т. 426, №2.
2. Goncharova O.N., Kabov O.A. Deformation of a viscous heat conducting free liquid layer by the thermocapillary forces and tangential stresses: Analytical and numerical modeling // Microgravity sci. technol. — 2010. — Vol. 22, №3.
3. Longuet-Higgins M.S. A class of exact, time dependent free-surface flows // J. Fluid Mech. — 1972. — №55(3).
4. Андреев В.К. Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. — Новосибирск, 1992.
5. Pukhnachov V.V. On a problem of a viscous strip deformation with a free boundary C.R. // Acad. Scien. — Paris, 1999. — №328(1).
6. Galaktionov V.A., Vazquez J.L. Blow-up of a class of solutions with free boundary for the Navier-Stokes equations // Advances in Differential equations. — 1999. — V. 1.
7. Пухначева Т.П. Численное решение задачи о деформировании вязкого слоя термокапиллярными силами // Симметрия и дифференциальные уравнения. — Красноярск, 2000.
8. Pukhnachov V.V. Model of a viscous layer deformation by the thermocapillary forces // Max-Planck-Institut fuer die Mathematik in den Naturwissenschaften: preprint. — Leipzig, 2000. — №50.
9. Бытев В.О. Неустановившееся движение кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами // ПМТФ. — 1970. — №3.
10. Goncharova O.N., Kabova Yu.O., Kabov O.A. Thermocapillary convection in a free liquid layer in the presence of an adjacent

gas flow // J. Computational Thermal Sci. – 2011. – №3(5).

11. Гончарова О.Н., Кондратенко О.А. Деформация вязкого теплопроводного слоя в условиях дополнительных касательных напряжений // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2011. – №1/2(69).

12. Кондратенко О.А. Численное моделирование переноса тепла в свободном слое жидкости на основе точных решений уравнений Навье-Стокса // Ломоносовские чтения на Алтае – 2012: мат. Международной школы-семинара. – Барнаул, 2012.

13. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М., 1989.

14. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М., 1977.

15. Воеводин А.Ф., Овчарова А.С. Численное решение задачи о качестве воды в открытом русловом потоке // Водные ресурсы. – 1977. – №4.

16. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М., 1980.

17. Самарский А.А., Николаев Е.С. Метод решения сеточных уравнений. – М., 1978.