УДК 519.254

О. В. Махныткина

Оптимизация траектории развития слабоформализованного объекта с иерархической структурой

O. V. Makhnitkina

Optimizing a Trajectory of Development of Weakly Formalized Object with Hierarchical Structure

Предложен новый подход к моделированию траектории слабоформализованного объекта с изменчивой иерархической структурой на основе метода динамического программирования. Рассмотрена задача оптимизации траектории обучения студента.

Ключевые слова: слабоформализованный объект, иерархическая структура, динамическое программирование, траектория обучения.

In the article it is offered to use new approach to modeling a trajectory of weakly formalized object with changeable hierarchical structure basing on a method of dynamic programming. The research considers a problem of optimizing a trajectory of training students.

Key words: weakly formalized object, hierarchical structure, dynamic programming, training trajectory.

Многие социальные, экономические и технические объекты характеризуются качественной природой параметров предметной области, неоднородностью шкал измерений параметров, нелинейным характером взаимосвязи характеристик, т. е. относятся к слабоформализованному типу. Для большинства объектов при этом характерна иерархическая структура показателей. Среди работ, посвященных математическому моделированию слабоформализованных объектов, широкое распространение получили подходы к изучению статических состояний объектов, такие как теория комплексного оценивания [1–3], метод анализа иерархий Т. Саати [4; 5], гибридные экспертные системы [6; 7], и в меньшей мере изучены вопросы динамических изменений состояния слабоформализованного объекта. Особую сложность и актуальность представляет временной анализ слабоформализованных объектов с изменчивой структурой. Например, на социально-экономическое состояние регионов влияют различные целевые программы, действующие ограниченный период времени; результат обучения (компетентность) студента зависит от меняющихся каждый семестр дисциплин и тем научно-исследовательской работы и т. д. Рассматриваются постановка и решение задачи нахождения оптимальных состояний слабоформализованных объектов с изменчивой иерархической структурой.

В общем виде оценку состояния иерархического объекта можно записать в следующем виде.

Обозначим: $M = \{1,\ 2, ...,\ m\}$ — множество частных критериев, оценки $x_p \in X_p$ по которым принимают значения из множеств X_p, $p \in M$, $y_0 \in Y_0$ — интегральный показатель оценки, который вычисляется в соответствии с процедурой агрегирования $F(\cdot)\colon\ X \to Y_0$ или с учетом иерархической структуры:

$$\begin{cases} y_{ij\ldots kl} = F_{ij\ldots kl}\left(x_p\right) \\ y_{ij\ldots k} = F_{ij\ldots k}\left(y_{ij\ldots kl}\right) \\ \ldots \\ y_i = F_i\left(y_{ij}\right) \\ y_0 = F_0\left(y_i\right) \end{cases} \tag{1}$$

где $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) \in X = \prod_{p \in M} X_p$, $i = \overline{1, m_i}$, $j = \overline{1, m_j}$, $k = \overline{1, m_k}$, $l = \overline{1, m_l}$ — индексы уровней иерархии; m_i — количество показателей на уровне иерархии i; $F_{ij\ldots k}$ — процедура агрегирования на $ij\ldots k$ -м уровне иерархии. Множество оценок $y = \left(y_0, y_1, ..., y_{ij\ldots k}, \ldots y_{m\,m\,\ldots m\,m} \ldots y_{m_i m_j \ldots m_k m_l}\right)$ описывает состояние объекта.

Для описания изменений состояний слабоформализованного объекта будем использовать понятие траектории — последовательная смена состояний объекта во времени. Оптимальной будем называть траекторию, обеспечивающую на протяжении изучаемого периода лучшие результаты относительно заданного общего критерия качества системы. Нахождение оптимальной траектории развития объекта и оптимальных наборов управляющих воздействий на него возможно на основе метода динамического программирования, в основе которого лежит принцип оптимальности Р. Беллмана [8]: каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный. Опишем метод динамического программирования.

Рассмотрим состояние y объекта в динамике. Переход системы из состояния y^t в состояние y^{t+1} осуществляется под воздействием вектора управления $u^t \in \Omega_u$ с компонентами $u_1^t,...,u_q^t$ в соответствии с функциональной зависимостью $y^{t+1} = F^{t+1}(y^t, u^t)$. В начальный момент времени система находится в состоянии y^0. На 1-м шаге под действием переменной управления u^0 система переходит из состояния y^0 в состояние y^1, т. е. $y^1 = F^1(y^0, u^0)$. На последнем n-м шаге под действием переменной управления u^{n-1} система переходит из состояния y^{n-1} в состояние y^n, т. е. $y^n = F^n(y^{n-1}, u^{n-1})$. Обозначим показатель эффективности процесса управления в момент времени t через $Z^t = g^t(y^{t-1}, u^{t-1})$. Учитывая требование аддитивности функции [9], показатель эффективности на всем промежутке времени можно записать $Z = \sum_{t=1}^{n} g^t(y^{t-1}, u^{t-1}) + F^n(y^n)$. Тогда задача нахождения оптимальной траектории формулируется как задача определения управлений $u^0,\ldots, u^n$ и значений последовательности $y^0,\ldots, y^n$, которые в совокупности приводят к максимальному (минимальному) значению критерия Z.

Рассмотрим возможность применения метода динамического программирования для иерархической структуры, заданной соотношением (1). Пусть в момент времени t система показателей описывается вектором $x^t = \{x_p^t\}$. Предполагается воздействие каждого x_p^t сразу на несколько показателей $y_{ij...kl}^t$ нижнего уровня иерархии показателей, которые в свою очередь влияют на показатели верхних уровней иерархии. Тогда в качестве управления u^t будем рассматривать значения показателей x^t. Для описания изменений в структуре на каждом шаге введем переменную:

$$\delta_{p,ij...kl}^t = \begin{cases} 1, \textit{ если показатель p участвует в оценке критерия } y_{ijk}^t \\ 0, \textit{ иначе} \end{cases} \quad (2)$$

С учетом введенных предположений получаем постановку. В начальный момент времени система находится в состоянии:

$$\begin{cases} y_{ij...kl}^0 = F_{ij...kl}^0\left(x_p^0, \delta_{p,ij...kl}^0\right) \\ y_{ij...k}^0 = F_{ij...k}^0\left(y_{ij...kl}^0\right) \\ ... \\ y_i^0 = F_i^0\left(y_{ij}^0\right) \\ y_0^0 = F_0\left(y_i^0\right) \end{cases} \quad (3)$$

На 1-м шаге под действием переменной управления u^0 система переходит из состояния y^0 в состояние y^1, т. е.

$$\begin{cases} y_{ij...kl}^1 = F_{ij...kl}^1\left(y_{ij...kl}^0, u^0, \delta_{p,ij...kl}^1\right) \\ y_{ij...k}^1 = F_{ij...k}^1\left(y_{ij...k}^0, y_{ij...kl}^1\right) \\ ... \\ y_i^1 = F_i^1\left(y_i^0, y_{ij}^1\right) \\ y_0^1 = F_0\left(y_0^0, y_i^1\right) \end{cases} \quad (4)$$

На последнем n-м шаге под действием переменной управления u^{n-1} система переходит из состояния y^{n-1} в состояние y^n, т. е.

$$\begin{cases} y_{ij...kl}^n = F_{ij...kl}^n\left(y_{ij...kl}^{n-1}, u^{n-1}, \delta_{p,ij...kl}^n\right) \\ y_{ij...k}^n = F_{ij...k}^n\left(y_{ij...k}^{n-1}, y_{ij...kl}^n\right) \\ ... \\ y_i^n = F_i^n\left(y_i^{n-1}, y_{ij}^n\right) \\ y_0^{tn} = F_0\left(y_0^{n-1}, y_i^{n1}\right) \end{cases} \quad (5)$$

Показатель эффективности процесса управления в момент времени t на нижнем уровне иерархии обозначим $Z_{ij...kl}^t = g^t(y_{ij..kl}^{t-1}, u^{t-1})$. Эффективность управления для остальных уровней иерархии обозначим $Z_{ij...k}^t = g^t(y_{ij...k}^t, y_{ij...k}^{t-1})$.

Тогда эффективность управления в момент времени t вычислим по формуле

$$\begin{aligned} Z^t\left(u^{t-1}, y^{t-1}\right) &= \alpha_0 g^t(y_0^t, y_0^{t-1}) + \sum_i \alpha_i g^t(y_i^t, y_i^{t-1}) + ... \\ ... &+ \sum_i \sum_j \alpha_{ij} g^t(y_{ij}^t, y_{ij}^{t-1}) + \sum_i \sum_j ... \sum_k \sum_l \alpha_{ij...kl} g^t(y_{ij..kl}^{t-1}, u^{t-1}) \end{aligned}, \quad (6)$$

где $\alpha_{ij...kl}$ — коэффициент значимости показателя.

Решение задачи нахождения оптимальной траектории представляет собой набор векторов $s = \{(u^0, y^0),...,(u^{n-1}, y^{n-1}),(y^n)\}$ для каждого периода времени t. Поиск оптимальной траектории осуществляется за счет нахождения набора управляющих воздействий, обеспечивающего достижение оптимального значения показателя эффективности:

$$Z = \sum_{t=1}^{n} Z^t\left(u^{t-1}, y^{t-1}\right) + F^n(y_0^n). \quad (7)$$

Обозначим $\hat{Z}^t$ — максимальное значение критерия эффективности Z^t для оптимального процесса, начинающегося в момент времени t, тогда поиск решения осуществляется согласно следующим рекуррентным соотношениям:

$$\hat{Z}^n = \max_{u^n \in \Omega_{u^n}} Z^n[u^{n-1}, y^{n-1}], \quad (8)$$

$$\hat{Z}^{n-1}\left(y^{n-2}\right) = \max_{u^{n-1} \in \Omega_{u^{n-1}}} \left[Z^{n-1}[u^{n-2}, y^{n-2}] + \hat{Z}^n(y^{n-1})\right], \quad (9)$$

$$\cdots$$

$$\hat{Z}^t\left(y^{t-1}\right) = \max_{u^t \in \Omega_{u^t}} \left[Z^t[u^{t-1}, y^{t-1}] + \hat{Z}^{t+1}(y^t)\right]. \quad (10)$$

Задача оптимизации слабоформализованного объекта с изменчивой иерархической структурой возникает в различных областях: в сфере образования при оценке качества образования, в социально-экономической сфере при оценке развития муниципальных округов и т. д. Рассмотрим для иллюстрации задачу нахождения оптимальной индивидуальной траектории обучения студента, которая в соответствии с новыми федеральными государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования предполагает учет сформированности компетенций.

Пусть компетентность y_0^t определяется общекультурной компетенцией y_1^t и профессиональной компетенцией y_2^t. Общекультурная компетенция y_1^t оценивается на основании компетенций y_{11}^t, y_{12}^t и y_{13}^t, а профессиональная — на основании y_{21}^t и y_{22}^t. Пусть в каждый период времени студент осваивает одну базовую дисциплину $\acute{A}^t$ и 1 дисциплину по выбору (B_1^t или B_2^t), в этом случае управление u^t заключается в выборе одной из дисциплин. Пусть оценки по каждой дисциплине могут принимать значения: 1 — дисциплина освоена и 0 — дисциплина не освоена. Определим оптимальную индивидуальную траекторию для четырех семестров, т. е. $t = \overline{1,4}$.

Для описания взаимосвязи дисциплин и частных компетенций зададим значения δ_{pij}^t с помощью карты компетенций.

Таблица 1

Карта компетенций

Дисциплина	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{21}	y_{22}	Трудоемкость
1 семестр						
Дисциплина $\acute{A}^1$	0	1	1	1	0	2
Дисциплина B_1^1	0	0	1	1	1	2
Дисциплина B_2^1	0	0	1	0	1	2
2 семестр						
Дисциплина $\acute{A}^2$	1	1	0	1	0	4
Дисциплина B_1^2	1	0	1	1	1	2
Дисциплина B_2^2	1	0	1	0	1	2
3 семестр						
Дисциплина $\acute{A}^3$	0	1	0	0	0	3
Дисциплина B_1^3	1	0	1	1	1	2
Дисциплина B_2^3	0	0	1	1	1	2
4 семестр						
Дисциплина $\acute{A}^4$	0	1	1	1	0	2
Дисциплина B_1^4	0	0	1	1	1	2
Дисциплина B_2^4	0	0	1	0	1	2

В качестве эффективности управления будем рассматривать компетентности. В соответствии с [10] уровень сформированности частных компетенций может быть вычислен по формуле:

$$y_{ij}^{t+1} = y_{ij}^t + \sum_{p=1}^{3} \frac{\delta_{pij}^{t+1} z_p^{t+1}}{k_p^{t+1}} x_p^{t+1}, \tag{11}$$

где z_p^{t+1} — трудоемкость дисциплины p; k_p^{t+1} — количество компетенций, формируемых дисциплиной p.

Уровень сформированности компетенций y_i^t рассчитывается на основании оценок частных компетенций:

$$y_i^t = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \overline{y}_{ij}^t, \tag{12}$$

где α_{ij} — оценка значимости компетенции y_{ij}^t; $\overline{y}_{ij}^t$ — нормированное значение y_{ij}^t; k_i — количество частных компетенций y_{ij}^t, формирующих компетенцию y_i^t.

Компетентность оценивается в соответствии с правилами, представленными в таблице 2.

Таблица 2

Правила оценки компетентности

№	Общекультурные компетенции	Профессиональные компетенции	Оценка
1	>0.75	>0.85	3 (продвинутый уровень)
2	>0.75	>0,5	2 (повышенный уровень)
3	>0,5	>0.8	2 (повышенный уровень)
4	>0.25	>0.3	1 (пороговый уровень)
5	<0.5		0 (не сформирована)
6		<0.5	0 (не сформирована)

Рассмотрим ее возможные варианты состояний в 4-м семестре.

Таблица 3

Траектории обучения в 4-м семестре

Траектория обучения	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{21}	y_{22}	y_1	y_2	y_0	ЦФ
$B_1^1 \to B_1^2 \to B_1^3 \to B_1^4$	2,33	5,67	3,67	5,00	2,33	0,97	0,95	3	**6,76**
$B_1^1 \to B_1^2 \to B_1^3 \to B_2^4$	2,33	5,67	4,00	4,33	2,67	0,98	0,93	3	6,75
$B_1^1 \to B_1^2 \to B_2^3 \to B_1^4$	1,83	5,67	3,83	5,17	2,50	0,94	1	3	**6,76**
$B_1^1 \to B_1^2 \to B_2^3 \to B_2^4$	1,83	5,67	4,17	4,50	2,83	0,96	0,97	3	6,76
$B_1^1 \to B_2^2 \to B_1^3 \to B_1^4$	2,50	5,67	3,83	4,50	2,50	1,00	0,90	3	**6,75**
$B_1^1 \to B_2^2 \to B_1^3 \to B_2^4$	2,50	5,67	4,17	3,83	2,83	1,01	0,88	3	6,74
$B_1^1 \to B_2^2 \to B_2^3 \to B_1^4$	2,00	5,67	4,00	4,67	2,67	0,98	0,93	3	**6,76**
$B_1^1 \to B_2^2 \to B_2^3 \to B_2^4$	2,00	5,67	4,33	4,00	3,00	0,99	0,92	3	6,75
$B_2^1 \to B_1^2 \to B_1^3 \to B_1^4$	2,33	5,67	4,00	4,33	2,67	1,01	0,88	3	**6,75**
$B_2^1 \to B_1^2 \to B_1^3 \to B_2^4$	2,33	5,67	4,33	3,67	3,00	1,02	0,87	3	6,74
$B_2^1 \to B_1^2 \to B_2^3 \to B_1^4$	1,83	5,67	4,17	4,50	2,83	0,99	0,92	3	**6,76**
$B_2^1 \to B_1^2 \to B_2^3 \to B_2^4$	1,83	5,67	4,50	3,83	3,17	1,00	0,90	3	6,75
$B_2^1 \to B_2^2 \to B_1^3 \to B_1^4$	2,50	5,67	4,17	3,83	2,83	0,97	0,83	2	**5,74**
$B_2^1 \to B_2^2 \to B_1^3 \to B_2^4$	2,50	5,67	4,50	3,17	3,17	0,99	0,82	2	5,74
$B_2^1 \to B_2^2 \to B_2^3 \to B_1^4$	2,00	5,67	4,33	4,00	3,00	0,95	0,87	3	**6,75**
$B_2^1 \to B_2^2 \to B_2^3 \to B_2^4$	2,00	5,67	4,67	3,33	3,33	0,96	0,85	2	5,74

Для каждой траектории определяем максимальное значение целевой функции, что определяет выбор дисциплины для каждого состояния в 4-м семестре. Рассмотрим все возможные состояния системы в 3-м семестре.

Таблица 4

Траектория обучения в 3-м семестре

Траектория обучения	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{21}	y_{22}	y_1	y_2	y_0	ЦФ
$B_1^1 \to B_1^2 \to B_1^3$	2,33	5,00	2,33	3,67	1,67	0,58	0,58	1	12,34
$B_1^1 \to B_1^2 \to B_2^3$	1,83	5,00	2,50	3,83	1,83	0,57	0,60	1	**12,36**
$B_1^1 \to B_2^2 \to B_1^3$	2,50	5,00	2,50	3,17	1,83	0,60	0,55	1	12,33
$B_1^1 \to B_2^2 \to B_2^3$	2,00	5,00	2,67	3,33	2,00	0,59	0,57	1	**12,34**
$B_2^1 \to B_1^2 \to B_1^3$	2,33	5,00	2,67	3,00	2,00	0,61	0,53	1	13,33
$B_2^1 \to B_1^2 \to B_2^3$	1,83	5,00	2,83	3,17	2,17	0,60	0,55	1	**13,34**
$B_2^1 \to B_2^2 \to B_1^3$	2,50	5,00	2,83	2,50	2,17	0,56	0,50	1	12,32
$B_2^1 \to B_2^2 \to B_2^3$	2,00	5,00	3,00	2,67	2,33	0,55	0,52	1	**13,33**

Рассмотрим все возможные состояния системы во 2-м семестре.

Таблица 5

Траектория обучения во 2-м семестре

Траектория обучения	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{21}	y_{22}	y_1	y_2	y_0	ЦФ
$B_1^1 \to B_1^2$	1,83	2,00	1,83	3,17	1,17	0,26	0,32	1	**19,76**
$B_1^1 \to B_2^2$	2,00	2,00	2,00	2,67	1,33	0,27	0,30	1	19,74
$B_2^1 \to B_1^2$	1,83	2,00	2,17	2,50	1,50	0,28	0,28	0	**19,74**
$B_2^1 \to B_2^2$	2,00	2,00	2,33	2,00	1,67	0,22	0,27	0	19,66

Рассмотрим все возможные состояния системы в 1-м семестре.

Таблица 6

Траектория обучения в 1-м семестре

Траектория обучения	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{21}	y_{22}	y_1	y_2	y_0	ЦФ
B_1^1	0,00	0,67	1,33	1,33	0,67	0,07	0,10	0	**23,93**
B_2^1	0,00	0,67	1,67	0,67	1,00	0,08	0,08	0	23,91

В результате решения оптимизационной задачи получаем оптимальную траекторию обучения $B_1^1 \to B_2^2 \to B_1^3 \to B_1^4$.

Новым результатом работы является рассмотрение возможности применения метода динамического программирования для моделирования и оптимизации траектории слабоформализованного объекта с изменчивой иерархической структурой. Преимуществом такого подхода является то, что на каждом шаге производится выбор оптимальных управляющих воздействий и в случае отклонения от оптимальной траектории существует возможность выбора управляющих воздействий с учетом сложившейся ситуации без дополнительных вычислений.

Библиографический список

1. Андронникова Н. Г., Бурков В. Н., Леонтьев С. В. Комплексное оценивание в задачах регионального управления. — М., 2002.

2. Новиков Д. А., Глотова Н. П. Модели и механизмы управления образовательными сетями и комплексами. — М., 2004.

3. Семенов И. Б., Чижов С. А., Полянский С. В. Комплексное оценивание в задачах управления социально-экономическими системами. — М., 1996.

4. Горбатков Д. Г. Алгоритм поиска рассогласованных оценок предпочтительности для метода анализа иерархий // Вестник университетского комплекса: сб. науч. тр. / под общ. ред. Н. В. Василенко. — Красноярск, 2005.

5. Чернышева Т. Ю., Захарова А. А., Мицель А. А. Иерархическая модель оценки состояния социально-экономического развития муниципального образования // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 313, № 6.

6. Пятковский О. И. Интеллектуальные компоненты автоматизированных информационных систем управления предприятием: монография. — Барнаул, 1999.

7. Томашев М. В. Прогнозирование востребованности специальности с использованием гибридной экспертной системы // Ползуновский вестник. — 2006. — № 1.

8. Беллан Р. Динамическое программирование. — М., 1960.

9. Черноусько Ф.Л. Динамическое программирование // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №2.

10. Алгазин Г. И., Чудова О. В. Информационные технологии комплексной оценки компетентности выпускника вуза // Вестник НГУ. Сер.: Информационные технологии. — 2009. — Т. 7, вып. 3.