

А.М. Сагалаков, А.В. Проскурин

Устойчивость течения в трубе кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля

A.V. Proskurin, A.M. Sagalakov

The Stability of Flow in a Annular Cross-Section Pipe in Longitudinal Magnetic Field

Исследуется устойчивость к малым возмущениям течения электропроводящей жидкости между коаксиальными цилиндрами при наличии продольного магнитного поля. Рассмотрена полная система уравнений магнитной гидродинамики. Использовался эффективный метод дифференциальной прогонки. Подробно исследовались зависимости критических чисел Рейнольдса от электропроводности. Обнаружено скачкообразное изменение критических чисел Рейнольдса.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, магнитная гидродинамика.

Исследования устойчивости к малым возмущениям МГД-течений электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле имеют долгую историю [1–7] и представляют значительный интерес для построения общей теории ламинарно-турбулентного перехода течений вязкой жидкости в каналах, изучения бифуркаций решений уравнения Навье-Стокса. Данная задача является классической, однако она трудна для исследования: до сих пор отсутствуют простые и эффективные методы исследования неустойчивости Толлмина-Шлихтинга в линейном приближении при больших числах Рейнольдса и немалых магнитных числах Прандтля. Экспериментальная проверка результатов и положений линейной теории гидродинамической устойчивости также составляет сложную проблему, особенно при больших магнитных числах Прандтля.

Прямое численное моделирование развития неустойчивости позволяет получать результаты, близкие к экспериментальным [8–10]. Однако такие вычисления являются очень сложными и требуют больших затрат, связанных с необходимостью использования суперкомпьютеров. При этом трудно установить основные закономерности развития и стабилизации возмущений от входящих в уравнения параметров, так как для каждого набора параметров приходится исследовать множество возмущений различной формы и амплитуды. Кроме того, методы прямого численного моделирования имеют существенные ограничения по числам Рейнольдса и порядку системы решаемых уравнений.

The analysis is applied to investigate stability to low perturbation of the flow of electrically conducting viscous incompressible fluid between two coaxial unbounded cylinders affected by a longitudinal magnetic field. We use a complete system of magnetohydrodynamic equations and effective method of differential run to study in detail the influence of the critical Reynolds number on electric conductivity. The jump stabilization has been observed.

Key words: hydrodynamics stability, magnetohydrodynamics.

В то же время современные возможности вычислительной техники позволяют эффективно исследовать малые возмущения магнитогидродинамических течений в цилиндрической геометрии с использованием полной системы уравнений магнитной гидродинамики в широком диапазоне входящих в уравнения параметров и при больших числах Рейнольдса.

В качестве характерного масштаба длины выберем ширину зазора между цилиндрами – d . Безразмерное значение радиуса внутреннего цилиндра $\xi = r_{in}/d$ будет характеризовать геометрию течения. Примем за характерный масштаб скорости V_0 среднерасходную скорость в осевом направлении. Величину напряженности однородного продольного магнитного поля H_0 примем в качестве характеристического масштаба для напряженности магнитного поля.

Система уравнений магнитной гидродинамики для несжимаемой вязкой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla \left(p + Al \frac{H^2}{2} \right) + Al(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{V} – вектор скорости; \mathbf{H} – напряженность магнитного поля; $Al = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_0^2}$ – число Альфвена;

$Re = \frac{V_0 d}{\nu}$; $R_m = \frac{4\pi\sigma V_0 d}{c^2}$ – число Рейнольдса и магнитное число Рейнольдса; c – скорость света; σ – электропроводность жидкости; ρ – плотность жидкости, ν – кинематическая вязкость. Удобно ввести обобщенное давление $P = p + Al \frac{H^2}{2}$.

Таким образом, структура уравнений магнитной гидродинамики такова, что три параметра (например, Al , Re , P_m) полностью определяют поведение системы при заданных геометрии канала и внешнего магнитного поля. Также при расчетах использовалось магнитное число Прандтля $P_m = \frac{R_m}{Re}$, прямо пропорциональное электропроводности.

Решение системы уравнений (1)–(3) представим в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad (5)$$

$$P = P_0 + P, \quad (6)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{H}_0 , P_0 – стационарное решение, а величины \mathbf{v} , \mathbf{h} , P – возмущения скорости, магнитного поля и давления. Возмущение представим в виде

$$(\mathbf{v}, \mathbf{h}, P) = \{\omega_r(r), \omega_\varphi(r), \omega_z(r), h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r), q(r)\} e^{i\alpha(z-Ct)+im\varphi}, \quad (7)$$

где $\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z$ – компоненты амплитуды возмущений скорости; h_r, h_φ, h_z – амплитуды напряженности магнитного поля; q – амплитуда давления; α – осевое волновое число; m – азимутальное волновое число ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$ из условия периодичности); C – комплексная фазовая скорость, в которой X – собственно фазовая скорость, а αY – декремент затухания возмущения ($Y < 0$) или инкремент его нарастания ($Y > 0$).

Подставим (4)–(6) и (7) в (1)–(3). После простых, но громоздких преобразований получим

$$D\omega_r = -q' - Ah'_z + Aich_r - \frac{1}{Re} \left(i\alpha\omega'_z + \frac{\gamma}{r} (r\omega_\varphi)' \right), \quad (8)$$

$$D\omega_\varphi = -\gamma q - Alh'_z + Alich_\varphi + \frac{1}{Re} \left(\left(\frac{(r\omega_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} \omega_r \right), \quad (9)$$

$$D\omega_z + \omega_r V'_0 = -i\alpha q + \frac{1}{Re} \frac{(r\omega'_r)'}{r}, \quad (10)$$

$$\Omega h_r = i\alpha\omega_r - \frac{1}{R_m} \left(i\alpha h'_z + \frac{\gamma}{r} (rh_\varphi)' \right), \quad (11)$$

$$\Omega h_\varphi = i\alpha\omega_\varphi + \frac{1}{R_m} \left(\left(\frac{(rh_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} h_r \right), \quad (12)$$

$$\frac{(rh_r)'}{r} = -\gamma h_\varphi - i\alpha h_z \quad (13)$$

$$\frac{(r\omega_r)'}{r} = -\gamma\omega_\varphi - i\alpha\omega_z \quad (14)$$

где $D = i\alpha(V_0 - C) + \frac{m^2}{Re r^2} + \frac{\alpha^2}{Re}$, $\Omega = i\alpha(V_0 - C) + \frac{m^2}{R_m r^2} + \frac{\alpha^2}{R_m}$, $\gamma = \frac{im}{r}$.

Для дальнейших преобразований систему (8)–(14) удобно привести к виду

$$\begin{aligned} W' &= M_1 W + M_2 V \\ V' &= M_3 W + M_4 V \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{где } W = \left\{ r\omega_r, r\omega_\varphi, \omega_\varphi, \frac{(rh_\varphi)'}{r}, rh_r \right\},$$

$$V = \left\{ q, \frac{(r\omega_\varphi)'}{r}, r\omega'_z, h_z, rh_\varphi \right\},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & -i\alpha r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i\alpha R_m}{r} & 0 & 0 & -\frac{2\gamma}{r^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Omega R_m}{r} \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha r & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{D}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{i\alpha Al}{r} \\ -\frac{2\gamma}{r^2} & \frac{D Re}{r} & 0 & 0 & 0 \\ U' Re & 0 & Dr Re & 0 & 0 \\ \frac{R_m}{r} & 0 & 0 & \frac{i\gamma}{r} & \frac{i\Omega R_m}{\alpha r} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma}{Re} & -\frac{i\alpha}{r Re} & 0 & 0 \\ \gamma Re & 0 & 0 & 0 & -\frac{i\alpha Al Re}{r} \\ i\alpha r Re & 0 & 0 & -i\alpha Al r Re & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия прилипания и непроницаемости на стенках канала, а также идеальной электрической проводимости имеют вид

$$W = 0. \tag{16}$$

Система уравнений (15) с граничными условиями (16) определяет задачу на отыскание собственных значений C .

Для решения задач гидродинамической устойчивости могут использоваться следующие численные методы: коллокаций [11, 12], методы пошагового интегрирования: метод ортогонализации С.К. Годунова, метод исключения [13–16].

Процедуры ортогонализации и исключения требуют большого объема вычислений, который непомерно возрастает с увеличением порядка решаемой системы. В.А. Сапожниковым, Н.Н. Яненко, М.А. Гольдштиком для решения задач гидродинамической устойчивости был разработан метод дифференциальной прогонки [13, 14]. Метод дифференциальной прогонки не связан с построением фундаментальной системы решений, за счет чего достигается упрощение алгоритма и уменьшение числа операций.

Метод дифференциальной прогонки длительное время использовался учеными СО РАН для исследования устойчивости различных течений вязкой жидкости (см.: [13]).

При использовании метода дифференциальной прогонки задача на собственные значения сводится к последовательности задач Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая легко интегрируется численно. Одновременно организуется итерационный процесс. Собственные значения определяются при прямой прогонке. После определения собственного значения соответствующую собственную функцию можно найти обратной прогонкой.

На небольших отрезках вблизи границ канала прогонка велась по схеме

$$W = AV, \tag{17}$$

определенной граничными условиями, а далее использовалась «обращенная» схема прогонки

$$V = A^{-1}W, \tag{18}$$

Соответствующие системы уравнений для матриц A легко получить, подставив (17) и (18) в (15). Интегрирование велось от границ канала к некоторой критической точке r_C , в которой $U(r_C) = X$. В точке r_C , так же, как и в точках смены прогоночных соотношений, векторы W и V должны быть непрерывны, что позволяет записать дисперсионное соотношение

$$\det(A^+(C) - A^-(C)) = 0, \tag{19}$$

где знаками «+» и «-» обозначены прогоночные соотношения, начатые от разных границ канала.

На рисунке 1 приведены зависимости $Re^*(\xi)$ при $Al = 0.01$ и $P_m = 0.4$, где Re^* – критическое число Рейнольдса, при переходе через которое течение становится неустойчивым к малым возмущениям. Здесь изображены графики критических зависимостей для мод $m = 0, 1, 2$, которые представляют наибольший интерес. Критические зависимости для $m = 0$ обозначены сплошной линией, которая отделяет область устойчивости моды $m = 0$ от области неустойчивости.

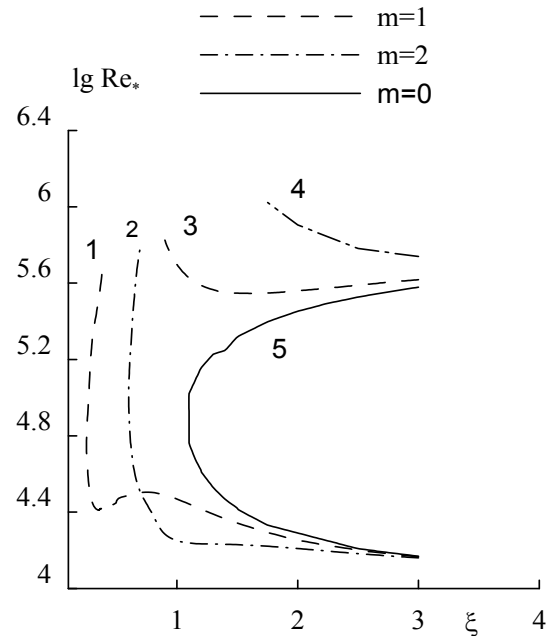


Рис. 1. Критические зависимости от ξ при $P_m = 0.4$ и $Al = 0.01$

Как видно из рисунка, эта зависимость состоит из верхней и нижней ветвей, которые, соответственно, ограничивают область неустойчивости свер-

ху и снизу по числам Рейнольдса. При уменьшении ξ эти ветви соединяются и при $\xi \leq 1.1$ мода $m = 0$ устойчива. Пунктирной линией обозначены критические зависимости для моды $m = 1$, а пунктирной с точкой – для моды $m = 2$. Для мод $m = 1, 2$ область неустойчивости имеет иную форму, чем для моды $m = 0$. Ветви критических зависимостей, обозначенные цифрами 3 и 4, увеличиваются при уменьшении ξ , что означает расширение области неустойчивости за счет верхней границы. Ветви 1 и 2 при уменьшении ξ сначала тоже возрастают, но медленнее, чем нижняя ветвь моды $m = 0$, кривая 1, соответствующая $m = 1$, имеет локальный максимум и минимум. Однако при дальнейшем уменьшении ξ графики критических зависимостей резко изгибаются вверх и при увеличении чисел Рейнольдса, вправо, образуя дугу выпуклостью в сторону уменьшения параметра ξ . Таким образом, область неустойчивости ограничена со стороны малых ξ и существуют малые конечные значения ξ , при которых данное течение устойчиво. Если, наоборот, рассматривать величины $\xi > 3$, то следует отметить сближение критических чисел для мод $m = 0, 1, 2$. При больших ξ наиболее опасной является мода $m = 0$, что соответствует теореме Сквайра для плоских течений [14]. Таким образом, картина устойчивости мод $m = 0, 1, 2$ такова: при больших ξ наблюдается соответствие плоскому случаю, при уменьшении ξ область неустойчивости моды $m = 0$ сужается, а моды $m = 1, 2$ сначала расширяются, а потом тоже уменьшаются, причем каждая из мод $m = 0, 1, 2$ имеет критическое значение ξ_* , такое, что при $\xi < \xi_*$ эта мода устойчива.

На рисунке 2 приведены нейтральные зависимости для мод $m = 0, 1, 2$ при $P_m = 0.01$, $\xi = 1.3$, $Al = 0.005$. Моды $m = 0, 1, 2$ обозначены аналогично рисунку 1. Нейтральные кривые отделяют область устойчивости от области неустойчивости. Носик нейтральной кривой соответствует критическому числу Рейнольдса. Изображенные на рисунке 2 графики нейтральных кривых замкнуты, что означает наличие островков неустойчивости. По-видимому, при больших числах Рейнольдса такие области неустойчивости образуются путем отщепления от основной нейтральной кривой.

На рисунке 3 показаны зависимости $Re^*(P_m)$ при $\xi = 1.3$ и $A = 0.01$. Они имеют сложный вид. При $P_m = 10^{-4}$ критические числа близки к соответствующим для слабо электропроводящей жидкости. При увеличении P_m наблюдается увеличение критических чисел. Уже при $P_m = 10^{-3}$ на графике присутствуют верхние ветви критических зависимостей. Критические числа Рейнольдса верхних ветвей критических зависимостей очень быстро

убывают при увеличении P_m , графики верхних ветвей соединяются с нижними, так что справа от графиков 1–3 образуется область устойчивости мод $m = 0, 1, 2$ вплоть до $P_m \sim 0.1$ и $Re = 10^6$. Рассмотрим теперь ветви критических зависимостей, которые ограничивают эту область устойчивости справа и сверху. Они имеют номера 4, 5, 6. Зависимость 4 быстро убывает и, образуя максимум, выходит на асимптоту, соответствующую случаю идеально-проводящей жидкости. Зависимости $m = 0, 1$ ведут себя сложнее. Кривые 5, 6 образуют «языки» неустойчивости, направленные вниз, вплоть до $\lg(Re) = 4 \div 4.5$, справа от которых располагается узкая область устойчивости мод $m = 0, 1$, которая ограничена справа ветвями 7 и 8.

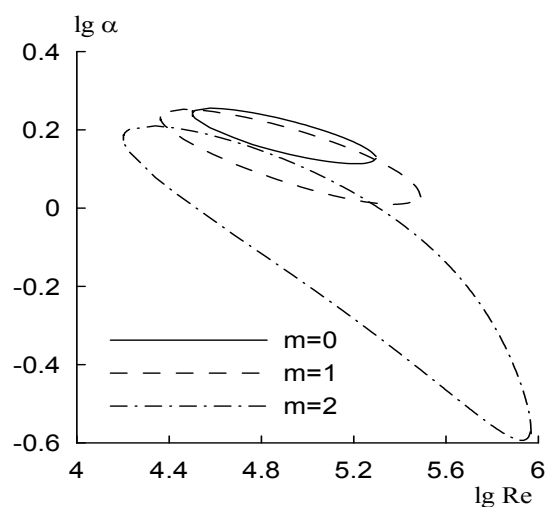


Рис. 2. Нейтральные зависимости для $P_m = 0.01$, $\xi = 1.3$, $Al = 0.005$

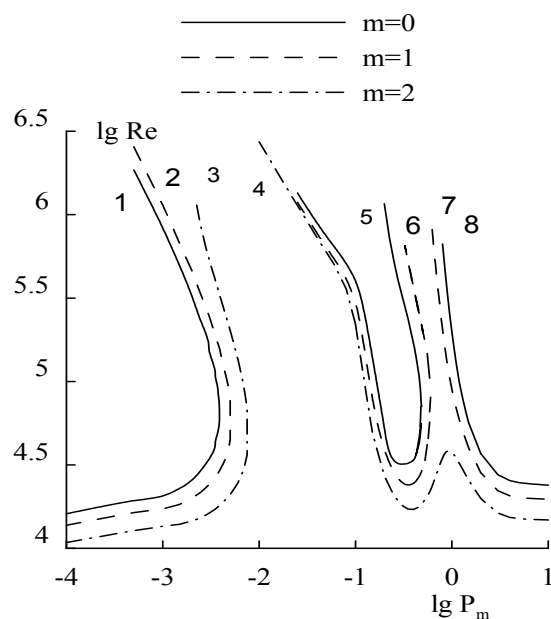


Рис. 3. Критические зависимости от P_m при $\xi = 1.3$ и $A = 0.01$

Данное течение при конечных магнитных числах Прандтля прежде систематически не исследовалось. Современные возможности вычислительной техники в сочетании с эффективной модификацией метода дифференциальной прогонки, приспособленной для массовых вычислений, позволили получить ряд принципиально новых результатов. Картина устойчивости течения электропроводящей жидкости в плоском канале при наличии продольного магнитного поля достаточно сложна и своеобразна.

Произведенный подробный анализ зависимостей критических чисел Рейнольдса от магнитного числа

Прандтля позволил обнаружить новые ветви неустойчивости и исследовать их при числах Рейнольдса порядка $10^6 - 10^7$. Подтверждено существенное влияние диссипации на устойчивость данного течения. При изменении магнитного числа Прандтля наблюдается существенное изменение критических чисел Рейнольдса, причем может наблюдаться скачкообразная стабилизация данного течения. Изменение числа Альфвена также может приводить к скачкообразному изменению критических чисел Рейнольдса.

Библиографический список

1. Michael D.N. Stability of plane parallel flows of electrically conducting fluids // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1953. – V. 41, №1.
2. Tatsumi T. MHD-stability and turbulence // Progr. Theoret. Phys. Suppl. – 1962. – V. 24.
3. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. – М., 1971.
4. Hunt J.C.R. On the stability of parallel flows with parallel magnetic fields // Proc. Roy. Soc. A. – 1966. – V. 293, №1434.
5. Stuart J.T. On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a coplanar magnetic field // Proc. Roy. Soc. London A. – 1954. – V. 221.
6. Велихов Е.П. Устойчивость плоского пуазейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле // ЖЭТФ. – 1959. – Т. 36, вып. 4.
7. Ko Sung Hwan On the stability of plane Poiseuille flow with a finite conductivity in a aligned magnetic field // J. Fluid Mech. – 1968. – V. 33, №3.
8. Lingwood R.J., Alboussierre T. On the stability of the Hartmann layer // Phys. Fluids. – 1999. – №11.
9. Thess A., Zikanov O. Direct numerical simulation of forced MHD turbulence at low magnetic Reynolds number // J. Fluid Mech. – 1998. – №358.
10. Moresko P., Alboussierre T. Experimental study of the instability of the Hartmann layer // J. Fluid Mech. – 1998. – №504.
11. Zikanov O. On the instability of pipe Poiseuille flow // Phys. Fluids. – 1996. – №8.
12. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М., 1986.
13. Henningson D.S., Schmid P.J. Stability and transition in shear flows. – New York, 2001.
14. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. – Новосибирск, 1977.
15. Сапожников В.А. Численное решение задач гидродинамической устойчивости: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1970.
16. Davey A. An automatic orthonormalization method for solving stiff boundary value problem // J. Comput. Phys. – 1983. – №51.