УДК 512.545

С.В. Вараксин

О свободных m-группах и m-произведениях

S.V. Varaksin

On Free m-Groups and Free m-Products

Получено представление свободной m-группы автоморфизмами линейно упорядоченного множества, построены свободная m-группа над ℓ-группой и свободное m-произведение m-групп.

Ключевые слова: многообразия m-групп, свободная m-группа, свободное m-произведение.

There are received the representation of a free m-group with automorphisms of the linearly ordered set, built the free m-group over the ℓ-group and the free m-product of m-groups.

Key words: varieties of m-groups, free m-group, free m-product.

Введение. Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e,^{-1}, \vee, \wedge, \ \varphi\rangle$, где $\langle G, \cdot, e,^{-1}, \vee, \wedge\rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция φ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e,^{-1}\rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge\rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \varphi(\varphi(x)) = x,$$
$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y), \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом φ записываем *как пару* (G, φ).

1. Свободные m-группы. В работе [1] дано определение и описание свободных m-групп. Пусть $S = \{s_i^0\}_{i\in I}$ — множество порождающих, $S' = \{s_i^1\}_{i\in I}$ — его копия, $\varphi_0 : S_0 \cup S_1 \to S_0 \cup S_1$, $\varphi_0(s_i^{\varepsilon}) = s_i^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon = 0, 1$. Обозначим через $L_{S\cup S'}$ свободную ℓ-группу с множеством порождающих $S \cup S'$, а через φ — преобразование на $L_{S\cup S'}$, определенное как

$$\varphi(\bigvee_i \bigwedge_j \prod_k s_{ijk}^{\varepsilon_{ijk}}) = \bigwedge_i \bigvee_j \prod_k \varphi_0(s_{ijk}^{\varepsilon_{ijk}}).$$

Теорема 1 *[1]. Свободная ℓ-группа $L_{S\cup S'}$ с операцией φ является свободной m-группой с множеством порождающих S.*

Пусть $F(X_0 \cup X_1)$ — свободная группа с множеством порождающих $X_0 \cup X_1 = \{x_s^0, x_s^1 | s \in S,\}$. Через RO обозначается множество всех правых порядков группы $F(X_0 \cup X_1)$. Правоупорядоченную группу $F(X_0 \cup X_1)$ с правым порядком $P \in RO$ обозначим (F, P), а через F^* — декартово произведение $F^* = \prod\limits_{P\in RO} A(F, P)$ ℓ-групп $A(F, P)$, $P \in RO$. Определим на ℓ-группе F^* реверсивный автоморфизм θ, построенный в работе [2]: для $f \in F^*$ компонента $\theta(f)(P) = f(P^{-1})$, где P^{-1} — противоположный правый порядок к P. Обозначим через $F_\ell(X_0 \cup X_1)$ ℓ-подгруппу группы F^*, порожденную правым регулярным представлением группы $F(X_0 \cup X_1)$ на каждом сомножителе $A(F, P)$. В [2] показано, что отображение θ переводит ℓ-подгруппу $F_\ell(X_0 \cup X_1)$ в себя. При $g = \prod\limits_i x_i^{\varepsilon_i}, \varepsilon_i = 0, 1$ выполнено $\theta(g) = g$ и θ является антиизоморфизмом решетки ℓ-группы F^*. Обозначим через φ' автоморфизм ℓ-группы $F_\ell(X_0 \cup X_1)$, определенный отображением порождающих $\varphi'(x_s^{\varepsilon}) = x_s^{1-\varepsilon}$, а через φ — произведение отображений $\varphi = \varphi'\theta$. Тогда ℓ-группа $F_\ell(X_0 \cup X_1)$ с отображением φ является m-группой, при этом $X_1 = \varphi(X_0)$.

Теорема 2. *m-группа $(F_\ell(X_0 \cup X_1), \varphi)$ является свободной m-группой с множеством порождающих X_0.*

Доказательство. П. Конрад [3] доказал, что ℓ-группа $F_\ell(X_0 \cup X_1)$ является свободной ℓ-группой многообразия всех ℓ-групп с множеством порождающих $X_0 \cup X_1$. Пусть $(G, \hat\varphi)$ — произвольная m-группа с множеством порождающих $Y = \{y_s | s \in S,\}$. Тогда G — ℓ-группа с множеством порождающих $Y \cup \hat\varphi(Y) = \{y_s, \hat\varphi(y_s) | s \in S,\}$, и отображение порождающих $\psi_0 : x_s^0 \to y_s, \psi_0 : x_s^1 \to \hat\varphi(y_s)$ продолжается до ℓ-гомоморфизма $\psi : F_\ell(X_0 \cup X_1) \to G$. При этом отображения φ и φ' являются антиавтоморфизмами решеток, поэтому $\varphi\psi = \psi\varphi'$. Значит, отображение порождающих $\psi_0 : x_s^0 \to y_s$ продолжается до m-гомоморфизма ψ.

Пусть G — ℓ-группа. Обозначим через G^* двойственную ℓ-группу к G, т.е. с тем же основным множеством и групповыми операциями и решеточными операциями объединения и пересечения, совпадающими соответственно с операциями пересечения и объединения ℓ-группы G. Многообразие ℓ-групп $\mathcal{V}$ называется реверсивным, если из $G \in \mathcal{V}$ следует $G^* \in \mathcal{V}$ [4].

Пусть $\mathcal{V}$ — реверсивное многообразие ℓ-групп и $\mathcal{V}_m$ — многообразие m-групп, задаваемое

ℓ-тождествами из $\mathcal{V}$. Описание свободных ℓ-групп многообразия $\mathcal{V}$ дано В.М. Копытовым [5]. Пусть $\mathcal{Q}$ класс групп, вложимых в ℓ-группы из $\mathcal{V}$. Известно, что $\mathcal{Q}$ является квазимногообразием [6]. Пусть $F_{\mathcal{Q}} = F_{\mathcal{Q}}(X_0 \cup X_1)$ — свободная группа квазимногообразия $\mathcal{Q}$ с множеством порождающих $X_0 \cup X_1 = \{x_s^0, x_s^1 | s \in S,\}$. Обозначим через RO множество всех правых порядков группы $F_{\mathcal{Q}}$, а через $(F_{\mathcal{Q}}, P)$ — правоупорядоченную группу $F_{\mathcal{Q}}$ с правым порядком $P \in RO$. Для каждого правого порядка P группы $F_{\mathcal{Q}}$ и для каждой выпуклой подгруппы H в $(F_{\mathcal{Q}}, P)$ множество $R_{(F_{\mathcal{Q}},P)}(H)$ правых смежных классов $F_{\mathcal{Q}}$ по H линейно упорядочено посредством отношения: $Hx \leqslant Hy$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$ в правоупорядоченной группе $(F_{\mathcal{Q}}, P)$.

В ℓ-группе $A(R_{(F_{\mathcal{Q}},P)}(H))$ всех порядковых автоморфизмов линейно упорядоченного множества $R_{(F_{\mathcal{Q}},P)}(H)$ рассмотрим ℓ-подгруппу $A_H(P)$, порожденную всеми правыми сдвигами $(a)R_H$ множества $R_{(F_{\mathcal{Q}},P)}(H)$, где $(Hx)(a)R_H = Hxa$ для каждого $a \in F_{\mathcal{Q}}$. В каждой правоупорядоченной группе $(F_{\mathcal{Q}}, P)$ существует наименьшая выпуклая подгруппа $H(P)$ такая, что $A_{H(P)}(P) \in \mathcal{V}$. Обозначим эту ℓ-группу $A_{H(P)}(P)$ через $A(P)$. Следующее утверждение основано на том, что для реверсивного многообразия $\mathcal{V}$ если $A_{H(P)}(P) \in \mathcal{V}$, то и $A_{H(P^{-1})}(P^{-1}) \in \mathcal{V}$.

Предложение 3. *Для реверсивного многообразия ℓ-групп*
$$H(P) = H(P^{-1}). \qquad (*)$$

Через F^* обозначим декартово произведение $F^* = \overline{\prod_{P \in RO}} A(P)$ ℓ-групп $A(P)$, $P \in RO$. Рассмотрим на ℓ-группе F^* отображение θ из: для $f \in F^*$ компонента $\theta(f)(P) = f(P^{-1})$, где P^{-1} — противоположный правый порядок к P. В [2] показано, что для ℓ-многообразий с условием $(*)$, в частности, для реверсивных ℓ-многообразий, отображение θ является реверсивным автоморфизмом. Обозначим через $F_{\mathcal{V}}(X_0 \cup X_1)$ ℓ-подгруппу ℓ-группы F^*, порожденную элементами $\bar{x}_s^0, \bar{x}_s^1, s \in S$, $\bar{x}_s^\varepsilon(P) = x_s^\varepsilon R_{H(P)}$.

Так же, как и в предыдущем случае, обозначим через φ' автоморфизм ℓ-группы $F_{\mathcal{V}}(X_0 \cup X_1)$, определенный отображением порождающих $\varphi'(x_s^\varepsilon) = x_s^{1-\varepsilon}$, а через φ – произведение отображений $\varphi = \varphi'\theta$. Тогда ℓ-группа $F_{\mathcal{V}}(X_0 \cup X_1)$ с отображением φ является m-группой, при этом $X_1 = \varphi(X_0)$.

Теорема 4. *m-группа $(F_{\mathcal{V}}(X_0 \cup X_1), \varphi)$ является свободной m-группой m-многообразия $\mathcal{V}_m$ с множеством порождающих X_0.*

Доказательство. Доказательство основано на следствии 4.2 из [1] : если $\mathcal{V}$ — реверсивное многообразие ℓ-групп, то свободная m-группа многообразия $\mathcal{V}_m$ m-групп с множеством порождающих $S = \{s_1^0 | i \in I\}$ — это $(L_{\mathcal{V},S,S'}, F)$, где $L_{\mathcal{V},S,S'}$ — $\mathcal{V}$-свободная ℓ-группа с множеством свободных порождающих $S \cup S'$ ($S' = \{s_i^1 | i \in I\}$ это копия S) и F — единственный реверсивный автоморфизм со свойством $F(s_i^0) = s_i^1$ и $F(s_i^1) = s_i^0$. В.М. Копытовым (см.: [5]) доказано, что ℓ-группа $F_{\mathcal{V}}(X_0 \cup X_1)$ является свободной ℓ-группой многообразия $\mathcal{V}$ с множеством порождающих $X_0 \cup X_1$. Далее доказательство повторяет доказательство предыдущей теоремы.

Пусть G — ℓ-группа. Назовем m-группу F свободной над G, если существует ℓ-изоморфизм $\pi : G \to F$ такой, что $\pi(G)$ порождает F как m-группу, и для произвольного ℓ-гомоморфизма α_0 ℓ-группы G в m-группу F' существует m-гомоморфизм $\alpha : F \to F'$ такой, что $\alpha_0 = \pi\alpha$.

Пусть G — ℓ-группа и G_0 — ℓ-группа, изоморфная G, а ℓ-группа G_1 — двойственная ℓ-группа к G_0. Обозначим через φ_o тождественное отображение G_0 в G_1. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_o(gh) &= \varphi_o(g)\varphi_o(h), \\ \varphi_o(g \vee h) &= \varphi_o(g) \wedge \varphi_o(h) \\ \text{и } \varphi_o(g \wedge h) &= \varphi_o(g) \vee \varphi_o(h). \end{aligned}$$

Мартинес показал (см.: [5]), что для любого семейства $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ℓ-групп существует их свободное ℓ-произведение $\prod_{\ell, \gamma \in \Gamma}^* G_\gamma$. Следуя его рассуждениям, можно показать, что для любого семейства $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ℓ-групп ℓ-многообразия $\mathcal{V}_\ell$ существует их свободное ℓ-произведение $\prod_{\mathcal{V}_\ell, \gamma \in \Gamma}^* G_\gamma$ в этом ℓ-многообразии.

Обозначим через F свободное ℓ-произведение ℓ-групп G_0 и G_1 : $F = G_0 \underset{\ell}{*} G_1$. Определим на F преобразование φ : для

$$g = \bigvee_i \bigwedge_j g_1 \varphi_o(g_2) \cdot \ldots \cdot g_{2k-1} \varphi_o(g_{2k})$$

положим

$$\varphi(g) = \bigwedge_i \bigvee_j \varphi_o(g_1) g_2 \cdot \ldots \cdot \varphi_o(g_{2k-1}) g_{2k}.$$

Предложение 5. *Отображение φ определено корректно и является реверсивным автоморфизмом второго порядка ℓ-группы F.*

Доказательство. Пусть $G_0 = F_0/H_0$ — фактор-группа свободной ℓ-группы F_0 с тем же множеством порождающих X_0 по идеалу H_0, а F_1 — свободная ℓ-группа с множеством порождающих $X_1 = \varphi_o(X_0)$. Тогда $H_1 = \varphi_o(H_0)$ — идеал в F_1, и если N — идеал свободной ℓ-группы $F_{0,1}$ с множеством порождающих $X = X_0 \cup X_1$, порожденный ℓ-подгруппами H_0 и H_1, то $F = F_{0,1}/N$ (см.: [5]).

Теперь доказательство предложения превращается в рутинную проверку.

Следствие 6. *Решеточно упорядоченная группа F совместно с реверсивным автоморфизмом φ образует m-группу.*

Теорема 7. *Для любой ℓ-группы G существует m-группа, свободная над G.*

Доказательство. Достаточно проверить, что определенная выше m-группа (F, φ) является свободной m-группой над G. Поскольку для $g \in G_0$ выполнено $\varphi(g) = \varphi_o(g)$, то ℓ-подгруппы G_0 и G_1 порождают всю F как ℓ-группу. Пусть (F', φ') — произвольная m-группа, и α_0 — ℓ-гомоморфизм из G_0 в (F', φ'). Тогда $\alpha_1 = \alpha_0\varphi$ — ℓ-гомоморфизм из G_1 в (F', φ'). По определению свободного ℓ-произведения существует ℓ-гомоморфизм α, продолжающий α_0 и α_1. Несложно проверить, что $\alpha\varphi = \varphi'\alpha$, поэтому ℓ-гомоморфизм α является m-гомоморфизмом.

2. Свободные m-произведения. Пусть $\{(G_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$ – некоторое множество m-групп. Назовем m-группу (G^*, φ^*) и систему m-изоморфизмов $\psi_\alpha : (G_\alpha, \varphi_\alpha) \to (G^*, \varphi^*)$ свободным m-произведением $\prod\limits_{\alpha\in A}{}^*_m(G_\alpha, \varphi_\alpha)$ m-групп $\{(G_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$, если

1) $G^* = m$-гр$\{\psi_\alpha(G_\alpha), \alpha \in A\}$

2) для любой m-группы (G, φ) и системы m-гомоморфизмов $\theta_\alpha : (G_\alpha, \varphi_\alpha) \to (G, \varphi)$ найдется m-гомоморфизм $\theta : (G^*, \varphi^*) \to (G, \varphi)$ такой, что $\theta_\alpha = \psi_\alpha\theta$ для любого $\alpha \in A$.

Понятно, что если свободное произведение m-групп существует, то оно единственно.

Теорема 8. *Для любого семейства m-групп $\{(G_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$ существует их свободное m-произведение $\prod\limits_{\alpha\in A}{}^*_m(G_\alpha, \varphi_\alpha)$.*

Доказательство. Определим группы $(G_\alpha, \varphi_\alpha) = m$-гр$\{x_{\alpha\beta} | \beta \in B_\alpha\}$. Обозначим через

$$(F_0, \varphi_0) = m\text{-гр}\{\bar{x}_{\alpha\beta} | \alpha \in A,\ \beta \in B_\alpha\}$$

и

$$(F_\alpha, \varphi'_\alpha) = m\text{-гр}\{\bar{x}_{\alpha\beta} | \beta \in B_\alpha\}$$

свободные m-группы над тривиально частично упорядоченными свободными группами с порождающими $\{\bar{x}_{\alpha\beta}, \alpha \in A, \beta \in B_\alpha\}$ и $\{\bar{x}_{\alpha\beta}, \beta \in B_\alpha\}$ соответственно. Тогда $(G_\alpha, \varphi_\alpha) = (F_\alpha, \varphi'_\alpha)/(N_\alpha, \varphi'_\alpha)$ для некоторого m-идеала $(N_\alpha, \varphi'_\alpha)$. Пусть (N_0, φ_0) — m-идеал в (F_0, φ_0), порожденный $\{w(\bar{x_1}, \dots, \bar{x_k}) | w(x_1, \dots, x_k) \in N_\alpha, \alpha \in A\}$, m-группа $(G^*, \varphi^*) = (F_0, \varphi_0)/(N_0, \varphi_0)$, и для

$$x = \bigvee_i \bigwedge_j \varphi_\alpha^{\varepsilon_{ij1}}(x_{ij1}) \dots \varphi_\alpha^{\varepsilon_{ijk}}(x_{ijk}) \in (G_\alpha, \varphi_\alpha),$$
$$\varepsilon_{ijl} = 0 \text{ или } 1$$

определим

$$\psi_\alpha(x) = \bigvee_i \bigwedge_j \varphi_0^{\varepsilon_{ij1}}(\bar{x}_{ij1}) \dots \varphi_0^{\varepsilon_{ijk}}(\bar{x}_{ijk}) N_0.$$

Тогда ψ_α — гомоморфизм из $(G_\alpha, \varphi_\alpha)$ в (G^*, φ^*).

Пусть теперь (G, φ) произвольная m-группа и $\theta_\alpha : (G_\alpha, \varphi_\alpha) \to (G, \varphi)$ — m-гомоморфизмы. Определим отображение $\theta : (G^*, \varphi^*) \to (G, \varphi)$ на порождающих $\theta(\bar{x}_{\alpha,\beta}N_0) = \theta_\alpha(x_{\alpha\beta}N_\alpha)$, а для остальных элементов m-группы (G^*, φ^*) в соответствии с операциями m-группы. Несложно проверить, что отображение θ определено корректно и является m-гомоморфизмом.

Чтобы показать, что отображения θ_α являются m-изоморфизмами, достаточно взять в качестве m-группы (G, φ) одну из m-групп $(G_{\alpha_0}, \varphi_\alpha)$ и отображения

$$\theta_\alpha = \begin{cases} Id,\ \alpha = \alpha_0 \\ E,\ \alpha \neq \alpha_0. \end{cases}$$

Пусть теперь $\{(G_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$ — некоторое множество m-групп m-многообразия $\mathcal{V}_m$. Назовем m-группу (G^*, φ^*) и систему m-изоморфизмов $\psi_\alpha : (G_\alpha, \varphi_\alpha) \to (G^*, \varphi^*)$ свободным $\mathcal{V}_m$-произведением $\prod\limits_{\alpha\in A}{}^*_{\mathcal{V}_m}(G_\alpha, \varphi_\alpha)$ m-групп $\{(G_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$, если

1) $G^* = m$-гр$\{\psi_\alpha(G_\alpha), \alpha \in A\}$ принадлежит m-многообразию $\mathcal{V}_m$;

2) для любой m-группы (G, φ) из $\mathcal{V}_m$ и системы m-гомоморфизмов $\theta_\alpha : (G_\alpha, \varphi_\alpha) \to (G, \varphi)$ найдется m-гомоморфизм $\theta : (G^*, \varphi^*) \to (G, \varphi)$ такой, что $\theta_\alpha = \psi_\alpha\theta$ для любого $\alpha \in A$.

Теорема 9. *Для любого семейства m-групп $\{(G_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$ m-многообразия $\mathcal{V}_m$ существует их свободное $\mathcal{V}_m$-произведение $\prod\limits_{\alpha\in A}{}^*_{\mathcal{V}_m}(G_\alpha, \varphi_\alpha)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

Библиографический список

1. Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. – 1999. – V. 49(124).

2. Баянова Н.В., Медведев Н.Я. Реверсивные автоморфизмы свободных ℓ-групп // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, №2.

3. Conrad P. Free Lattice-Ordered Groups // J. Algebra. – 1970. – V. 16.

4. Huss M.E., Reilly N.R. On reversing the order of a lattice ordered group // J. Algebra. – 1984. – V. 91, №1.

5. Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. The theory of lattice-ordered groups. – Dordrecht; Boston; London, 1994.

6. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М., 1970.