

*А.В. Проскурин, А.М. Сагалаков*

## Локальные возмущения в течении Пуазейля\*

*A.V. Proskurin, A.M. Sagalakov*

## A Local Disturbance in Poiseuille Flow

Исследуется устойчивость течения Пуазейля по отношению к локализованным по длине канала возмущениям. Метод основан на решении задачи на собственные значения для линейных уравнений в частных производных. Дискретизация задачи производилась методом коллокаций с использованием разложения по полиномам Чебышева первого рода. Полученная алгебраическая задача на собственные значения решалась итерационными методами.

**Ключевые слова:** гидродинамическая устойчивость, течение Пуазейля, уравнения с частными производными, спектральные методы.

Исследование устойчивости и бифуркаций течений представляет собой сложную и интересную проблему. Распространенные методы прямого численного моделирования течений дают результаты, близкие к экспериментальным. Такие вычисления сложны, а их результаты не всегда надежны. Анализ устойчивости дополняет методы прямого численного моделирования и часто бывает полезен для изучения переходных процессов в течениях.

Классическая постановка задачи устойчивости течений вязкой жидкости приводит к задаче Орра-Зоммерфельда [1, 2] – краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это возможно благодаря наличию однородных направлений, относительно которых возмущение можно представить в виде элементарных волновых решений с определенным набором волновых чисел, например, для течения в плоском канале, течения в круглой трубе, течений между коаксиальными цилиндрами. С другой стороны, есть много течений, в которых картина развития возмущений неоднородна вдоль или поперек потока: течение в прямоугольной трубе, обтекание крыла, обтекание цилиндра. В таких случаях задача устойчивости сводится к краевой задаче для уравнений с частными производными.

Рассмотрим бесконечно-малое возмущение течения Пуазейля, локализованное по длине канала. Если амплитуда возмущения нарастает в фиксиро-

The stability of a local disturbance in Poiseuille flow is investigated in the article. The numeric method have based on eigenvalue problem for partial differential equations. Digitization of a problem is carried out by collocation with Chebyshev polynomial of the first kind. Algebraic eigenvalue problem was solved by iterative methods.

**Key worlds:** hydrodynamic stability, Poiseuille flow, partial differential equations, spectral methods.

ванной точке, неустойчивость течения называют абсолютной (см.: [3]). Может быть так, что возмущение нарастает, смещаясь вниз по потоку, а его амплитуда в неподвижной точке убывает. Такую неустойчивость называют конвективной. Также могут образовываться «турбулентные клубы» – локализованные в пространстве турбулентные структуры. В работе [4] при некоторых числах Рейнольдса в круглой трубе наблюдалось существование перемежаемых течений, «в которых локализованные турбулентные структуры, окруженные практически ламинарными участками течения, сносятся вниз по потоку, сохраняя свои пространственные размеры». Поэтому исследование устойчивости локализованных возмущений в течении Пуазейля представляется интересной задачей.

Плоское течение Пуазейля – это течение вязкой жидкости между бесконечными параллельными плоскостями. Под действием постоянного градиента давления жидкость течет с постоянной скоростью. Направим ось  $x$  вдоль направления движения жидкости, а ось  $y$  – перпендикулярно плоскостям (см. рис. 1).

Уравнение Навье-Стокса для функции тока имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta^2 \psi, \quad (1)$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракт 14.740.11.0355).

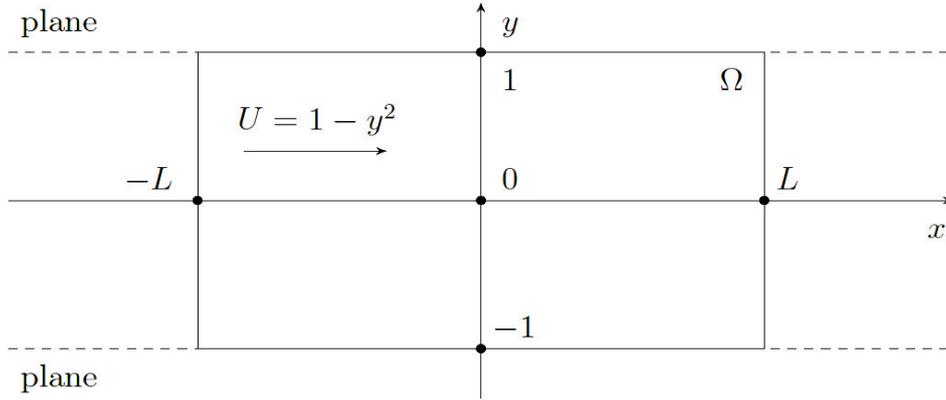


Рис. 1. Конфигурация потока

где  $\psi$  – функция тока;  $\text{Re} = \frac{V_0 d}{\nu}$  – число Рейнольдса;  $V_0$  – максимальная скорость течения;  $d$  – полуширина зазора между плоскостями;  $\nu$  – коэффициент вязкости.

В соответствии с [5, 6], решение (1) ищем в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi(x, y)e^{Ct}, \quad (2)$$

где  $\psi_0 = y - \frac{y^3}{3}$  – стационарное параболическое решение;  $\psi(x, y)e^{Ct}$  – малое возмущение;  $\psi(x, y)$  – амплитуда;  $C = X + iY$  – определяет декремент затухания возмущения. Подставляя (2) в (1), получим

$$C(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \frac{1}{\text{Re}}(\psi_{xxxx} + 2\psi_{xxyy} + \psi_{yyyy}) - 2\psi_x - (1 - y^2)(\psi_{xxx} + \psi_{yyx}), \quad (3)$$

где производные обозначены нижними индексами.

Зададим условия на границе расчетной области  $\Omega$  (см. рис. 1). На неподвижных стенках возмущение скорости обращается в нуль. На входе в  $\Omega$  возмущение также задано равным нулю. На выходе из расчетной области  $\Omega$ , следуя [7], можно задать нулевой градиент скорости вдоль оси  $x$ . В этом случае возмущение может покинуть расчетную область с ненулевой амплитудой. В работах [3, 6, 8], наоборот, использовались нулевые граничные условия. Это позволило упростить расчеты. Возмущения в этом случае не могут покинуть область расчетов и остаются локальными. В работе [3] сделан вывод о том, что расчетная область при использовании граничных условий второго типа должна быть длиннее. Нами использовались граничные условия

$$\psi = \psi_x = \psi_y = 0, \quad (4)$$

соответствующие обращению возмущения в нуль.

Решение (3), удовлетворяющее граничным условиям, будем искать в виде

$$\psi = (L - x^2)(1 - y^2) \sum_{i,j} a_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (5)$$

где  $T$  – многочлены Чебышева первого рода;  $a_{ij}$  – неизвестные коэффициенты.

Определив множество точек коллокации Гаусса-Лобатто  $x_i = L \cos(\pi i / n), i = 0, \dots, n$ ,  $y_j = L \cos(\pi j / n), j = 0, \dots, k$ , получим задачу на собственные значения

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{v} = \{a_{00}, a_{01}, \dots, a_{n(k-1)}, a_{nk}\}$ .

Первоначально задача на собственные значения (6) решалась с использованием QZ алгоритма из библиотеки LAPACK. Однако вычислительные затраты этого метода оказались очень велики, а данный алгоритм применительно к рассматриваемой задаче приводил к ошибочным результатам, поэтому для расчетов были использованы методы Крылова [9, 10], реализованные библиотеками SLEPc и ARPACK. Численные эксперименты показали эффективность обратных итераций с нулевым сдвигом.

На рисунке 2 приведены зависимости собственных значений от  $L$  для разных чисел  $\text{Re} = 10^3$ ,  $\text{Re} = 3 \cdot 10^3$ ,  $\text{Re} = 5 \cdot 10^3$ . Для каждой ветви, представленной на графике, величина  $X$  возрастает с увеличением  $L$ . В свою очередь, сами ветви расположены в определенном порядке: при увеличении числа Рейнольдса значения  $X$  возрастают.

На рисунке 3 представлены зависимости действительной части собственных значений от  $\text{Re}$  при  $L = 0.25$ ,  $L = 1$ ,  $L = 4$ . Число Рейнольдса меняется от  $10^3$  до  $10^4$ . С увеличением числа Рейнольдса для зависимостей с  $L = 0.25$  и  $L = 1$  величина  $X$  возрастает, при  $L = 4$  величина  $X$  почти не меняется.

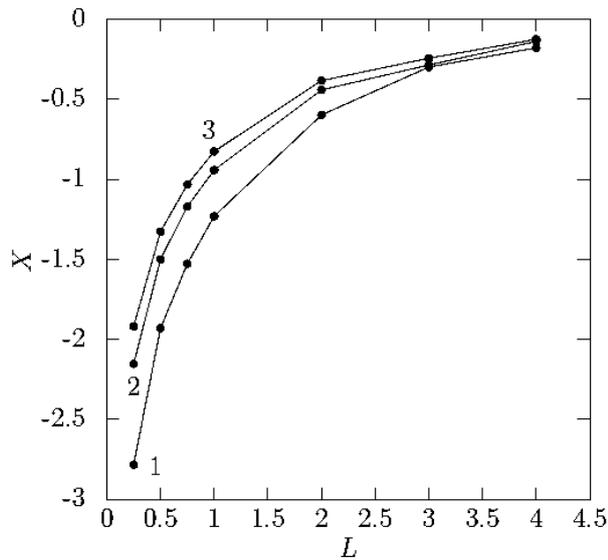


Рис. 2. Зависимости действительной части собственных значений от  $L$  при  $Re = 10^3$  (1),  $Re = 3 \cdot 10^3$  (2),  $Re = 5 \cdot 10^3$  (3)

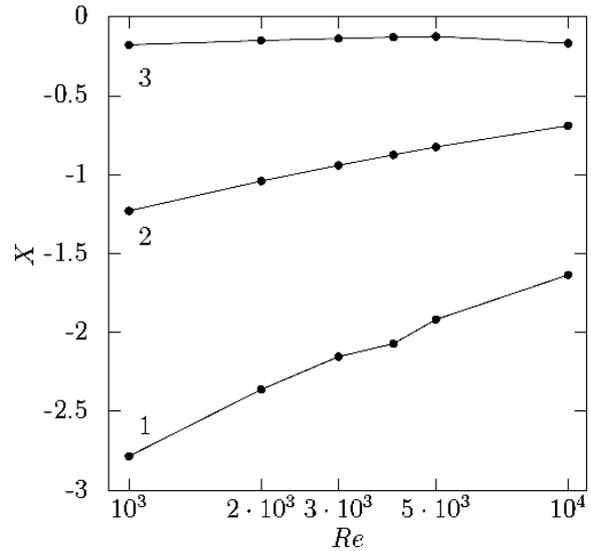


Рис. 3. Зависимости действительной части собственных значений от  $Re$  при  $L = 0.25$  (1),  $L = 1$  (2),  $L = 4$  (3)

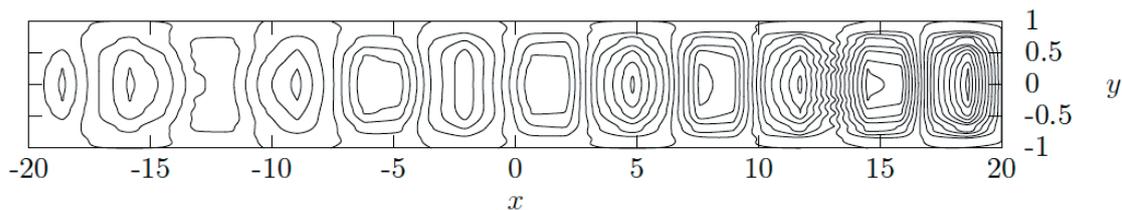


Рис. 4. Линии уровня действительной части собственной функции при  $Re = 3000$ ,  $L = 20$ , собственное значение  $C_6 = (-0.03016274474763807, 0.2577651768763672)$

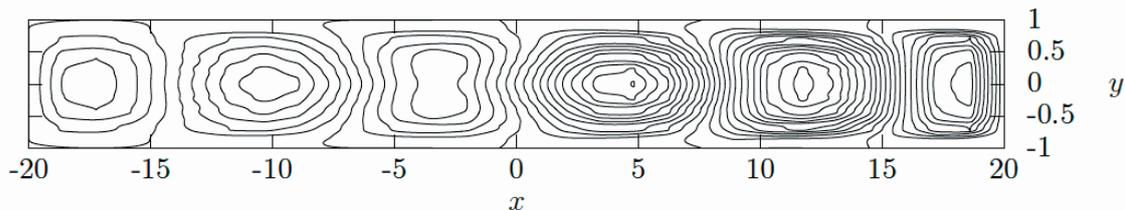


Рис. 5. Линии уровня мнимой части собственной функции при  $Re = 3000$ ,  $L = 20$ , собственное значение  $C_{15} = (-0.04030292104657787, 0.07813170784519234)$

На рисунках 4, 5 приведены линии уровня действительной части собственной функции при  $Re = 3000$ ,  $L = 20$ ,  $C_6 = (-0.03016274474763807, 0.2577651768763672)$  и мнимой с  $C_{15} = (-0.04030292104657787, 0.07813170784519234)$ . Затухающее возмущение имеет вид последовательных вихрей.

Результаты расчетов позволяют заключить, что локализованные возмущения устойчивы в рассмотренном диапазоне параметров  $Re$  и  $L$ . Одной из задач данной работы являлась также разработка численного метода для решения задачи гидродинамической устойчивости (3). Данная задача содержит

малый параметр  $1/Re$ , что сильно усложняет решение задачи на собственные значения и требует высокого качества приближенного представления решений. Предложенный численный метод оказался простым и экономичным. Алгоритмически он проще метода конечных элементов и учитывает гладкость решения. При  $L = 4$ ,  $Re = 5000$ ,  $n = 280$ ,  $k = 60$  вычисления на процессоре Phenom 2.2 ГГц занимали порядка 40 минут и около 7 Гб оперативной памяти. Более 90% вычислений проводилось одним потоком, так как пакет SLEPc в настоящее время почти не использует параллельные алгоритмы для работы с заполненными матрицами.

### Библиографический список

1. Henningson D.S., Schmid P.J. Stability and transition in shear flows. – New York, 2001.
2. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. – Новосибирск, 1977.
3. Blackburn H.M., Barkley D., Sherwin S.D. Convective instability and transient growth in flow over a backward-facing step // *J. Fluid Mech.* – 2008. – Vol. 603.
4. Приймак В.Г. Волны и пространственно-локализованные структуры в турбулентных течениях вязкой жидкости. Результаты расчетов // *Математическое моделирование.* – 2010. – Т. 22, №2.
5. Юдович В.И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на/Д, 1984.
6. Theofilis V. Advances in global linear instability analysis of non-parallel and three-dimensional flows // *Progress in Aerospace Sciences.* – 2003. – №39.
7. Barkley D. Confined three-dimensional stability analysis of the cylinder wake. – [Электронный ресурс]. URL: <http://arXiv.org/abs/physics/0405153v2>.
8. Gonzalez L., Theofilis V., Sherwin S.J. High-order methods for the numerical solution of the BiGlobal linear stability eigenvalue problem in complex geometries // *International Journal for Numerical Methods in Fluids.* – 2011. – Vol. 65.
9. Saad J. Numerical methods for large eigenvalue problems. – Manchester, 1992.
10. Krylov-Schur methods in SLEPC. SLEPc technical report STR-7 / V. Hernandez, J.E. Roman, A. Tomas, V. Vidal [Электронный ресурс]. – URL: [www.grycap.upv.es/slep/ documentation/reports/str7](http://www.grycap.upv.es/slep/ documentation/reports/str7).