УДК 514.765

*О.П. Гладунова, Д.Н. Оскорбин*

# Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли*

*O.P. Gladunova, D.N. Oskorbin*

# An Application of Symbolic Computation Packages to the Investigation of the Curvature Operator Spectrum on the Metric Lie Groups

Спектр различных операторов на многообразиях изучался многими математиками. В общем случае эта задача достаточно сложна. Поэтому приходится накладывать ограничения на класс рассматриваемых многообразий или их размерность. Если размерность многообразия конечна, то представляется возможным применение систем аналитических вычислений. В настоящей работе с помошью пакета Maple проведено исследование спектра оператора кривизны групп Ли размерности 3 и 4 с конформно полуплоскими левоинвариантными римановыми метриками.

***Ключевые слова:*** пакеты символьных вычислений, алгебры Ли, оператор кривизны.

The spectrum of different operators on manifolds was studied by many mathematicians. In general case, this problem is quite difficult. Therefore it is necessary to impose restrictions either on the class of manifolds or on their dimension. An application of analytical calculations systems is possible if the dimension is finite. In this paper, the spectrum of the curvature operator of 3- and 4-dimensional Lie groups with half conformally flat left-invariant Riemannian metrics was investigated with Maple.

***Key words:*** symbolic computation packages, Lie algebras, curvature operator.

**1. Обозначения и факты**. Пусть $(M,g)$ – ориентированное риманово многообразие размерности $n$; $X$, $Y$, $Z$, $V$ – векторные поля на $M$. Обозначим через $\nabla$ связность Леви-Чивита и через $R$ – тензор кривизны Римана. Разделим тензор кривизны $R$ на метрический тензор $g$ в смысле произведения Кулкарни-Номидзу, получим тензор Вейля $W$ и тензор одномерной кривизны $A$ (см. подробнее [1]):

$$R = W + A \owedge g.$$

Матрицу оператора кривизны $\mathcal{R}$ относительно разложения (2) можно представить в блочном виде [2]:

$$\mathcal{R} = \left( \begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array} \right), \qquad (1)$$

где $W^+$ и $W^-$ — матрицы *автодуальной* и *антиавтодуальной* составляющих тензора $W$.

Если размерность многообразия $\dim M = 4$, то риманова метрика $g$ индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M$ по правилу $\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j))$. *Оператор Ходжа* $* : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, задаваемый соотношением $\langle *\alpha, \beta \rangle \,\mathrm{vol} = \alpha \wedge \beta$ для любых $\alpha, \beta \in \Lambda^2_x M$, $x \in M$), где vol — форма объема на $M$, обладает тем свойством, что $*^2 = \mathrm{Id}$. Отсюда

$$\Lambda^2_x M = \Lambda^+_x \oplus \Lambda^-_x, \qquad (2)$$

где $\Lambda^+_x$ и $\Lambda^-_x$ обозначают соответственно собственные пространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и $-1$ оператора $*$. При этом любой ортонормированный базис $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ пространства $T_x M$ определяет ортонормированный базис $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3)$ пространства $\Lambda^{\pm}_x M$ (см., например: [1]).

Риманову тензору кривизны $R$ в любой точке многообразия $M$ можно поставить в соответствие оператор $\mathcal{R} : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X, Y, T, V), \qquad (3)$$

где $R_x(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V)$.

*Работа выполнена при поддержке программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012–2016 гг. «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири», Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457) и гранта ФЦПК (соглашение №8206, заявка №2012-1.1-12-000-1003-014).

**Лемма 1.** [3] *Пусть* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *– ортобазис, в котором диагонализируемы матрицы операторов Риччи* $\|r_{ij}\|$ *и одномерной кривизны* $\|A_{ij}\|$. *Тогда в базисе* $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$, *при условии* $W = 0$, *диагонализируема матрица оператора кривизны* $\mathcal{R} : \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$, *причем спектр оператора* $\mathcal{R}$ *есть* $\{K_{ij}\}_{i<j}$, *где* $K_{ij} = K_\sigma(e_i \wedge e_j)$.

**Лемма 2.** [4] *Пусть* $G$ *– вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда 1)* $W^+ = 0$ *в том и только том случае, если* $W = 0$; *2)* $W^- = 0$ *в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий: либо* $W = 0$, *либо алгебра Ли группы* $G$ *есть одна из алгебр следующего списка: алгебра Ли* $\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}$ *с набором структурных констант* $c^1_{1,4} = 2A$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = A > 0$, $\beta = 1$ *или* $c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2A$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = A > 0$, $\beta = 1$; *алгебра Ли* $\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$ $(\alpha > 0)$ *с набором структурных констант* $c^1_{1,4} = 2A\alpha$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = A\alpha$, $c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -A$, $A > 0$ *или* $c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2A\alpha$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = A\alpha$, $c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -A$, $A > 0$.

**2. Основные алгоритмы**. В решении задачи о нахождении спектра оператора кривизны можно выделить следующие основные этапы:

1) отыскание компонент тензора кривизны;

2) нахождение оператора кривизны;

3) определение собственных значений (спектра) оператора кривизны.

Решение задачи на каждом этапе проводилось по следующему алгоритму. Первоначально строилась удобная для вычислительной работы модель исследуемого объекта. Далее создавалась программа для реализации в системе аналитических расчетов *Maple*. Следующий шаг был посвящен анализу и истолкованию полученных результатов. После чего делался вывод о структуре изучаемого объекта и о возможности уточнения модели.

Таким образом, для нахождения спектра оператора кривизны конечномерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо) римановой метрикой необходимо реализовать следующую схему:

**Задача:**
*найти компоненты тензора кривизны* $(R_{ijkt})$ *левоинвариантных (псевдо)римановых метрик на конечномерной группе Ли*

$\downarrow$

**Математическая модель:**

$$R_{ijkt} = c^s_{ij}\Gamma_{sk,t} - \Gamma^s_{jk}\Gamma_{is,t} + \Gamma^s_{ik}\Gamma_{js,t}$$
$$\Gamma^s_{ij} = \Gamma_{ij,k} g^{ks}$$
$$\Gamma_{ij,k} = \tfrac{1}{2}\left(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}\right)$$
$$c_{ijs} = c^k_{ij} g_{ks},$$

*где* $c^k_{ij}$ – структурные константы алгебры Ли,
$g_{ij}$ – компоненты метрического тензора,
$\Gamma_{ij,k}$ – символы Кристоффеля первого рода,
$\Gamma^s_{ij}$ – символы Кристоффеля второго рода,
$g^{ks}$ – компоненты кометрического тензора,
$R_{ijkt}$ – компоненты тензора Римана,
$n$ – размерность группы Ли

$\downarrow$

**Применение систем компьютерной математики:**
*1) пишем процедуру для отыскания компонент тензора кривизны;*
*2) задаем массив структурных констант* $(c^k_{ij})$, *метрический тензор* $(g_{ij})$ *и находим компоненты тензора кривизны*

$\downarrow$

**Задача:**
*найти компоненты оператора кривизны конечномерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой*

$\downarrow$

**Математическая модель:**

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{1}{2}(R_{1212} + 2R_{1234} + R_{3434}),$$
$$\mathcal{R}_{12} = \frac{1}{2}(R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442}),$$
$$\mathcal{R}_{13} = \frac{1}{2}(R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423}),$$
$$\mathcal{R}_{14} = \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3434}),$$
$$\mathcal{R}_{15} = \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} + R_{3413} - R_{3442}),$$
$$\mathcal{R}_{16} = \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} + R_{3414} - R_{3423}),$$
$$\mathcal{R}_{22} = \frac{1}{2}(R_{1313} - 2R_{1324} + R_{2424}),$$
$$\mathcal{R}_{23} = \frac{1}{2}(R_{1314} + R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}),$$
$$\mathcal{R}_{24} = \frac{1}{2}(R_{1213} + R_{1242} - R_{3413} - R_{3442}),$$

$$\mathcal{R}_{25} = \frac{1}{2}(R_{1313} - R_{2424}),$$
$$\mathcal{R}_{26} = \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}),$$
$$\mathcal{R}_{33} = \frac{1}{2}(R_{1414} + 2R_{1423} + R_{2323}),$$
$$\mathcal{R}_{34} = \frac{1}{2}(R_{1214} + R_{1223} - R_{3414} - R_{3423}),$$
$$\mathcal{R}_{35} = \frac{1}{2}(R_{1314} + R_{1323} - R_{4214} - R_{4223}),$$
$$\mathcal{R}_{36} = \frac{1}{2}(R_{1414} - R_{2323}),$$
$$\mathcal{R}_{44} = \frac{1}{2}(R_{1212} - 2R_{1234} + R_{3434}),$$
$$\mathcal{R}_{45} = \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} - R_{3413} + R_{3442}),$$
$$\mathcal{R}_{46} = \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} - R_{3414} + R_{3423}),$$
$$\mathcal{R}_{55} = \frac{1}{2}(R_{1313} + 2R_{1324} + R_{2424}),$$
$$\mathcal{R}_{56} = \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} - R_{4214} + R_{4223}),$$
$$\mathcal{R}_{66} = \frac{1}{2}(R_{1414} - 2R_{1423} + R_{2323}),$$

$R_{ijkt}$ — компоненты тензора Римана,
$\mathcal{R}_{ts}$ —компоненты оператора кривизны

↓

**Применение систем компьютерной математики:**
*1) пишем процедуру для отыскания компонент оператора кривизны в пространстве расслоения бивекторов;*
*2) используя найденные выше компоненты тензора кривизны, находим оператор кривизны*

↓

**Задача:**
*найти спектр оператора кривизны конечномерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой*

↓

**Математическая модель:**

$$|\mathcal{R} - \lambda E| = 0,$$

$\mathcal{R}$ — оператор кривизны,
$E$ — единичная матрица,
$\lambda$ — собственные значения оператора $\mathcal{R}$

↓

**Применение систем компьютерной математики:**
*используя встроенную процедуру СКМ, находим собственные значения (элементы спектра) оператора кривизны*

Кроме того, в работе потребуется определить компоненты секционной кривизны, используя следующую схему

**Задача:**
*найти секционную кривизну конечномерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой*

↓

**Математическая модель:**

$$K(\xi \wedge \eta) = \frac{R_{hkmj}\xi^h\eta^k\xi^m\eta^j}{(g_{hm}g_{kj} - g_{hj}g_{km})\xi^h\eta^k\xi^m\eta^j},$$

$K(\xi \wedge \eta)$ — секционная кривизна в направлении двумерной площадки ортогональных векторов $\xi, \eta$

↓

**Применение систем компьютерной математики:**
*1) пишем процедуру для отыскания компонент тензора кривизны;*
*2) задаем массив компонент тензора кривизны ($R_{ijkt}$) и метрический тензор ($g_{ij}$);*
*3) находим секционную кривизну*

**3. Спектр оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой**. При помощи описанных алгоритмов и пакета символьных вычислений среды Maple вычислен и исследован спектр оператора кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ – ортонормированный базис Милнора. Тогда оператор кривизны $\mathcal{R}$ в базисе $\{e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2\}$ имеет диагональный вид, и его спектр есть $\{\sigma_{ij}\}_{i<j}$, где $\sigma_{ij} = K(e_i \wedge e_j)$ — секционные кривизны в направлениях $(e_i \wedge e_j)$. Более того, в случае унимодулярной группы спектр оператора $\mathcal{R}$ имеет вид:*

$$\sigma_{12} = \frac{1}{4}(2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2 - 3\lambda_3^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$
$$\sigma_{23} = \frac{1}{4}(2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3 - 3\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2),$$
$$\sigma_{31} = \frac{1}{4}(2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_3 - 3\lambda_2^2 + \lambda_1^2 + \lambda_3^2),$$

*где $\lambda_i \in R$ — структурные константы алгебры Ли группы $G$, $i = 1, 2, 3$; в случае неунимодулярной группы:*

$$\sigma_{12} = -1 - \xi^2\rho - 2\xi\rho,$$
$$\sigma_{31} = -1 - \xi^2\rho + 2\xi\rho,$$
$$\sigma_{23} = -1 + \xi^2\rho,$$

*где $\xi \geq 0, \rho \geq 1$; $\xi, \rho$ — структурные константы алгебры Ли группы $G$.*

**Доказательство.** Истинность теоремы следует из леммы 1, свойств тензора кривизны и результатов работы [5].

Рассмотрим отображение $F : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto (\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})$ в областях

$\widetilde{\Omega_1'} = \{0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 < \lambda_3\}$ и

$\widetilde{\Omega_1''} = \{0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 > \lambda_3\}$.

**Лемма 3.** *Отображение $F$ инъективно в каждой из областей $\widetilde{\Omega_1'}$, $\widetilde{\Omega_1''}$.*

**Доказательство.** Найдем матрицу Якоби отображения $F$ и его якобиан, применяя пакет аналитических расчетов Maple:

$J = -\frac{1}{2}((\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2)$.

В области $\widetilde{\Omega_1'}$ выполнено $J > 0$, в области $\widetilde{\Omega_1'}$: $J < 0$.

Отображение $F : R^3 \mapsto R^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, где $F_i$ $(i = 1, 2, 3)$ — многочлены степени не выше 2 со знакоопределенным якобианом $J$, в выпуклой области $\Omega$ инъективно. Действительно, при указанных ограничениях $F(y) - F(x) = J(\frac{x+y}{2})(y - x), x, y \in \Omega$.

Аналогичным образом нетрудно определить все области, в которых отображение $F$ инъективно, соответственно, имеет обратное. Используя полученные результаты об областях обратимости отображения, получаем критерий существования трехмерной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Эти результаты обобщаются на случай локально однородных трехмерных римановых многообразий (см. подробнее: [3]).

**Лемма 4.** *Локально однородное трехмерное риманово многообразие $(M, g)$ с главными значениями оператора кривизны $(\sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$ существует в том и только в том случае, если числа $\sigma_{ij}$ (с точностью до перестановок) удовлетворяют хотя бы одному (возможно, нескольким) из условий:*

*1. Два числа $\sigma_{ij}$ равны нулю.*

*2. $(\sigma_{12} + \sigma_{23})(\sigma_{23} + \sigma_{31})(\sigma_{31} + \sigma_{12}) > 0$ (A), или по крайней мере два из чисел $\sigma_{12} + \sigma_{23}, \sigma_{23} + \sigma_{31}, \sigma_{31} + \sigma_{12}$ нули.*

*3. $\sigma_{31}\sigma_{12} \leq \sigma_{23}^2 < \left(\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2}\right)^2$, $\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2} < \sigma_{23}$.*

**4. Спектр оператора кривизны четырехмерных конформно полуплоских групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой**

**Теорема 2.** *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли $G$ с левоинвариантной римановой метрикой и автодуальной компонентой $W^- = 0$ тензора Вейля. Тогда существует базис внешних форм пространства $\Lambda^{\pm}G$, в матрице оператора кривизны на главной диагонали стоят секционные кривизны.*

**Доказательство.** Для алгебры $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$ зафиксируем набор структурных констант $c_{1,4}^1 = 2H$, $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H > 0$, $\beta = 1$ и, применяя алгоритмы, приведенные в разделе 2, определим компоненты оператора кривизны $\mathcal{R}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{7H^2}{8} & 0 & 0 & -\frac{3H^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7H^2}{8} & 0 & 0 & -\frac{3H^2}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{31H^2}{8} & 0 & 0 & -\frac{9H^2}{8} \\ -\frac{3H^2}{8} & 0 & 0 & -\frac{15H^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3H^2}{8} & 0 & 0 & -\frac{15H^2}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9H^2}{8} & 0 & 0 & -\frac{15H^2}{8} \end{pmatrix}$$

и оператора секционной кривизны

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{4}H^2 & -\frac{7}{4}H^2 & -4H^2 \\ -\frac{7}{4}H^2 & 0 & -\frac{7}{4}H^2 & -H^2 \\ -\frac{7}{4}H^2 & -\frac{7}{4}H^2 & 0 & -H^2 \\ -4H^2 & -H^2 & -H^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходя к базису внешних форм $v_1 = e_1 \wedge e_2, v_2 = e_1 \wedge e_3, v_3 = e_1 \wedge e_4, v_4 = e_2 \wedge e_3, v_5 = e_2 \wedge e_4, v_6 = e_3 \wedge e_4$ и используя встроенные процедуры пакета Maple, замечаем, что матрица оператора кривизны $\mathcal{R}$ в базисе внешних форм примет

вид

$$\begin{pmatrix} K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1234} \\ 0 & K_{13} & 0 & 0 & R_{1324} & 0 \\ 0 & 0 & K_{14} & R_{1423} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{1423} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1324} & 0 & 0 & K_{24} & 0 \\ R_{1234} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{34} \end{pmatrix},$$

где компоненты секционной кривизны $K_{ls}$ определены выше, а компоненты тензора кривизны имеют вид: $R_{1234} = \frac{1}{2}H^2$, $R_{1324} = -\frac{1}{2}H^2$, $R_{1423} = -H^2$.

Теперь для алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$ фиксируем набор структурных констант $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2H$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H > 0$, $\beta = 1$ и, применяя алгоритмы, приведенные в разделе 2, определим компоненты оператора кривизны $\mathcal{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2H^2 \end{pmatrix}$$

и оператора секционной кривизны

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -H^2 & -H^2 & -4H^2 \\ -H^2 & 0 & -4H^2 & -H^2 \\ -H^2 & -4H^2 & 0 & -H^2 \\ -4H^2 & -H^2 & -H^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Переходя к базису внешних форм и используя встроенные процедуры пакета Maple, замечаем, что матрица оператора кривизны $\mathcal{R}$ в базисе внешних форм примет вид

$$\begin{pmatrix} K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{12} \\ 0 & K_{13} & 0 & 0 & K_{13} & 0 \\ 0 & 0 & K_{14} & R_{1423} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{1423} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{13} & 0 & 0 & K_{24} & 0 \\ -K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{34} \end{pmatrix}.$$

При этом секционные кривизны $K_{12} = K_{34}, K_{13} = K_{24}, K_{14} = K_{23}$ и определяются (4), а компотента тензора кривизны $R_{1423} = \frac{1}{2}(K_{12} + K_{13} + K_{24} + K_{34})$.

Аналогично рассматривается случай алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Теорема доказана.

Заметим, что алгоритмы раздела 2 позволяют определить спектр оператора кривизны. В силу теоремы 2 в записи спектра оператора кривизны участвуют лишь секционные кривизны и компоненты $R_{1423}, R_{1234}, R_{1324}$ тензора кривизны.

## Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: пер. с англ.: в 2 т. – М., 1990.

2. Singer I.M., Thorpe J.A. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analisis, Papers in Honour of K. Kodarira, Univ. – Tokyo, 1969.

3. Математическое моделирование в социально-экономических и естественных науках / О.П. Гладунова, М.В. Куркина, Д.Н. Оскорбин, И.В. Понomarев, Е.Д. Родионов, В.В. Славский. – Барнаул, 2012.

4. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Т. 13, вып. 3.

5. Nikonorov Y.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – V. 146, №6.