УДК 532.526+532.529

Д.И. Попов, Р.М. Утемесов

Оценка правой границы спектра в задаче об устойчивости параллельного течения двухфазной жидкости*

D.I. Popov, R.M. Utemesov

The Estimation of Right Bound of Spectrum in the Problem of Two-phase Parallel Flow Stability

Рассматривается задача об устойчивости внутреннего параллельного течения двухфазной жидкости. Получены оценки собственных чисел с наибольшей действительной частью. Качественно и численно описано влияние свойств смеси и режима течения на условия, определяющие правую границу спектра.

Ключевые слова: дисперсная смесь, спектр малых возмущений, гидродинамическая устойчивость.

The paper considers the problem of stability of inner parallel dispersed two-phase flow. The estimations of eigenvalues with maximum real part are obtained. Qualitatively and numerically it is described that mixture properties and flow regime have an effect on conditions defining right bound of spectrum.

Key worlds: dispersed mixture, spectrum of infinitesimal disturbances, hydrodynamic stability.

Введение. Исследование движения дисперсных систем (см.: [1]) представляет значительный интерес во многих инженерных и промышленных приложениях. В обзорных трудах [2, 3], освещающих современное состояние вопроса, можно найти обширный перечень трудов, характеризующих практическую и теоретическую значимость предмета. В настоящей работе применяется метод нормальных мод для исследования устойчивости стационарного течения, изучен спектральный портрет соответствующего линейного оператора (см.: [4, 5]). Известно, что нейтральные и критические зависимости в случае монодисперсной смеси могут состоять из нескольких подобластей (см.: [6]), окружающих области вязкой генерации, а порог устойчивости в некоторых случаях повышается практически на порядок [6, 7]. Представлены оценки границ области, содержащей спектр, а также установлено вариационное неравенство для достаточных условий устойчивости основного течения, которые определяются собственным значением с максимальной действительной частью. Численно и аналитически установлен тот факт, что при больших числах Рейнольдса, – в закритическом режиме движения, – основное течение может быть метастабильным.

Концентрация примеси считается постоянной. Символ Ω обозначает связное открытое множество, т.е. ограниченную в некотором направлении область, заполненную смесью (например, проточную часть канала), а символ Γ_j – связную компоненту границы Ω. Все функции считаются локально суммируемыми по Лебегу, а производные, равно как и граничные условия, понимаются в обобщенном смысле.

Модельная задача. В Эйлеровом приближении движение смеси описывается двухскоростной моделью, когда примесь рассматривается как формальный эффективно невязкий газ, средние нормальные напряжения в котором обращаются в нуль [1]. Таким образом, динамика смеси будет определяться уравнениями переноса и Навье-Стокса. Межфазное взаимодействие задается силою Стокса. Уравнения, описывающие эволюцию малых возмущений в смеси, можно представить в виде

$$\begin{gathered}\partial\tilde{\mathbf{u}}/\partial t + (\mathbf{U}\nabla)\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}}\nabla)\mathbf{U} - \\ -(\rho/\tau)(\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{u}}) - \nu\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}}_1 \\ \partial\tilde{\mathbf{v}}/\partial t + (\mathbf{U}\nabla)\tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}}\nabla)\mathbf{U} - (1/\tau)(\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{\mathbf{f}}_2, \\ \mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{u}}\big|_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_n\big|_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{u}}\big|_{t=0} = \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad \tilde{\mathbf{v}}\big|_{t=0} = \tilde{\mathbf{v}}_0. \qquad (1)\end{gathered}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$ – возмущения поля скоростей в несущей и дисперсной фазах; $\tilde{\mathbf{f}}_1, \tilde{\mathbf{f}}_2$ – плотность внешних сил; $\tilde{p}$ – возмущение средних нормальных напряжений в жидкости. Далее везде символ $\mathbf{u}$ будем относить к полю скоростей в несущей жидкости, а символ $\mathbf{v}$ – к примеси. Величина $\tau = S \cdot \mathrm{Re}$ – безразмерное число для стоксовой скоростной релаксации; Re – число Рейнольдса (далее ν=1/Re); S – критерий, определяющий степень дисперсности примеси; ρ – относительная массовая доля примеси (величина $\rho < 1$ считается постоянной и опреде-

* Работа выполнена в рамках программы «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области механики» (2009–2013) (проект 2010-1.1-112-129-003).

ляется как отношение массы частиц к массе жидкости в единице объема). При этом $\rho \sim a^3$, $S \sim a^2$, где a – диаметр частицы. Рассмотрим в качестве основного решения профиль напорного течения в плоскопараллельном канале

$$\mathbf{U}(x_2)=U(x_2)\mathbf{e}_1=\left[(1-A)(1-x_2^2)+Ax_2\right]\mathbf{e}_1.$$

Здесь $A\in[0;1]$ – безразмерная константа; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – орты декартовой системы координат, ориентированные в продольном и поперечном направлениях к течению. На стенках канала задаются условия непроницаемости и отсутствия проскальзывания для жидкости. Предполагается, что стационарный профиль течения $\mathbf{U}$ совпадает в обеих компонентах смеси (см.: [1]) и $\operatorname{div}\mathbf{U}=0$.

Векторы в соотношении (1) заданы в области Ω, ограниченной в некотором направлении, т.е. $\Omega=\mathbf{R}\times I$, где $I=(-1,1)$. Однако без ущерба для общности можно считать, что область Ω является ограниченной. В общем случае вектор-функция $\mathbf{w}$ на Ω будет пониматься в том смысле, что сужение $\mathbf{w}$ на $\mathbf{R}$ есть медленно растущее распределение, допускающее преобразование Фурье [8].

Поставим в соответствие уравнениям (1) формальный оператор

$$T=\begin{bmatrix} -(\rho/\tau)E_{X_1}-K+\nu\nabla^2 & (\rho/\tau)E_{X_2} \\ (1/\tau)E_{X_1} & -K-(1/\tau)E_{X_2} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь E_{X_k} – тождественный оператор на банаховом пространстве X_k (далее символ E будем относить тождественному оператору, а символ P – проектору, на некотором нормированном пространстве), оператор K есть оператор дифференцирования первого порядка с непрерывными коэффициентами, а его действие выражается по формуле

$$K\mathbf{w}=(\mathbf{U}(x_2)\nabla)\mathbf{w}+(\mathbf{w}\nabla)\mathbf{U}(x_2)=$$
$$=U(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{w}+(\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_2)U'(x_2)\mathbf{e}_1.$$

Условимся обозначать операцию дифференцирования $\partial/\partial x_2$ штрихом, если функция зависит только от координаты $x_2\in(-1,1)$. Далее множество Ω считается открытой прямоугольной областью в $\mathbf{R}^2$.

Функциональные пространства и область определения. Формулой (2) задан некоторый формальный дифференциальный оператор T. Будем рассматривать пространства функций класса $L^2(\Omega)$. Воспользуемся общепринятыми обозначениями [8–10]. Для пространств обобщенных вектор-функций известно (см.: [9]) разложение Гельмгольца-Лерэ, которое может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{H}\equiv\mathbf{L}^2(\Omega)=\mathbf{S}(\Omega)\oplus\mathbf{G}(\Omega). \quad (3)$$

Подпространства $\mathbf{S}(\Omega)$ и $\mathbf{G}(\Omega)$ являются замыканием в норме $\mathbf{L}^2(\Omega)$ следующих множеств:

$$\widetilde{\mathbf{S}}=\{\mathbf{w}:\mathbf{w}\in\mathbf{L}^2(\Omega),\operatorname{div}\mathbf{w}=0,\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma=0\},$$

$$\widetilde{\mathbf{G}}=\{\mathbf{w}:\mathbf{w}\in\mathbf{L}^2(\Omega),\mathbf{w}=\operatorname{grad}g,\ g\in H^1(\Omega)\}.$$

Пространство $\mathbf{H}(\Omega)=\{L^2(\Omega)\}^n$ есть декартово произведение n копий $L^2(\Omega)$, через $H^q(\Omega)$ и $\mathbf{H}^q(\Omega)$ обозначены пространства Соболева квадратично суммируемых функций и вектор-функций [8]. Отметим, что формула (3) справедлива и для ограниченной в некотором направлении области Ω евклидова пространства [10].

Положим $X\equiv X_1\times X_2=\mathbf{S}\times\mathbf{H}$, где $\widetilde{\mathbf{u}}\in X_1$ и $\widetilde{\mathbf{v}}\in X_2$. Областью определения оператора T будет множество

$$D(T)=\{(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}}):\widetilde{\mathbf{u}}\in\mathbf{S}(\Omega)\cap\mathbf{H}^2(\Omega),\ \widetilde{\mathbf{v}}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)\}.$$

Целесообразность использования пространств $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, где $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ – замыкание $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ в норме $\mathbf{H}^1(\Omega)$, обсуждается в работе [10]. Через $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ обозначены бесконечно-дифференцируемые вектор-функции с компактным носителем в Ω. Область определения $D(T)$ оператора T всюду плотна в X. Это утверждение очевидно для произвольной прямоугольной области Ω. Множество $D(\Omega)$ содержит в качестве плотного подмножества вектор-функции класса $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. Таким образом, оператор T замыкаем в X. Далее под оператором T на пространстве X понимается его максимальное замкнутое расширение.

Оценка границ спектра. Обозначим $x=x_1$, $y=x_2$. Традиционно будем рассматривать решения в виде гармоник, фронт которых распространяется в положительном направлении продольной координаты x, т.е. $\widetilde{w}(x,y;t)=w(y)\exp[\xi t-i\alpha x]$, с периодом колебания равным $2\pi/\alpha$, где α – соответствующее волновое число. Сразу ограничимся двумерными возмущениями, учитывая преобразование Сквайра [5]. Воспользуемся условием несжимаемости для определения функции тока, приняв $\widetilde{u}_x=\partial\widetilde{\psi}/\partial y$, $\widetilde{u}_y=-\partial\widetilde{\psi}/\partial x$. Тогда из системы (1) следуют уравнения для амплитуд колебаний

$$\xi u_x-i\alpha Uu_x+U'u_y-\nu\Delta u_x-$$
$$-(\rho/\tau)(v_x-u_x)-i\alpha p=f_{1x},$$

$$\xi u_y - i\alpha U u_y - \nu\Delta u_y - (\rho/\tau)\left(v_y - u_y\right) + p' = f_{1y},$$
$$\xi v_x - i\alpha U v_x + U' v_y - (1/\tau)\left(u_x - v_x\right) = f_{2x},$$
$$\xi v_y - i\alpha U v_y - (1/\tau)\left(u_y - v_y\right) = f_{2y}. \quad (4)$$

Первые два уравнения системы (4), используя функцию тока, можно переписать следующим образом:

$$\left\{\xi\Delta\psi - i\alpha U\Delta\psi + i\alpha U''\psi - \nu\Delta^2\psi\right\} - $$
$$-(\rho/\tau)\omega + (\rho/\tau)\Delta\psi = f_1. \quad (5)$$

Здесь $\omega = v_x' + i\alpha v_y$ – амплитуда завихренности, $\Delta = d^2/dy^2 - \alpha^2$.

Уравнения (4) и (8) с граничными условиями $\psi(\pm1)=\psi'(\pm1)=0$, $\mathbf{v}(\pm1) = \mathbf{0}$ становятся замкнутыми. Очевидно, что гладкость надлежащих решений уравнений (4), (5) будут задавать следующие классы функций: $\psi \in H^4(I)\cap H_0^1(I)$, $v_x, v_y \in H^1(I)$, обращающиеся в нуль на границе. Условие гладкости для ψ можно ослабить, т.е. $\psi \in H^2(I)\cap H_0^1(I)$. Во всех рассуждениях будут использоваться функции класса $C_0^\infty(I)$, т.е. бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем в I. Далее в случае, когда носитель функций не указан явно, считается, что функции заданы на I.

Рассмотрим пополнение множества вектор-функций

$$X_1 = \left\{\mathbf{u} \in C_0^\infty \times C_0^\infty, \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\right\},$$
$$X_2 = \left\{\mathbf{v} \in C_0^\infty \times C_0^\infty\right\}$$

в норме $\|\mathbf{w}\|_{H\times H} = \left(\|w_x\|_H^2 + \|w_y\|_H^2\right)^{1/2}$ пространства $H \times H$. Определим скалярные произведения в пространствах X_1 и X_2 следующим образом:

$$(\mathbf{u},\mathbf{w})_{X_1} = \int_{-1}^{1} \mathbf{u}\cdot\overline{\mathbf{w}}dy = \int_{-1}^{1}(u_x\overline{w}_x + u_y\overline{w}_y)dy =$$
$$= \int_{-1}^{1}(\psi'\overline{\widetilde{\psi}}' + \alpha^2\psi\overline{\widetilde{\psi}})dy,$$
$$(\mathbf{v},\mathbf{w})_{X_2} = \rho(\mathbf{v},\mathbf{w})_{H\times H} = \rho\int_{-1}^{1}(v_x\overline{w}_x + v_y\overline{w}_y)dy.$$

Наряду с X_1 будем использовать пространство для функции тока $\psi \in \widetilde{X}_1 = H^2 \cap H_0^1$ с нормой и скалярным произведением из H_0^1.

Числовой областью значений оператора T называют множество комплексных чисел ξ таких, что $\xi = \left\langle Th, h^*\right\rangle_X$ и $\|h\|_X = 1$, $h \in X$ (см. [11]). Тогда, принимая во внимание условие $\|\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}\|_X^2 = \|\mathbf{u}\|_{X_1}^2 + \|\mathbf{v}\|_{X_2}^2 = 1$, несложно получить следующее равенство:

$$\xi = i\alpha\left\{(U\mathbf{u},\mathbf{u})_{X_1} + \rho(U\mathbf{v},\mathbf{v})_{H\times H}\right\} -$$
$$-(\rho/\tau)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{H\times H}^2 - \nu\left(\|\mathbf{u}'\|_{X_1}^2 + \alpha^2\|\mathbf{u}\|_{X_1}^2\right) -$$
$$-\left\{(U'u_y,u_x)_H + \rho(U'v_y,v_x)_H\right\}. \quad (6)$$

Обозначим первое слагаемое в уравнении (6) через K_0. Величина K_0 является чисто мнимой. Справедлива оценка величины $\Im(K_0)$

$$\alpha\min_I U \le \Im(K_0) \le \alpha\max_I U. \quad (7)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (6) можно переписать

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{H\times H}^2 = \|\mathbf{u}-P\mathbf{v}\|_{X_1}^2 + \|(E_{H\times H} - P)\mathbf{v}\|_{H\times H}^2. \quad (8)$$

Для третьего слагаемого, учитывая $\psi \in H^2 \cap H_0^1$, справедлива формула

$$\|\mathbf{u}'\|_{X_1}^2 + \alpha^2\|\mathbf{u}\|_{X_1}^2 = \|\psi''\|_H^2 + 2\alpha^2\|\psi'\|_H^2 + \alpha^4\|\psi\|_H^2. \quad (9)$$

Слагаемое $K_1 = -(U'u_y,u_x)_H$ можно оценить, используя следующее выражение:

$$K_1 = \frac{i\alpha}{2}\int_{-1}^{1}U''|\psi|^2 dy - \alpha\int_{-1}^{1}U'\Im\{\psi'\overline{\psi}\}dy. \quad (10)$$

Слагаемое $K_2 = -(U'v_y,v_x)_H$ можно грубо оценить следующим образом:

$$|K_2| \le \max|U'|\|v_y\|_H\|v_x\|_H \le$$
$$\le \frac{1}{2}\max|U'|\left(\|v_y\|_H^2 + \|v_x\|_H^2\right) = \frac{1}{2}\max|U'|\|v\|_{H\times H}^2.$$

Для величины $\Im(\xi)$ из выражений (7)–(10) получим неравенства вида

$$\Im(\xi) \ge \alpha\min_I U + \frac{\alpha}{2}\min_I U''\|\psi\|_H^2 - \frac{\rho}{2}\max_I|U'|\|\mathbf{v}\|_{H\times H}^2,$$
$$\Im(\xi) \le \alpha\max_I U + \frac{\alpha}{2}\max_I U''\|\psi\|_H^2 + \frac{\rho}{2}\max_I|U'|\|\mathbf{v}\|_{H\times H}^2. \quad (11)$$

Несложно установить отношение

$$\Re(\xi) \le -\nu\left(\|\psi''\|_H^2 + 2\alpha^2\|\psi'\|_H^2 + \alpha^4\|\psi\|_H^2\right) -$$
$$-\alpha\int_{-1}^{1}U'\Im\{\psi'\overline{\psi}\}dy - \frac{\rho\nu}{S}\left(\|\mathbf{u}-P\mathbf{v}\|_{X_1}^2 + \|(E_{H\times H}-P)\mathbf{v}\|_{H\times H}^2\right) +$$
$$+\rho\max_I|U'|\|v_y\|_H\|v_x\|_H. \quad (12)$$

Здесь $P:\mathbf{H}\to\mathbf{S}$ – проектор.

Таким образом, числовой образ оператора T на $X = X_1 \times X_2$ целиком содержится в полуполосе, определяемой условиями (11) и (12). Дополнение к данному множеству состоит из регулярных точек оператора T. В частности, из отношения (11) следует достаточное условие устойчивости основного течения

$$\alpha\gamma\left(\|\psi'\|_H\|\psi\|_H+\frac{\rho}{\alpha}\|v_y\|_H\|v_x\|_H\right)<$$

$$<\nu\left(F(\psi,\alpha)+\frac{\rho}{S}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2_{H\times H}\right), \qquad (13)$$

где $F(\psi,\alpha)=\|\psi''\|^2_H+2\alpha^2\|\psi'\|^2_H+\alpha^4\|\psi\|^2_H$, $\gamma=\max\limits_I|U'|$.

Условия (12) и (13) указывают на сложную непрерывную зависимость правой границы спектра от параметров задачи. Причем, в отличие от чистой жидкости, зависимость может иметь немонотонный характер (см.: [6, 7]).

Здесь приведем без доказательства условия, аналогичные неравенствам (11) и (12), для случая трех измерений

$$\Re(\xi)\le-\nu\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}-(\rho/\tau)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)}+$$

$$+\tilde{\beta}\left(\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)}+\|\mathrm{rot}\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)}\right)+\rho n\tilde{\gamma}\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)},$$

где $\tilde{\beta}=\sup\limits_\Omega|\mathbf{U}|$, $\tilde{\gamma}=\sup\limits_\Omega|\mathbf{U}'|$.

$$|\Im(\xi)|\le\tilde{\beta}\left(\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)}+\|\mathrm{rot}\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)}+\rho\|P\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)}+\right.$$

$$\left.+\rho\|\mathrm{rot}\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)}\right)++\rho\tilde{\beta}\left(\|(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathrm{div}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}+\right.$$

$$\left.+\|(I_{\mathbf{H}}-P)\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)}+\|\mathrm{rot}\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}(\Omega)}\right).$$

В этих формулах приняты обозначения $\mathbf{u}\equiv\tilde{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{v}\equiv\tilde{\mathbf{v}}$.

Спектр двумерных возмущений. Обозначим через $\Sigma(\tilde{T})$ спектр оператора $\tilde{T}$, порождаемого задачей (4). Очевидно, что для предложенных функций $\tilde{T}\subseteq T$. Из третьей формулы системы (4) следует уравнение для амплитуды $v_y(y)$

$$J(\xi)v_y\equiv[1/\tau-i\alpha U+\xi]v_y=(1/\tau)i\alpha\psi+f_{2y}. \qquad (14)$$

Левая часть соотношения (14) определена для всех точек комплексной плоскости за исключением множества следующего вида:

$$M=\{\xi:\xi=-1/\tau+i\alpha U(y),y\in(-1,1)\}, \qquad (15)$$

в точках которого уравнение имеет алгебраическую сингулярность, и функция $v_y(y)$ не может быть однозначно определена. Обозначим правую часть уравнения (14) через $g(y)$. Тогда для того, чтобы элемент $v_y\in H(I)$, необходимо $J^{-1}(\xi)g\in H(I)$, что справедливо для любого $\xi\notin M$. Точки $\lambda\in M$, определяемые условием (15), не являются регулярными точками системы (14) и принадлежат непрерывному спектру оператора $\tilde{T}$. Действительно, область определения $D(J^{-1}(\lambda))$ оператора $J^{-1}(\lambda)$, где $\lambda\in M$ – плотное подмножество $H(I)$. Например, все многочлены, которые нацело делятся на полином $J(y,\lambda)$. Однако $D(J^{-1}(\lambda))\ne H(I)$, поскольку не содержит функций, равных единице в окрестности точек $y_0\in I$, для которых $J(y_0,\lambda)=0$. Отсюда следует, что оператор $J^{-1}(\lambda)$ не является ограниченным, а точка $\lambda\in M$ принадлежит непрерывному спектру (см.: [11]). Отметим, что точкам $\lambda\in M$ не принадлежат никакие собственные векторы.

Если $\xi\notin M$, нетрудно получить соотношение

$$\mathrm{div}\mathbf{v}=-2[\tau J^2(\xi)]^{-1}J'(\xi)u_y=-2\alpha^2U'\psi/[\tau J^2(\xi)].$$

Тогда для величины ω получим следующее уравнение:

$$\omega=2\alpha^2U'^2\psi/[\tau J^3(\xi)]-i\alpha U''\psi/[\tau J^2(\xi)]+$$

$$+\Delta\psi/[\tau J(\xi)]+\tilde{F}. \qquad (16)$$

Объединяя формулы (16) и (5), получим следующее уравнение:

$$\{(\xi-i\alpha U)\Delta\psi+i\alpha U''\psi-\nu\Delta^2\psi\}+$$

$$+\rho\tilde{J}^{-1}(\xi)\{(\xi-i\alpha U)\Delta\psi+i\alpha U''\psi\}-$$

$$-\left(\rho\tilde{J}^{-1}(\xi)\right)\left(\tau\tilde{J}^{-1}(\xi)\right)\times$$

$$\times\left[i\alpha U''(\xi-i\alpha U)+2\alpha^2U'^2\tilde{J}^{-1}(\xi)\right]\psi=F. \qquad (17)$$

Здесь $\tilde{J}(\xi,y)=1+\tau\Re(\xi)+i\tau(\Im(\xi)-\alpha U(y))$. В соотношении (17) обозначим через $Z(\xi,\nu)$ первое выражение в фигурных скобках, которое справедливо назвать оператором Орра-Зоммерфельда, а через $\tilde{R}(\xi)$ – второе, которое можно назвать оператором Рэлея [5]. Тогда уравнение (17) удобно переписать в операторной форме

$$L(\xi,\rho,\tau)\psi\equiv Z(\xi,\nu)\psi+$$

$$+\rho\tilde{J}^{-1}(\xi,\tau)\left[\tilde{R}(\xi)\psi+\tau\tilde{J}^{-1}(\xi,\tau)\tilde{A}(\xi)\psi\right]=F. \qquad (18)$$

Оператор $\tilde{A}(\xi)$ ограничен, а его область определения совпадает с $D\left(J^{-1}(\xi)\right)$. Из уравнения (18) видно, что спектральный портрет оператора $\tilde{T}$ определяется характеристическими числами пучка $L(\xi,\rho,\tau)$. Оператор $L(\xi,\rho,\tau)$ непрерывно зависит от параметров ξ,ρ,τ,A. Уравнением (18) представлена классическая задача теории возмущений $Z(\xi,\nu)+\varepsilon V(\xi)$, где $\Re(\varepsilon)\equiv\rho$ – малый параметр, $|\varepsilon|<1$, а оператор $V(\xi)$ является $Z(\xi,\nu)$-ограниченным (см. [12]), т.е $\left\|V(\xi)Z^{-1}(\xi,\nu)\right\|<1$ для определенных значений ξ и τ. Напомним результаты относительно пучка $Z(\xi,\nu)$: оператор является замкнутым, плотно определен в $H(I)$, имеет вполне непрерывный обратный $Z^{-1}(\xi,\nu)$, т.е. обобщенную резольвенту задачи Орра-Зоммерфельда, и дискретный спектр, заключенный в полу-полосе комплексной плоскости [4, 5].

Возьмем некоторое $\xi_1\notin\Sigma(Z)\cup\Sigma(\widetilde{R})\cup M$. Оператор $Z^{-1}(\xi_1,\nu)$ действует из $H(I)$ в $H^4(I)\cap H_0^1(I)$, оператор $\widetilde{R}^{-1}(\xi_1)\widetilde{R}(\xi_1)$ является тождественным на $H^2(I)\cap H_0^1(I)$. Отсюда, учитывая теорему Реллиха, можно заключить, что оператор $\widetilde{R}^{-1}\widetilde{R}Z^{-1}$ является вполне непрерывным на $H(I)$, а $\widetilde{R}Z^{-1}$ – ограничен. Теперь для обратного оператора $L^{-1}(\xi_1)$ можно записать

$$L^{-1}(\xi_1)=Z^{-1}(\xi_1)\left(1+\varepsilon V(\xi_1)Z^{-1}(\xi_1)\right).$$

Нетрудно видеть, что $L^{-1}(\xi_1)$ является вполне непрерывным оператором, определен всюду на $H(I)$ для всех точек $\xi_1\notin\Sigma(Z)\cup\Sigma(\widetilde{R})\cup M$. В результате свойства точечного спектра оператора $L(\xi,\rho,\tau)$ могут быть описаны теорией возмущений линейных операторов, которая обстоятельно изложена в работе [12]. В частности, мы можем заключить, что множество $\Sigma(\widetilde{T})\setminus M$ представляет точечный спектр оператора $\widetilde{T}$ и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Результаты численного исследования спектра можно найти в работе [13]. Если точка спектра λ находится вблизи множества M так, что $\widetilde{J}(\lambda)\approx i\tau(\Im(\lambda)-\alpha U(y))$, то существенно влияние слагаемых, соответствующих оператору $V(\xi)$. Точки множества M являются точками сгущения для точек дискретного спектра.

Заключение. Численные результаты отражены на рисунках 1–4. На рисунке 1 представлены зависимости критического числа Рейнольдса, определяющего достаточные условия устойчивости, от степени дисперсности S примеси при ρ=0.15. Используя выражение $\mathbf{v}$ через $\mathbf{u}$, выделим в уравнении (6) зависимость слагаемых от параметров задачи в явной форме следующим образом: воспользуемся процедурой, аналогичной анализу размерностей, т.е. $\widetilde{J}(\xi,y)\sim 1+\tau A$, если $\Re(\xi)=0$. В результате, приняв $\Re(\xi)=0$, из уравнения (6), записанного для $\Re(\xi)$, нетрудно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned}&S(1+\tau^2A^2)^2(1+\tau A)F+\tau A(1+\tau^2A^2)^2(1+\tau A)\widetilde{K}_1+\\&+\rho\tau A(1+\tau A)\left((1+\tau^2A^2)K_1^{(2)}-AK_2^{(2)}\right)+\\&+\rho\tau A^2(1+\tau^2A^2)\left(\tau(1+\tau A)F_1^{(St)}+F_3^{(St)}\right)+\\&+\rho A^2(1+\tau A)F_2^{(St)}=0.\end{aligned}\qquad(19)$$

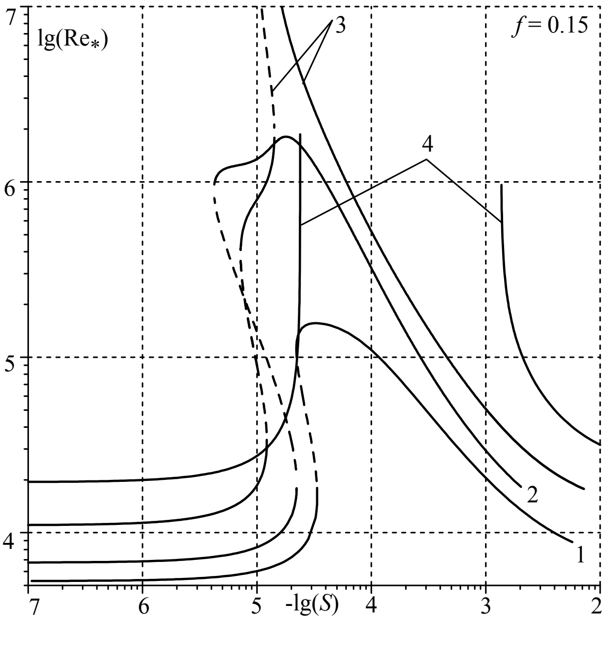

Рис. 1. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра S при ρ = 0.15.
A =: *1* – 0.01; *2* – 0.025; *3* – 0.045; *4* – 0.2

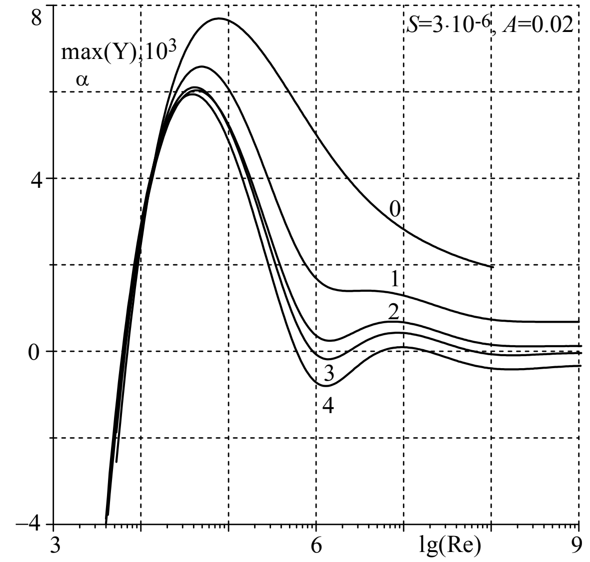

Рис. 2. Зависимость $\max\limits_{\alpha}\Re(\lambda/\alpha)$, $Y=\Re(\lambda/\alpha)$ от числа Рейнольдса
ρ =: *0* – чистая жидкость; *1* – 0.1; *2* – 0.15; *3* – 0.17; *4* – 0.2

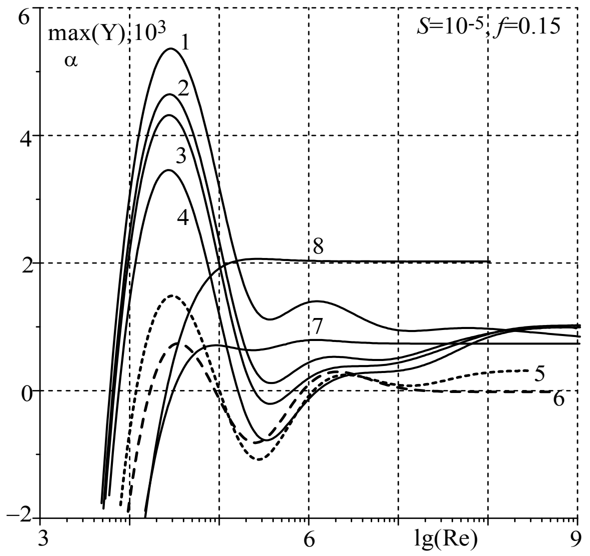

Рис. 3. То же.
A=: *1* – 0.01; *2* – 0.015; *3* – 0.017; *4* – 0.022;
5 – 0.035; *6* – 0.043; *7* – 0.07; *8* – 0.1

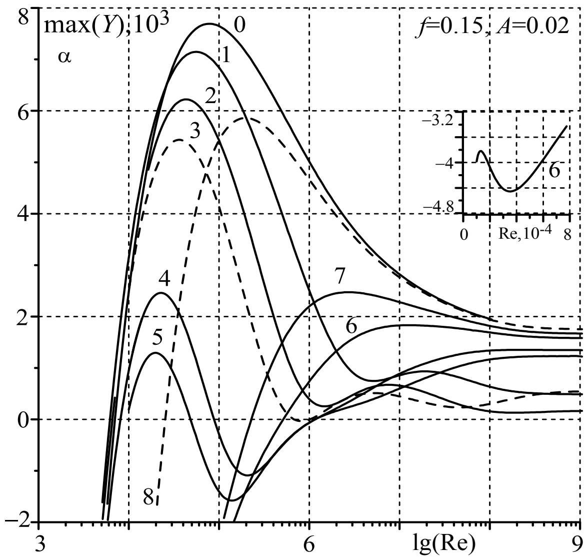

Рис. 4. То же.
S =: *0* – чистая жидкость; *1* – 1.E-6; *2* – 3.E-6; *3* – 5.E-6;
4 – 1.5E-5; *5* – 2.E-5; *6* – 5.E-5; *7* – 1.E-4; *8* – 1.E-3

Явные выражения для коэффициентов $F_i^{(St)}$ и $K_i^{(2)}$ достаточно громоздки, и здесь мы их не приводим. Уравнение (19) представляет собой многочлен 6-й степени относительно Re. Другими словами, при фиксированных параметрах уравнение (19) может иметь несколько действительных корней, отвечающих критическим числам Рейнольдса Re_*, при которых наблюдается нейтральная устойчивость.

Этот факт проиллюстрирован кривыми 1–3 на рисунке 1. Видно, что диапазону $0.1 \le \tau \le 20$ соответствует зона наибольшей стабилизации основного течения. Рисунками 2–4 проиллюстрированы зависимости $Y_m \equiv \max_\alpha \Re(\lambda/\alpha)$, $Y = \Re(\lambda/\alpha)$, от числа Рейнольдса.

Рисунок 2 представляет немонотонную, в отличие от чистой жидкости, зависимость Y_m от величины Re при увеличении концентрации примеси ρ. Видно, что при увеличении ρ график $Y_m(\mathrm{Re})$ может неоднократно пересекать ось $Y_m = 0$, чему соответствует появление «окон» устойчивости [6] в закритической области, т.е. зон метастабильности основного течения.

Напряжения Рейнольдса в примеси не меняют знак в окрестности критического слоя, поскольку нет вязкости, которая на границе канала задает разность фаз у продольной и поперечной компонент возмущений [5], – как в случае вязкой жидкости, – поэтому при $0.1 \le \tau \le 20$ пульсации поля скоростей в жидкости и примеси находятся практически в противофазе. Действие силы Стокса направлено на демпфирование возмущений и также зависит от разности фаз колебаний в жидкости и примеси.

Библиографический список

1. Соу С.Л. Гидродинамика многофазных систем. – М., 1971.

2. Martin Wörner Numerical modeling of multiphase flows in microfluidics and micro process engineering: a review of methods and applications // Microfluidics and Nanofluidics. – 2012. – Vol. 12.

3. Balachandar S. and John K. Eaton Turbulent Dispersed Multiphase Flow // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2010. – Vol. 42.

4. Шкаликов А.А. Спектральные портреты уравнения Орра-Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2003.– Т. 3.

5. Drazin P.G. & Reid W.R. Hydrodynamic stability. – Cambridge, 1981.

6. Никитенко Н.Г., Сагалаков А.М., Попов Д.И. О достаточных условиях устойчивости течения Куэтта−Пуазейля монодисперсной смеси // Теплофизика и аэромеханика. – 2011. – №2.

7. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. – М., 1989.

8. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М., 1971.

9. Foias C., Manley O., Rosa R., Temam R. Navier–Stokes Equations and Turbulence. – Cambridge, 2004.

10. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М., 1981.

11. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М., 1966.

12. Като Т. Теория возмущения линейных операторов. – М., 1972.

13. Попов Д.И., Сагалаков А.М. Спектр одной граничной задачи для модели двухскоростной жидкости // Известия АлтГУ. – 2011. – №1(69).