

*А. В. Жариков*

## Исследование скорости сходимости некоторых алгоритмов блочного линейного программирования\*

*A. V. Zharikov*

## The Rate of Convergence of Some Algorithms for Linear Programming Block

Рассматривается задача исследования эффективности методов декомпозиции блочных задач линейного программирования. Имитационным моделированием получены оценки скорости сходимости иерархических алгоритмов с помощью методов Данцига-Вульфа, Корнаи-Липтака и метода отсечений.

Результаты имеют теоретическое значение при конструировании новых иерархических алгоритмов и прикладную значимость при организации межуровневого информационного взаимодействия в корпоративных системах управления.

**Ключевые слова:** блочное программирование, методы декомпозиции, иерархические алгоритмы, скорость сходимости.

Рассмотрим следующую экономическую ситуацию. Объединение состоит из  $T$  предприятий, каждое из которых выпускает продукцию  $n_t$  видов, потребляя ресурсы, которыми распоряжается управляющая компания объединения (центр) и ресурсы, являющиеся «собственностью» каждого предприятия. Предполагаются известными матрицы  $A_t, \bar{A}_t$  норм потребления ресурсов, векторы  $B \in R^m, B_t \in R^{m_t}$  лимитов ресурсов соответственно центра и локальных ресурсов предприятий и вектор  $P_t \in R^{n_t}$  коэффициентов дохода от реализации продукции предприятием  $t$  ( $t=1, \dots, T$ ). Требуется найти сбалансированный по ресурсам план выпуска продукции, дающий максимальный доход объединению.

Перейдем к формированию условий модели планирования. Пусть неотрицательный вектор  $x_t \in R^{n_t}$  — план предприятия  $t$ . Тогда ограничение по локальному ресурсу записывается в виде

$$A_t x_t \leq B_t, t = 1, \dots, T.$$

Множество  $X_t$  допустимых планов предприятия  $t$  задается так:

$$X_t = \{x_t \in R^{n_t} \mid A_t x_t \leq B_t, x_t \geq 0\}, t = 1, \dots, T.$$

Сбалансированность плана по ресурсам объединения:

This paper deals with research on the effectiveness of block decomposition methods for linear programming. Simulation modeling allows us to obtain the rates of convergence of hierarchical algorithms that are obtained by the Dantzig-Wolfe, Kornai-Liptak methods and truncation method.

The results have theoretical importance in the design of new hierarchical algorithms and applied significance in organization of inter-level information exchange in enterprise management.

**Key words:** block programming, decomposition methods, hierarchical algorithms, convergence rate.

$$\sum_{t=1}^T \bar{A}_t x_t \leq B,$$

а целевая функция принятия решений имеет вид

$$F = \sum_{t=1}^T P_t x_t \rightarrow \max.$$

Для сравнения эффективности информационных процессов при решении записанной задачи годового планирования рассмотрим три метода блочного программирования: Данцига-Вульфа, Корнаи-Липтака и метод отсечений [1]. При исследовании процессов согласования решений используются подходы, описанные в работах [1–9]. Особенность выбранных методов согласования решений состоит в следующем. В методе Данцига-Вульфа широко используется система внутрифирменных цен, в методе отсечений согласование осуществляется только путем обмена вариантами планов производства. Метод Корнаи-Липтака занимает промежуточное положение. В качестве аналога цен используются двойственные переменные задачи центра, которые устанавливают для центра приоритетность вариантов планов, выбираемых предприятиями.

Исследование эффективности данных схем обмена информацией проводится путем многократной генерации условий задачи планирования и последующим решением каждым методом. Количественные оценки

\* Работа выполнена в рамках государственного задания «Изучение процессов конвекции и теплопереноса в анизотропных областях и областях с границами раздела» №7.3975.2011.

сравнения схем проводятся по числу итераций, которые необходимы для нахождения оптимального плана. Алгоритмы решения задач реализованы как в среде электронных таблиц MS Excel, так и в среде математического пакета MATLAB.

Генерация проводилась для разных размерностей матриц  $\bar{A}$ ,  $A$ ,  $B$ . Задачи разбиты на три группы:

1) генерация проводилась без изменения общей структуры матриц  $\bar{A}_r$ ,  $A_r$ ,  $B$ , т.е. размерность всех матриц оставалась неизменной, а генерировались только значения элементов матриц;

2) включает в себя задачи с изменением количества ограничений для ресурсов объединения предприятий, т.е. изменение размерности матриц  $\bar{A}_r$ .

3) задачи, сгенерированные при изменении количества предприятий, при одинаковом числе централизованных ресурсов.

Первый вид задач исследован для оценки эффективности процессов согласования решений. Остальные группы сгенерированных задач направлены на изучение чувствительности к изменениям структуры задачи планирования.

Описание процесса планирования проведем на примере метода Данцига-Вульфа [1]. Полное решение задачи оптимального планирования состоит из следующих трех этапов (рис. 1):

1. Нахождение опорного (начального) плана и соответствующего базисного множества  $K^{(1)}$  (этап запуска алгоритма).

2. Поиск решения координирующей задачи (информационный этап), который заканчивается, если индикатор оптимальности  $z_t^k \geq 0$ .

3. Восстановление решения исходной задачи планирования (этап поиска решений).

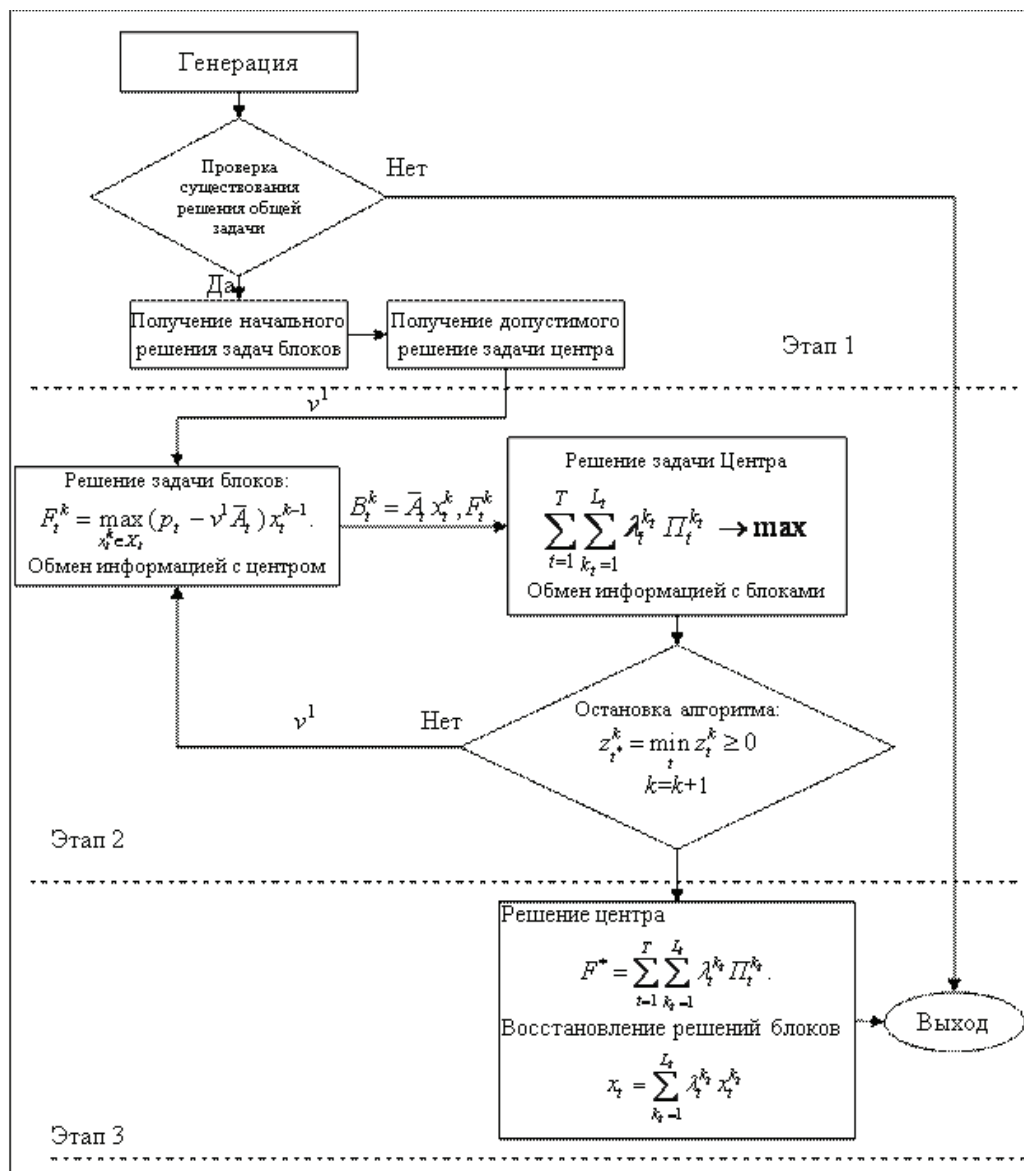


Рис. 1. Процесс согласования корпоративного решения методом Данцига-Вульфа

Таким образом, применяя этот метод, межуровневое информационное взаимодействие в корпоративных системах будет состоять из следующих этапов:

1) производится декомпозиция задачи на блоки (предприятия);

2) на уровне предприятий находится опорный (допустимый) план производства, и информация о нем передается в центр;

3) на уровне центра находится решение в виде заданий для предприятий и происходит обмен трансфертными ценами на ресурсы объединения;

4) на уровне предприятий находится текущий план производства и отправляется в центр в виде информации о прибыли предприятия и текущем потреблении ресурсов объединения;

5) происходит информационное взаимодействие путем последовательного выполнения шагов 3 и 4;

6) после окончания шага 5 происходит восстановление решений предприятий, оценка эффективности найденного решения и расчет вознаграждений для предприятий.

Рассмотрим процесс согласования корпоративных решений методом Корнаи-Липтака.

Шаг 0. Выбираем начальное распределение ресурсов объединения

$$z^1 \in Z = \left\{ z \mid \sum_{t=1}^T z_t \leq B; z_t \geq 0, t = \overline{1, T} \right\}.$$

Примем  $r = 1$ .

Шаг 1. Решаем задачи предприятий для  $z_t = z_t^r$ . Находим  $F_t(z_t^r), \pi_t^r, t = 1, \dots, T$ , где  $\pi_t^r$  — соответствующие двойственные переменные.

Шаг 2. Решаем координирующую задачу центра. Находим  $\bar{F}^r, z_t, t = 1, \dots, T$ .

Шаг 3. Проверяем условие остановки итерационного процесса  $\bar{F}^r - F^r \leq \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  — заданная точность решения задачи по функционалу. Если это условие выполняется, то решение найдено, иначе полагаем  $r = r + 1$ ;  $z_t^r = \bar{z}_t, t = 1, \dots, T$ . Идем к шагу 1.

Оптимальный план объединения отыскивается решением задач предприятий при конечном распределении ресурсов объединения:  $z_t = \bar{z}_t$ .

Таким образом, применяя схему процесса, организованную по методу Корнаи-Липтака, межуровневое информационное взаимодействие в корпоративных системах состоит из следующих этапов:

1) задается начальное распределение ресурсов объединения и производится задание условий задачи планирования для предприятий;

2) на уровне предприятий находится опорный (допустимый) план производства для начальных значений расходов ресурсов объединения и передается в виде оценок цен на ресурсы объединения и значений целевых функций предприятий;

3) на уровне центра находится решение в виде новых значений допустимых расходов ресурсов объединения для каждого предприятия;

4) на уровне предприятий уточняется текущий план производства для значений ресурсов объединения и передается в виде цен на ресурсы объединения и значений целевых функций;

5) происходит информационное взаимодействие путем выполнения шагов 3 и 4;

6) после окончания шага 5 происходит восстановление решений предприятий, оценка эффективности найденного решения и расчет вознаграждений для предприятий.

В отличие от алгоритма метода Данцига-Вульфа, центр не устанавливает трансфертные цены на ресурсы объединения, а получает их оценки от предприятий. Данный факт указывает на ослабление степени централизации, что позволяет реализовывать на нижнем уровне не жестко регламентированные планы производства.

Метод отсечений основан на принципе последовательного восстановления в центре допустимого множества решений. Стоит отметить, что оценки сходимости данного метода в современной литературе отсутствуют, что позволяет судить о новизне проводимого исследования.

Перепишем задачу планирования в свернутом виде [1]:

$$Z = \left\{ (z_1, \dots, z_T) \mid z_1 + z_2 + \dots + z_T \leq B; z_t \geq 0, t = \overline{1, T}, z_t \in R^m \right\}.$$

Задача центра:

$$F^* = \arg \max_{z \in Z} \left( \sum_{t=1}^T F_t(z_t) \right).$$

Задача предприятия  $t, t = \overline{1, T}$ :

$$\delta_t = \min \{ \| z_t^* - z_t(x_t) \| \mid x_t \in X_t \} = 0,$$

где  $z_t^*$  — одно из решений задачи центра;  $z_t(x_t)$  — вектор-функция зависимости прибыли и потребляемых ресурсов от планов каждого предприятия.

Процесс согласования корпоративных решений метода отсечений имеет вид:

Шаг 1 (запуск алгоритма). Формируем множество  $Z^1 \supseteq Z$ . Примем  $k = 1$ .

Шаг 2. Находим  $z^k$ .

Шаг 3. Находим  $\delta^k$  и  $\bar{z}^k = z(x^k)$ . Если  $\delta^k = 0$ , то идем к шагу 5.

Шаг 4. Записываем множества  $H(z^k)$  и  $Z^{k+1} = Z^k \cap H(z^k)$ . Примем  $k = k + 1$ . Идем к шагу 2.

Шаг 5. Записываем решение исходной задачи:  $x^* = x^k$ .

Информационное взаимодействие в корпоративных системах на основе алгоритма метода отсечений состоит из следующих этапов:

1) производится декомпозиция задачи планирования на задачу центра и задачи предприятий;

2) на уровне предприятий находятся опорные (начальные) планы производства, которые передаются в виде текущих потреблений ресурсов и достигнутого уровня прибыли;

3) на уровне центра находится решение в виде новых значений допустимых расходов ресурсов объединения для каждого блока;

4) на уровне предприятий рассчитывается текущий план производства из условия минимизации разности между текущим потреблением и значением плана потребления ресурсов объединения из центра. Далее посылается информация в центр: прибыль предприятия и разность между фактическим потреблением ресурса и потреблением, заданным центром;

5) происходит информационное взаимодействие путем выполнения шагов 3 и 4;

6) после 5 этапа происходит восстановление решений предприятий, оценка эффективности найденного решения и расчет вознаграждений для предприятий.

Данная схема информационного взаимодействия носит исполнительский характер, но обмен информации заключается в передаче плана использования ресурсов объединения и передаче прибыли предприятий, что имеет практическую ценность по сравнению с другими методами.

Для сгенерированных задач, разбитых на группы, были проведены численные исследования сходимости для каждого процесса согласования решений.

Для первой группы задач (изменяются только значения матриц  $\bar{A}$ ,  $A$ ,  $B$ ) результаты численного моделирования приведены на рисунках 2–4.

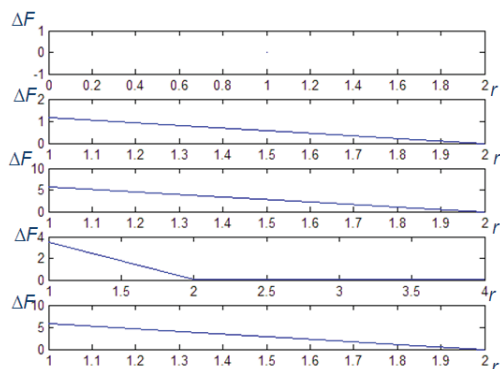


Рис. 2. График сходимости метода Д — В для задач первого вида

Анализ графиков показывает, что быстрее всех сходится метод Данцига-Вульфа, в среднем ему требуется две глобальных итерации. Если сравнивать графики метода отсечений и алгоритма Корнаи-Липтака, то не трудно заметить, что алгоритм Корнаи-Липтака сходится быстрее во всех задачах за исключением последней задачи. Следовательно, можно предположить, что в среднем эффективность алгоритма Корнаи-Липтака выше, чем у метода отсечений.

Приведем результаты численного моделирования на основе схем алгоритмов методов Д-В, К-Л и метода отсечений для второго типа задач (изменяется количество ограничений для норм и лимитов потребления ресурсов объединения предприятий).

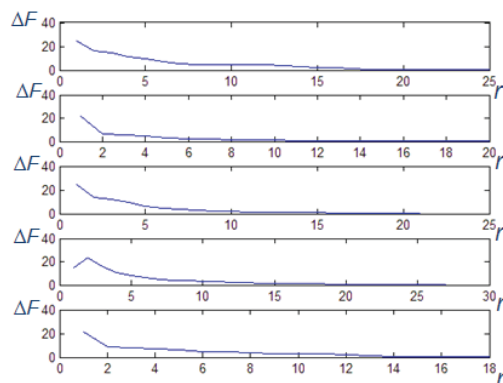


Рис. 3. График сходимости метода отсечений для задач первого вида

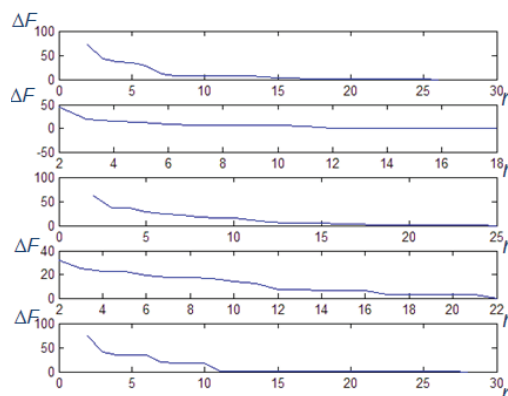


Рис. 4. График сходимости алгоритма К — Л для задач первого вида

Результаты скорости сходимости приведены на рисунках 5–7.

Метод Д-В скорость сходимости не изменяется, т.е. на скорость сходимости метода не влияет размерность матрицы  $\bar{A}$ .

Для метода К-Л и метода отсечений, увеличение размерности матрицы  $\bar{A}$  влечет увеличение количества итераций, т.е. имеется чувствительность к изменению размерности матрицы  $\bar{A}$ . Причем соотношение между скоростями сходимости указанных методов остается неизменным.

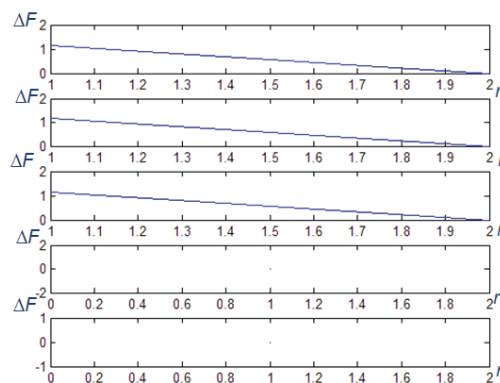


Рис. 5. График сходимости метода Д — В для задач второго вида

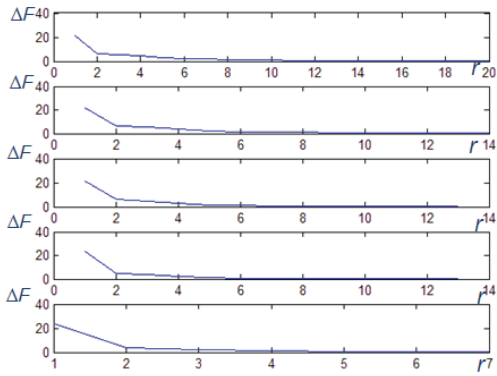


Рис. 6. График сходимости метода отсечений для задач второго вида

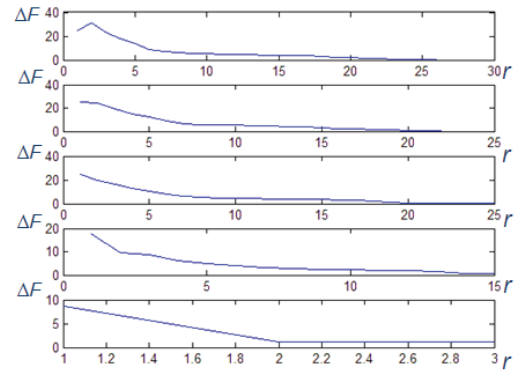


Рис. 9. График сходимости метода отсечений для задач третьего вида

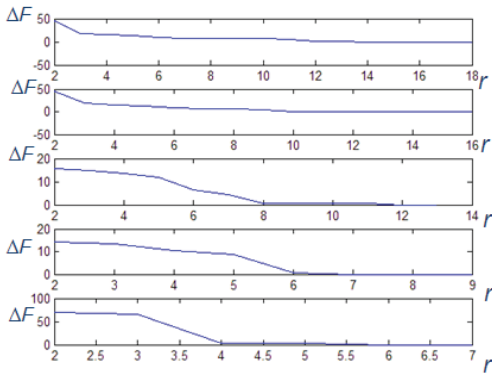


Рис. 7. График сходимости алгоритма К — Л для задач второго вида

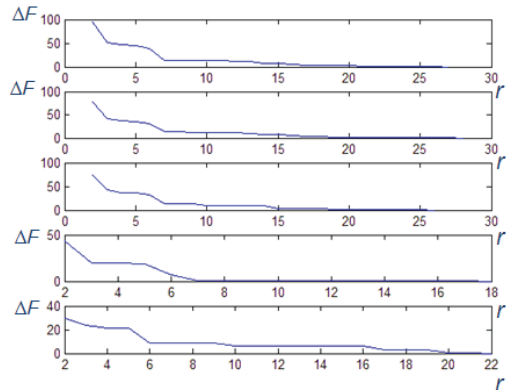


Рис. 10. График сходимости алгоритма К — Л для задач третьего вида

Для третьей группы задач (изменяется количество блоков) метод Д — В сходится за две глобальных итерации (рис. 8), из чего можно сделать вывод, что количество блоков не влияет на эффективность метода.

В алгоритме метода отсечений строго прослеживается зависимость количества итераций от количества блоков (рис. 9), что говорит о сильной чувствительности эффективности метода к изменению количества блоков.

Алгоритм К — Л, как видно из графиков (рис. 8) имеет очень слабую чувствительность к изменению количества блоков.

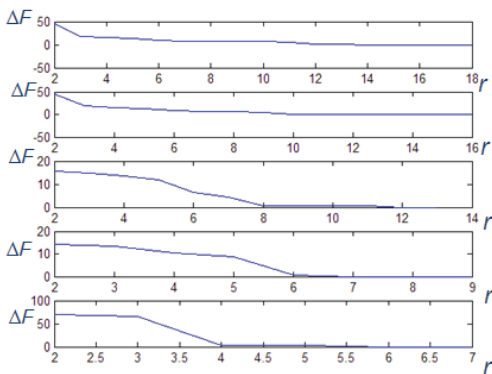


Рис. 8. График сходимости метода Д–В для задач третьего вида

Анализ результатов показал, что быстрее всех сходится метод Данцига-Вульфа, в среднем ему требуется 2–4 глобальных итерации. Процесс согласования методом Корнай-Липтака медленнее первого, но сходится быстрее почти во всех случаях в сравнении с методом отсечения. Следовательно, можно предположить, что в среднем эффективность метода Корнай-Липтака выше, чем у метода отсечений.

При численном моделировании изучалась скорость сходимости процесса согласования решений для трех методов при изменениях числа предприятий и числа централизованных ресурсов. Многовариантными расчетами показано, что для метода Данцига-Вульфа скорость сходимости не зависит от числа предприятий объединения. В процессе согласования решений другими методами строго прослеживается положительная зависимость количества итераций от количества предприятий, что говорит о сильной чувствительности к изменению числа предприятий в объединении. Для всех методов увеличение числа централизованных ресурсов влечет увеличение количества итераций. Причем соотношение между скоростями сходимости указанных методов остается неизменным.

Результаты сравнения эффективности схем информационного взаимодействия в корпоративной си-

стеме на основе методов блочного линейного программирования можно представить в виде таблицы,

в которой указаны ранги методов для разных признаков сравнения.

Эффективность схем организации процессов согласования корпоративных решений  
(1 — высокая оценка, 3 — низкая)

Показатели сравнения	Данцига-Вульфа	Корнаи-Липтака	Метод отсечений
Степень централизации	1	3	2
Эффективность методов	1	2	3
Эффективность при увеличении числа централизованных ресурсов	1	2	3
Эффективность при увеличении количества предприятий в объединении	1	3	2

Как видно из таблицы, эффективность метода Данцига-Вульфа самая высокая, однако в процессе решения между центром и агентами происходит обмен теневыми (трансфертными) ценами, т. е. центром сообщаются цены на ресурсы объединения. Таким образом, можно признать целесообразным использова-

ние внутрифирменных цен для согласования корпоративных решений. Процесс согласования методом Корнаи-Липтака имеет в целом большую эффективность, чем метод отсечений, однако на малом числе предприятий метод отсечений показывает большую скорость сходимости, чем процесс Корнаи-Липтака.

### Библиографический список

1. Мамченко О.П., Оскорбин Н.М. Моделирование иерархических систем: учебник для вузов. — Барнаул, 2007.
2. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. — М., 1977.
3. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. — М., 1973.
4. Оскорбин Н.М. Математические модели систем с латентными переменными // Известия АлтГУ. — 2012. — № 1/2 (73).
5. Оскорбин Н.М., Дубина И.Н. Моделирование поведения субъектов инновационной деятельности при различных схемах стимулирования // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер.: Социально-экономические науки. — 2010. — Т. 10, вып. 4.
6. Лэддон Л. Оптимизация больших систем. — М., 1975.
7. Алгазин Г.И., Оскорбин Н.М. Применение моделей системного компромисса для анализа и оптимизации производственных систем (на примере стимулирования напряженных производственных заданий) // Известия АлтГУ. — 2002. — № 1 (23).
8. Боговиз А.В., Оскорбин Н.М., Жариков А.В. Информационные процессы координации корпоративных решений и их компьютерное моделирование // Вестник Новосибирского государственного университета. — 2010. — Т. 8, вып. 1.
9. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. — М., 2005.