УДК 517.9

А.М. Блохин, А.С. Рудометова

О стационарных решениях системы моментных уравнений, описывающих перенос заряда в полупроводниках*

A.M. Blokhin, A.S. Rudometova

On the Stationary Solutions of the System of Moment Equations Describing the Charge Transport in Semiconductors

В работе обсуждается вопрос о существовании решений одной гидродинамической модели переноса заряда в полупроводниках в стационарном случае.

Ключевые слова: перенос заряда в полупроводниках, гидродинамическая модель, обобщенная матрица Грина.

In this paper we discuss the existence of solutions for some hydrodynamic model of charge transport in semiconductors in stationary case.

Key words: charge transport in semiconductors, hydrodynamic model, generalized Green matrix.

1. Предварительные сведения. При математическом моделировании физических явлений, связанных с переносом заряда в полупроводниках, широко используются гидродинамические модели, которые выводятся из бесконечной системы моментных уравнений (следствий уравнения переноса Больцмана) с помощью определенной процедуры замыкания.

Рассмотрим гидродинамическую модель, предложенную недавно в работах [1, 2]. Следуя [3–5], выпишем квазилинейную нестационарную систему вышеупомянутых моментных уравнений в одномерном случае в безразмерном виде (процесс обезразмеривания описан в [4, 5], там же даны конкретные выражения для коэффициентов c_{ij}):

$$\left.\begin{aligned} &R_t + J_x = 0,\\ &J_t + (\frac{2}{3}RE)_x = RQ + c_{11}J + c_{12}I,\\ &(RE)_t + I_x = JQ + cP,\\ &I_t + (\frac{10}{9}RE^2)_x = \frac{5}{3}REQ + c_{21}J + c_{22}I, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\varepsilon^2\varphi_{xx} = R - \rho. \quad (2)$$

Здесь R – электронная плотность; u – электронная скорость; q – поток энергии; $J = Ru$, $I = Rq$ – потоки; E – энергия электронов; $\sigma = \frac{2}{3}E - 1$, $P = R\sigma$, $Q = \varphi_x$, φ – электрический потенциал; ε^2 – диэлектрическая постоянная; $\rho = \rho(x)$ – плотность легирования (заданная функция на отрезке [0,1]). Коэффициенты $c, c_{11} \dots c_{22}$ являются гладкими функциями от энергии E.

Систему (1)–(2) дополним граничными условиями, соответствующими задаче о баллистическом диоде (см. [3–5]):

$$\begin{gathered} R(t,0) = R(t,1) = 1,\\ E(t,0) = E(t,1) = \tfrac{3}{2},\\ \varphi(t,0) = 0, \quad \varphi(t,1) = B, \end{gathered}$$

здесь постоянная $B > 0$ – напряжение смещения.

В стационарном случае система (1)–(2) может быть переписана так:

$$\begin{cases} \varphi' = Q,\\ u' = -u\Psi,\\ q' = -q\Psi + uQ + \tilde{c}(\Sigma),\\ \Sigma' = \tilde{a}(\Sigma)u + \tilde{b}(\Sigma)q\\ \varepsilon Q' = r,\\ \varepsilon r' = -\rho' + (\rho + \varepsilon r)\Psi, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\begin{gathered} \Psi = \tilde{m}(\Sigma)u + \tilde{n}(\Sigma)q + Q\Sigma, \quad R = \rho + \varepsilon r,\\ \Sigma = \tfrac{1}{1+\sigma}, \quad E = \tfrac{3}{2\Sigma}, \quad \tilde{a}(\Sigma) = -a\Sigma^2, \quad \tilde{b}(\Sigma) = -b\Sigma^2,\\ a = \tfrac{2}{5}\Sigma c_{21} - c_{11}, \quad b = \tfrac{2}{5}\Sigma c_{22} - c_{12},\\ \tilde{c}(\Sigma) = c(\tfrac{1}{\Sigma} - 1), \quad \tilde{m} = \Sigma(c_{11} - a), \quad \tilde{n} = \Sigma(c_{12} - b). \end{gathered}$$

Граничные условия примут вид:

$$\begin{gathered} r(0) = r(1) = 0,\\ \Sigma(0) = \Sigma(1) = 1,\\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = B. \end{gathered} \quad (4)$$

Имеем *сингулярно-возмущенную* систему 4+2 дифференциальных уравнений (ε – малый положительный параметр)

$$\tfrac{dy}{dx} = f(y,z), \quad (5)$$

$$\varepsilon\tfrac{dz}{dx} = F(y,z,x,\varepsilon), \quad (6)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке проектов РФФИ 10-01-00320-а и 11-08-00286-а и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (соглашение №14.B37.21.0355).

где

$$y = \begin{pmatrix} \varphi \\ u \\ q \\ \Sigma \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} Q \\ -u\Psi \\ -q\Psi + uQ + \tilde{c}(\Sigma), \\ \tilde{a}(\Sigma)u + \tilde{b}(\Sigma)q \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} Q \\ r \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} r \\ -\rho' + (\rho + \varepsilon r)\Psi \end{pmatrix},$$

с соответствующими граничными условиями.

Отметим, что система $F(y, z, x, 0) = 0$ имеет изолированное решение

$$z = \phi(y, x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Sigma}\left[\frac{\rho'}{\rho} - \tilde{m}(\Sigma)u - \tilde{n}(\Sigma)q\right] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

2. Решение вырожденной задачи. Одновременно с (5)–(6) рассмотрим *вырожденную* систему (при $\varepsilon = 0$)

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = f(\hat{y}, \hat{z}), \quad (8)$$

$$F(\hat{y}, \hat{z}, x, 0) = 0. \quad (9)$$

В работах [6, 7] найдено численное решение задачи (8)–(9). В данном пункте приведем еще один конструктивный подход к нахождению решения вырожденной задачи.

Исследование системы (8)–(9) с учетом (7) сводится к исследованию системы

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = f(\hat{y}, \phi(\hat{y}, x))$$

или, в развернутом виде:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}' = \frac{1}{\hat{\Sigma}}\left[\frac{\rho'}{\rho} - \tilde{m}(\hat{\Sigma})\hat{u} - \tilde{n}(\hat{\Sigma})\hat{q}\right], \\ \hat{u}' = -\hat{u}\frac{\rho'}{\rho}, \\ \hat{q}' = -\hat{q}\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\hat{u}}{\hat{\Sigma}}\left[\frac{\rho'}{\rho} - \tilde{m}(\hat{\Sigma})\hat{u} - \tilde{n}(\hat{\Sigma})\hat{q}\right] + \tilde{c}(\hat{\Sigma}), \\ \hat{\Sigma}' = \tilde{a}(\hat{\Sigma})\hat{u} + \tilde{b}(\hat{\Sigma})\hat{q} \end{cases} \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\hat{\Sigma}(0) = \hat{\Sigma}(1) = 1, \qquad \hat{\varphi}(0) = 0, \quad \hat{\varphi}(1) = B. \quad (11)$$

Задачу (10)–(11) запишем в векторном виде

$$\frac{d\hat{y}}{dx} - A(x)\hat{y} = \bar{f}(\hat{y}, x), M\hat{y} = M_0\hat{y}(0) + M_1\hat{y}(1) = \boldsymbol{B}.$$

Фундаментальная матрица для системы уравнений соответствующей однородной задачи имеет вид

$$X(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $D = MX$ — матрицу, полученную при подстановке в краевое условие фундаментальной матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица Грина для однородной задачи существует и единственна тогда и только тогда, когда $rangD = dimX$.

В нашем случае $rangD = 2$, $dimX = 4$, поэтому для нахождения решения краевой задачи (10), (11) построим *обобщенную матрицу Грина* [8, 9].

$$G(x,s) = \left[\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^2(t)}\,dt\right)^{-1} \int_0^s \frac{1}{\rho^2(t)}\,dt - \frac{1}{2}\right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho(s)}{\rho(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho(s)}{\rho(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2} sign(x-s) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho(s)}{\rho(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho(s)}{\rho(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общая методика исследования поставленной нелинейной краевой задачи (10)–(11) основывается на переходе с помощью обобщенной матрицы Грина от исходной краевой задачи к системе интегральных уравнений:

$$\hat{y}_1(x) = \int_0^x \bar{f}_1(\hat{y}, s)\,ds, \qquad \hat{y}_2(x) = \frac{u_0}{\rho(x)},$$

$$\hat{y}_3(x) = \frac{1}{\rho(x)}\Bigg[q_0 + \int_0^x \rho(s)\bar{f}_3(\hat{y}, s)\,ds +$$

$$+ \int_0^1 \left[\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^2(t)}\,dt\right)^{-1} \int_0^s \frac{1}{\rho^2(t)}\,dt - 1\right]\rho(s)\bar{f}_3(\hat{y}, s)\,ds\Bigg],$$

$$\hat{y}_4(x) = \int_0^x \bar{f}_4(\hat{y}, s)\,ds + 1.$$

Параметры u_0, q_0 определяются с учетом *условий разрешимости*, имеющих в данном случае следующий вид

$$\int_0^1 \bar{f}_1(\hat{y}, s)\,ds = B, \quad \int_0^1 \bar{f}_4(\hat{y}, s)\,ds = 0.$$

Доказательство существования единственного решения системы нелинейных интегральных уравнений может быть проведено при помощи метода последовательных приближений на основе принципа сжимающих отображений [10].

3. Построение интегрального многообразия. С учетом решения (7) сделаем в системе (5)–(6) замену

$$z = \phi(y,x) + \psi = \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_\varepsilon \\ r \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где

$$\bar{Q} = \frac{1}{\Sigma}\Big[\frac{\rho'}{\rho} - \tilde{m}(\Sigma)u - \tilde{n}(\Sigma)q\Big], \quad Q_\varepsilon = Q - \bar{Q}.$$

В итоге получим

$$\tfrac{dy}{dx} = h(y,\psi,x), \qquad (13)$$

$$\varepsilon\tfrac{d\psi}{dx} = \mathcal{A}(y,x)\psi + g(y,\psi,x,\varepsilon), \qquad (14)$$

здесь

$$\mathcal{A}(y,x) = F_z(y,\phi(y,x),x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho\Sigma & 0 \end{pmatrix},$$

$$g(y,\psi,x,\varepsilon) = F(y,\phi(y,x)+\psi,x,\varepsilon) - \\ -F_z(y,\phi(y,x),x,0)\psi - \varepsilon\left(\phi_x + \phi_y h\right),$$

$$h(y,\psi,x) = f(y,\phi(y,x)+\psi,x).$$

Конкретно

$$h = \begin{pmatrix} \bar{Q} + Q_\varepsilon \\ -u(\frac{\rho'}{\rho} + Q_\varepsilon\Sigma) \\ -q(\frac{\rho'}{\rho} + Q_\varepsilon\Sigma) + u\Big[\bar{Q} + Q_\varepsilon\Big] + \tilde{c}(\Sigma), \\ \tilde{a}(\Sigma)u + \tilde{b}(\Sigma)q \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} r \\ \rho\Sigma Q_\varepsilon + \varepsilon r(\frac{\rho'}{\rho} + \Sigma Q_\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Далее рассматриваем задачу

$$\begin{cases} \varepsilon\psi'(x) = \mathcal{A}(y,x)\psi(x) + g(y,\psi,x,\varepsilon), \\ P_0\psi(0) + P_1\psi(1) = 0, \end{cases} \qquad (15)$$

где

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $\mathcal{A}$: $\lambda_1 = -\sqrt{a(x)}$ и $\lambda_2 = \sqrt{a(x)}$, где $a(x) = \rho(x)\Sigma(x)$, для всех $y : ||y - \hat{y}|| \le \delta$, $x \in [0,1]$ удовлетворяют условию:

$$Re\lambda_1 \le -\alpha_1 < 0, \\ Re\lambda_2 \ge \alpha_2 > 0.$$

Следуя [11], можно показать, что *существуют такие положительные числа ε_1, c_2, что для каждого значения $\varepsilon < \varepsilon_1$ однородная задача*

$$\begin{cases} \varepsilon\psi'(x) = \mathcal{A}(y,x)\psi(x) \\ P_0\psi(0) + P_1\psi(1) = 0 \end{cases}$$

имеет матрицу Грина $\mathcal{G}(s,t,\varepsilon)$ такую, что

$$\left\| \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{G}(x,s,\varepsilon)\,ds \right\| \le c_2. \qquad (16)$$

Действительно, на основе двух фундаментальных систем решений, полученных при приведении системы уравнений к квазидиагональному виду, можно построить фундаментальную матрицу $Y(x,\varepsilon)$.

В этом случае матрица Грина имеет вид

$$\mathcal{G}(x,s,\varepsilon) = \begin{cases} Y(x,\varepsilon)V(s,\varepsilon), & 0 \le x \le s \le 1 \\ Y(x,\varepsilon)W(s,\varepsilon), & 0 \le s \le x \le 1 \end{cases} \qquad (17)$$

где V, W – некоторые матрицы, подчиненные условиям

$$\begin{cases} P_0Y(0,\varepsilon)V(s,\varepsilon) + P_1Y(1,\varepsilon)W(s,\varepsilon) = 0, \\ Y(s,\varepsilon)W(s,\varepsilon) - Y(s,\varepsilon)V(s,\varepsilon) = I. \end{cases}$$

Учитывая, что $\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_x^s \sqrt{a(\tau)}\,d\tau\right) \le 1$ и $\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x \sqrt{a(\tau)}\,d\tau\right) \le 1$, получаем оценку (16).

Будем рассматривать класс функций $\psi(y,x)$ (зависимость от ε в дальнейшем не указываем для простоты изложения), определенных в области $||y - \hat{y}|| \le \delta$, $x \in [0,1]$, непрерывных по x и удовлетворяющих в этой области неравенствам

$$||\psi(y,x)|| \le k\varepsilon, \\ ||\psi(\bar{y},x) - \psi(\bar{\bar{y}},x)|| \le \chi\varepsilon||\bar{y} - \bar{\bar{y}}||. \qquad (18)$$

Для оператора

$$\mathcal{T}\psi(y,x) = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{G}(x,s,\varepsilon)g(y,\psi(y,s),s,\varepsilon)\,ds$$

выполняются условия принципа сжимающих отображений, т.е.

1. $||\mathcal{T}\psi(y,x)|| \le k\varepsilon$,
   $||\mathcal{T}\psi(\bar{y},x) - \mathcal{T}\psi(\bar{\bar{y}},x)|| \le \chi\varepsilon||\bar{y} - \bar{\bar{y}}||$;
2. $||\mathcal{T}\psi(\bar{y},x) - \mathcal{T}\psi(\bar{\bar{y}},x)|| \le \xi||\psi(\bar{y},x) - \psi(\bar{\bar{y}},x)||$, причем $\xi < 1$.

Действительно, можно показать, что справедливы неравенства

$$||g(y,0,x,\varepsilon)|| \le \zeta\varepsilon, \\ ||g(\bar{y},\hat{\psi},x,\varepsilon) - g(\bar{\bar{y}},\check{\psi},x,\varepsilon)|| \le \\ \le \omega\varepsilon\left(||\bar{y} - \bar{\bar{y}}|| + ||\hat{\psi} - \check{\psi}||\right),$$

где ζ, ω — положительные постоянные.

Причем для k, χ должны выполняться условия

$$c_2(\omega k\varepsilon_0 + \zeta) \le k, \\ c_2\omega\varepsilon_0 < 1, \\ c_2\omega(1 + \omega\varepsilon_0) \le \chi. \qquad (19)$$

В этом случае уравнение $\psi = \mathcal{T}\psi$ имеет единственное решение $\psi(y,x,\varepsilon)$ и справедливо следующее утверждение [12]:

Утверждение 1. *Если существует решение краевой задачи (10)–(11), то* $\exists\ \varepsilon_0,\ \delta,\ k,\ \chi:\ \forall\ \varepsilon \le \varepsilon_0$ *краевая задача (3)–(4) имеет единственное четырехпараметрическое интегральное многобразие, представимое соотношением*

$$z = \phi(y,x) + \psi(y,x,\varepsilon),$$

в котором функция $\psi(y,x,\varepsilon)$ *определена для всех* $||y-\hat{y}|| \le \delta,\ x \in [0,1],\ \varepsilon \le \varepsilon_0$*, непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет неравенствам (18).*

4. Система на многообразии. Система (13) на многообразии $z = \phi(y,x) + \psi(y,x,\varepsilon)$ сводится к рассмотрению

$$\frac{dy}{dx} = h(y, \psi(y,x,\varepsilon), x). \tag{20}$$

Линеаризуем эту систему относительно решения вырожденной системы (8)–(9). Положим $y = \hat{y} + \check{y}$ и получим

$$\tfrac{d\check{y}}{dx} = \mathcal{B}(x)\check{y} + p(\check{y},x,\varepsilon), \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered}\mathcal{B}(x) = h_y(\hat{y}(x),0,x),\\ p(\check{y},x,\varepsilon) = h(\hat{y}+\check{y}, \psi(\hat{y}+\check{y},x,\varepsilon),x) -\\ -h(\hat{y},0,x) - h_y(\hat{y},0,x)\check{y}.\end{gathered}$$

Граничные условия для системы (21) имеют следующий вид

$$M\check{y} = M_0\check{y}(0) + M_1\check{y}(1) = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим $\check{X}(x)$ фундаментальную матрицу для соответствующей (21) однородной системы уравнений, а также $\check{D} = M\check{X}$ – матрицу, полученную при подстановке в краевое условие фундаментальной матрицы. Получим, что $rang\check{D} = 2$, $dim\check{X} = 4$. Поэтому для доказательства существования решения краевой задачи (21)–(22) можно построить обобщенную матрицу Грина $\check{G}(x,s,\varepsilon)$.

По аналогии со случаем вырожденной краевой задачи, для $p(\check{y},s,\varepsilon)$ должны также выполняться определенные условия разрешимости [8]:

$$\check{P}_d^* M \int\limits_0^1 \check{K}(\cdot,s)p(\check{y},s,\varepsilon)\,ds = 0. \tag{23}$$

Здесь $\check{P}_d^*$ ($d = dim\check{X} - rang\check{D} = 2$) – матрица 2×4, состоящая из линейно-независимых строк матрицы $\check{P}^*$, ортопроектора, проектирующего R^4 на нуль-пространства $N(\check{D}^*)$; $\check{D}^*$ – 4×4-мерная матрица, сопряженная к $\check{D}$; $\check{K}(x,s)$ – 4×4-мерная матрица:

$$\check{K}(x,s) = \frac{1}{2}\check{X}(x)\check{X}^{-1}(s)sign(x-s).$$

Рассмотрим оператор

$$\check{T}\check{y} = \int\limits_0^1 \check{G}(x,s,\varepsilon)p(\check{y},s,\varepsilon)\,ds. \tag{24}$$

Используя методику, представленную в [12], можно получить оценки для $p(\check{y},x,\varepsilon)$ в пространстве функций $\check{y}$ непрерывных на отрезке $0<x<1$ и таких, что $||\check{y}|| \le l\varepsilon \le \delta$:

$$||p(\check{y},x,\varepsilon)|| \le \mu\varepsilon||\check{y}|| + \nu\varepsilon, \tag{25}$$

$\mu,\ \nu$ – положительные постоянные.

Благодаря полученным оценкам для $p(\check{y},x,\varepsilon)$ и ограниченности по модулю некоторой константой c_3 матрицы Грина (по построению), оператор (24) является сжимающим:

$$\begin{gathered}||\check{T}\check{y}|| \le c_3(l\mu\varepsilon+\nu)\varepsilon,\\ ||\check{T}\check{y} - \check{T}\check{y}^*|| \le c_3\mu\varepsilon||\check{y}-\check{y}^*||.\end{gathered}$$

Итак, если ε_0 таково, что

$$c_3(l\mu\varepsilon_0+\nu) \le l, \qquad c_3\mu\varepsilon_0 < 1, \tag{26}$$

то $\forall\varepsilon \le \varepsilon_0$ существует единственное решение $\check{y} = \check{y}(x,\varepsilon)$ системы (21), причем $||\check{y}|| \le l\varepsilon \le \delta$. Следовательно, существует единственное решение $y = y(x,\varepsilon)$ системы (20).

И в итоге существует $\begin{pmatrix} y(x,\varepsilon)\\ \psi(y,x,\varepsilon)\end{pmatrix}$ – единственное решение системы (3)–(4), непрерывное по ε.

Таким образом, справедливо

Утверждение 2. *Если существует решение краевой задачи (10)–(11) и выполнены условия разрешимости для краевой задачи (21)–(22), то краевая задача (3)–(4) имеет единственное непрерывное при* $x \in [0,1]$ *решение*

$$\begin{aligned}&\varphi(x,\varepsilon) = \hat{\varphi}(x) + O(\varepsilon),\\ &u(x,\varepsilon) = \tfrac{u_0}{\rho(x)} + O(\varepsilon),\\ &q(x,\varepsilon) = \hat{q}(x) + O(\varepsilon),\\ &\Sigma(x,\varepsilon) = \hat{\Sigma}(x) + O(\varepsilon),\\ &Q(x,\varepsilon) = \hat{Q}(x) + O(\varepsilon),\\ &r(x,\varepsilon) = \rho(x) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Библиографический список

1. Anile A.M., Romano V. Non parabolic band transport in semiconductors: closure of the moment equations // Cont. Mech. Termodyn. – 1999. – Vol. 11.

2. Romano V. Non parabolic band transport in semiconductors: closure of the of the production terms in the moment equations // Cont. Mech. Termodyn. – 2000. – Vol. 12.

3. Blokhin A.M., Bushmanov R.S., Romano V. Global existence for the system macroscopic balance equation of charge transport in semiconductors // J. Math. Anal. Apd. – 2005. – Vol. 305.

4. Blokhin A.M., Bushmanov R.S., Romano V. Asymptotic stability of the equilibrium state for the hydrodynamical model of charge transport in semiconductors based on the maximum entropy principle // Int. J. Engineering Sci. – 2004. – Vol. 42, №8–9.

5. Blokhin A.M., Bushmanov R.S., Romano V. Nonlinear asymptotic stability of the equilibrium state for the MEP model of charge transport in semiconductors // Nonlinear Analysis. – 2006 – Vol. 65.

6. Blokhin A.M., Ibragimova A.S. 1D Numerical Simulation of the MEP Mathematical Model in ballistic diode problem // Journal of Kinetic and Related Models. – 2009. – Vol. 2, №1.

7. Блохин А.М., Семисалов Б.В., Ибрагимова А.С. Численный анализ задач переноса заряда в полупроводниковых устройствах. – Saarbrucken, 2012.

8. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев, 1990.

9. Блохин А.М., Бушманова А.С. Об одном численном методе нахождения стационарных решений гидродинамической модели переносов заряда в полупроводниках // Вычислительные технологии. – 1998. – №3.

10. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М., 1962.

11. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М., 1981.

12. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М., 1973.