УДК 532.135 + 517.95

Е.Ю. Мещерякова

Групповой анализ уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла*

E.Yu. Meshcheryakova

Group Analysis of Incompressible Viscoelastic Maxwell Continuum Equations

Рассматривается несжимаемый вязкоупругий континуум Максвелла с постоянным временем релаксации. Система уравнений, описывающая такую среду, состоит из уравнения неразрывности, уравнения импульса и тензорного реологического соотношения. Изучены групповые свойства модели для трех случаев записи реологического соотношения: с вращательной производной Яуманна, верхней конвективной производной и нижней конвективной производной. Построены одно- и двумерные оптимальные системы подалгебр.

Ключевые слова: несжимаемая вязкоупругая среда Максвелла, группа Ли, оптимальная система подалгебр.

The researcher considers an incompressible viscoelastic Maxwell continuum with constant relaxation time. The system of equations describing such medium consists of continuity equation, momentum equation and a tensor rheological relation. The author studies the group properties of the model for three records of rheological relation: with Jaumann rotational derivative and with the upper or lower convective derivatives.

First and second order optimal systems of subalgebras are constructed.

Key word: Maxwell incompressible viscoelastic medium, Lie group, optimal system of subalgebras.

Данная статья посвящена изучению групповых свойств несжимаемого вязкоупругого континуума Максвелла. Математическая модель такой среды подробно обсуждалась в [1], поэтому приведем ее здесь со ссылкой на данную работу. Материальными характеристиками рассматриваемой среды являются ее плотность ρ, динамическая вязкость μ и время релаксации τ, которое определяет поведение и свойства вязкоупругой среды [2]. Если продолжительность действующей на среду Максвелла нагрузки достаточно мала по сравнению со временем релаксации, то в большей степени проявляются упругие свойства, и тело Максвелла ведет себя как упругое твердое тело; если велика, то преобладают вязкие силы, и среда течет как ньютоновская жидкость.

Обозначим через $\mathbf{v}$, p, P и D вектор скорости, давление, тензор напряжений и тензор скоростей деформаций соответственно. Предполагается, что на среду не действуют внешние объемные силы. Случай, когда внешние силы имеют потенциал, можно свести к предыдущему стандартным преобразованием давления.

Система уравнений, связывающих искомые функции, состоит из трех уравнений: скалярного уравнения неразрывности, векторного уравнения импульса и тензорного реологического соотношения. Если первые два уравнения имеют универсальный вид (см., например: [3]), то в выборе последнего уравнения имеется произвол [4, 5].

Уравнение неразрывности несжимаемой сплошной среды имеет вид

$$div\,\mathbf{v}=0. \tag{1}$$

Уравнение импульса любой сплошной среды, удовлетворяющей принципу напряжений Коши, записывается в виде

$$\rho(\mathbf{v}_t+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})=div\,P. \tag{2}$$

Реологическое соотношение для несжимаемой среды Максвелла записано для девиаторной части S тензора напряжений P ($P=-pI+S$) и имеет вид

$$\tau\frac{\tilde{d}S}{dt}+S=2\mu D. \tag{3}$$

Здесь символ $\tilde{d}/dt$ обозначает одну из инвариантных, или объективных, производных тензора. Выбирая в (3) в качестве инвариантной производной вращательную производную Яуманна, получаем следующее реологическое соотношение

$$\tau(\frac{\partial S}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla S-W\cdot S+S\cdot W)+S=2\mu D, \tag{4}$$

где W – антисимметричная часть тензора $\nabla\mathbf{v}$.

* Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт 14.740.11.0355), программы ОЭММПУ РАН (проект №2.13.2) и гранта Президента РФ для поддержки молодых докторов наук МД-168.2011.1.

Тогда оказывается, что

$$Tr(S\cdot W - W\cdot S) = 0$$

для любого симметричного тензора S. В силу уравнения (1), $Tr\,D=0$, что вместе с равенством (3) приводит к уравнению для функции $Tr\,S$:

$$\tau(\frac{\partial Tr\,S}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla Tr\,S) + Tr\,S = 0.$$

Если $Tr\,S=0$ в момент $t=0$, то в силу последнего уравнения

$$Tr\,S=0 \qquad (5)$$

при любых t.

Теперь запишем равенство (3) с верхней конвективной производной:

$$\tau(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla S - \nabla\mathbf{v}\cdot S - S\cdot\nabla\mathbf{v}^T) + S = 2\mu D, \qquad (6)$$

и нижней конвективной производной:

$$\tau(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla S + \nabla\mathbf{v}\cdot S + S\cdot\nabla\mathbf{v}^T) + S = 2\mu D\cdot \qquad (7)$$

Как показано в [1], уравнение (5) несправедливо для случаев верхней и нижней конвективной производной, и его добавление к системе приведет лишь к ее переопределенности. Поэтому мы рассмотрим следующие уравнения, описывающие движение несжимаемой среды Максвелла:

1. Модель 1. С яуманновской объективной производной (1), (2), (4), (5);
2. Модель 2. С верхней конвективной производной (1), (2), (6);
3. Модель 3. С нижней конвективной производной (1), (2), (7).

Вне зависимости от выбранной модели к настоящему времени отсутствуют глобальные теоремы существования и единственности для уравнений движения несжимаемой среды Максвелла, что повышает интерес к построению точных решений для этих уравнений. Один из наиболее мощных и универсальных методов интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными – это групповой анализ дифференциальных уравнений, разработанный С. Ли и развитый в работах Л.В. Овсянникова [6] и других ученых. Основной идеей группового анализа в области интегрирования дифференциальных уравнений является поиск непрерывных групп Ли симметрии системы дифференциальных уравнений, т.е. непрерывных преобразований зависимых и независимых переменных, оставляющих уравнения инвариантными. Любое преобразование группы симметрий G переводит решение уравнений, вообще говоря, в другое решение. Частные решения выделяются требованием полной или частичной инвариантности относительно подгрупп группы G.

Группе Ли симметрии однозначно соответствует алгебра Ли ее инфинитезимальных операторов. Подобным, т.е. сопряженным относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры L подалгебрам (= подгруппам группы G), соответствуют подобные решения. Перечень всех неподобных подалгебр допускаемой алгебры L называется оптимальной системой подалгебр ΘL. Построение точных решений на подгруппах, соответствующих подалгебрам оптимальной системы, позволяет полностью исчерпать свойство симметрии данной системы уравнений.

Изучим групповые свойства моделей 1–3 для случая плоскопараллельного движения, в котором число искомых функций снижается с девяти до пяти. Введем обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$, $v_1 = u$, $v_2 = v$. Для модели 1 $S_{11} = -S_{22} = A$ (в силу условия $Tr\,S=0$), $S_{12} = S_{21} = B$. Для моделей 2, 3 тензор S будет иметь компоненты $S_{11} = A$, $S_{12} = S_{21} = B$, $S_{22} = C$.

Система для нахождения *u*, *v*, *p*, *A*, *B*, зависящих от *t*, *x*, *y* для модели 1 имеет вид

$$\begin{gathered} u_x + v_y = 0, \quad \rho(u_t + uu_x + vu_y) + p_x - A_x - B_y = 0, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y) + p_y - B_x + A_y = 0, \\ \tau[A_t + uA_x + vA_y + B(v_x - u_y)] - 2\mu u_x + A = 0, \\ \tau[B_t + uB_x + vB_y - A(v_x - u_y)] - \mu(u_y + v_x) + B = 0. \end{gathered} \qquad (8)$$

Вычисления показывают, что алгебра Ли L, соответствующая наиболее широкой группе, допускаемой системой (8), порождена следующими операторами:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_t, \quad X_2 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v + 2B\partial_A - 2A\partial_B, \\ \langle\alpha(t)\rangle_1 = \alpha(t)\partial_x + \dot{\alpha}(t)\partial_u - \rho x\ddot{\alpha}(t)\partial_p, \\ \langle\beta(t)\rangle_2 = \beta(t)\partial_y + \dot{\beta}(t)\partial_v - \rho y\ddot{\beta}(t)\partial_p, \\ \langle\gamma(t)\rangle_3 = \gamma(t)\partial_p, \end{gathered} \qquad (9)$$

где точка обозначает дифференцирование по t, угловые скобки $\langle\cdot\rangle$ обозначают семейство операторов, зависящих от произвольной функции времени. Заметим, что данная алгебра содержит целых три таких семейства, где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – произвольные гладкие функции.

Для моделей 2 и 3 алгебра Ли группы симметрий имеет вид

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_t, \\ X_2 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v + 2B\partial_A + (C-A)\partial_B - 2B\partial_C, \\ \langle\alpha(t)\rangle_1 = \alpha(t)\partial_x + \dot{\alpha}(t) - \rho x\ddot{\alpha}(t)\partial_p, \\ \langle\beta(t)\rangle_2 = \beta(t)\partial_y + \dot{\beta}(t)\partial_v - \rho y\ddot{\beta}(t)\partial_p, \\ \langle\gamma(t)\rangle_3 = \gamma(t)\partial_p, \end{gathered} \qquad (10)$$

Заметим, что структура (таблица коммутаторов) алгебр Ли (9) и (10) полностью совпадает. Это означает, что их оптимальные системы подалгебр также будут одинаковыми. Ниже мы будем работать с операторами алгебры (9).

Согласно алгоритму построения оптимальной системы подалгебр (см., например: [6, 7]), сначала вычисляются коммутаторы операторов алгебры Ли. Ненулевые коммутаторы операторов (9) следующие:

$$\left[X_1,\langle\alpha_2\rangle_1\right]=\langle\dot\alpha_2\rangle_1,\quad \left[X_1,\langle\beta_2\rangle_2\right]=\langle\dot\beta_2\rangle_2,$$

$$\left[X_1,\langle\gamma_2\rangle_3\right]=\langle\dot\gamma_2\rangle_3,\quad \left[X_2,\langle\alpha_2\rangle_1\right]=\langle\alpha_2\rangle_2,$$

$$\left[X_2,\langle\beta_2\rangle_2\right]=-\langle\beta_2\rangle_1,\ \left[\langle\alpha_1\rangle_1,\langle\alpha_2\rangle_1\right]=\rho\langle\alpha_2\ddot\alpha_1-\alpha_1\ddot\alpha_2\rangle_3,$$

$$\left[\langle\beta_1\rangle_2,\langle\beta_2\rangle_2\right]=\rho\left\langle\beta_2\ddot\beta_1-\beta_1\ddot\beta_2\right\rangle_3. \qquad (11)$$

Для нахождения группы внутренних автоморфизмов [6] алгебры L запишем оператор $X\in L$ в виде

$$X=x^1X_1+x^2X_2+\langle\alpha\rangle_1+\langle\beta\rangle_2+\langle\gamma\rangle_3, \qquad (12)$$

где $x^i, \alpha, \beta, \gamma$ называются координатами оператора X.

Преобразованные значения координат и функций будем обозначать теми же буквами с верхней чертой. Построим автоморфизмы, порождаемые базисными операторами алгебры L. Преобразования группы внутренних автоморфизмов алгебры L вычисляются из уравнения Ли [6]

$$\frac{d\bar X}{dt}=\left[Y,\bar X\right],\quad \bar X\big|_{t=0}=X,\quad Y\in L.$$

Для оператора X_1 имеем (в силу (11))

$$\frac{d\bar X}{dt_1}=\left[X_1,\bar X\right]=\langle\dot{\bar\alpha}\rangle_1+\left\langle\dot{\bar\beta}\right\rangle_2+\langle\dot{\bar\gamma}\rangle_3,$$

$$\bar x^i\big|_{t_1=0}=x^i,\quad i=1,2;$$

$$\bar\alpha\big|_{t_1=0}=\alpha(t),\quad \bar\beta\big|_{t_1=0}=\beta(t),\quad \bar\gamma\big|_{t_1=0}=\gamma(t). \qquad (13)$$

Приравнивая коэффициенты при базисных операторах X_1 и X_2, а также функции времени в операторах $\langle\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot\rangle_2$, $\langle\cdot\rangle_3$ в обеих частях уравнения (13), находим преобразования координат:

$$\bar x^1=x^1,\ \bar x^2=x^2.$$

Для нахождения функций $\bar\alpha$, $\bar\beta$ и $\bar\gamma$ имеем следующие задачи Коши:

$$\frac{\partial\bar\alpha}{\partial t_1}=\frac{\partial\bar\alpha}{\partial t},\quad \frac{\partial\bar\beta}{\partial t_1}=\frac{\partial\bar\beta}{\partial t},\quad \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t_1}=\frac{\partial\bar\gamma}{\partial t},$$

$$\bar\alpha\big|_{t_1=0}=\alpha(t),\quad \bar\beta\big|_{t_1=0}=\beta(t),\quad \bar\gamma\big|_{t_1=0}=\gamma(t),$$

решая которые, находим

$$\bar\alpha=\alpha(t+t_1),\quad \bar\beta=\beta(t+t_1),\quad \bar\gamma=\gamma(t+t_1).$$

Аналогично находится автоморфизм, порождаемый оператором X_2:

$$\bar x^1=x^1,\quad \bar x^2=x^2,$$

$$\bar\alpha=\alpha(t)\cos t_2+\beta(t)\sin t_2,$$

$$\bar\beta=\beta(t)\cos t_2-\alpha(t)\sin t_2,\quad \bar\gamma=\gamma(t).$$

Далее находим автоморфизм, порождаемый оператором $\langle\cdot\rangle_1$ с некоторой фиксированной функцией $\sigma(t)$:

$$\frac{d\bar X}{dt_3}=\left[\langle\sigma\rangle_1,\bar X\right]=-\bar x^1\langle\dot\sigma\rangle_1-\bar x^2\langle\sigma\rangle_2+\rho\left\langle\bar\alpha\ddot\sigma-\sigma\ddot{\bar\alpha}\right\rangle_3,$$

$$\bar x^i\big|_{t_3=0}=x^i,\quad i=1,2;$$

$$\bar\alpha\big|_{t_3=0}=\alpha(t),\quad \bar\beta\big|_{t_3=0}=\beta(t),\quad \bar\gamma\big|_{t_3=0}=\gamma(t).$$

Находим, что $\bar x^1=x^1$, $\bar x^2=x^2$.

Далее решаем систему для нахождения $\bar\alpha$, $\bar\beta$ и $\bar\gamma$:

$$\frac{d\bar\alpha}{dt_3}=-\bar x^1\dot\sigma;\quad \frac{d\bar\beta}{dt_3}=-\bar x^2\sigma;\quad \frac{d\bar\gamma}{dt_3}=\rho\left(\bar\alpha\ddot\sigma-\sigma\ddot{\bar\alpha}\right).$$

Интегрированием находим

$$\bar\alpha=\alpha(t)-t_3x^1\dot\sigma,\quad \bar\beta=\beta(t)-t_3x^2\sigma,$$

$$\bar\gamma=\gamma(t)+t_3\rho(\alpha\ddot\sigma-\sigma\ddot\alpha)-t_3^2\frac{\rho}{2}x^1(\sigma\ddot\sigma-\sigma\ddot\sigma). \qquad (14)$$

В силу произвольности функции σ можно сделать замену $t_3\sigma\to\sigma$, и тогда формулы (14) примут вид

$$\bar\alpha=\alpha(t)-x^1\dot\sigma,\quad \bar\beta=\beta(t)-x^2\sigma,$$

$$\bar\gamma=\gamma(t)+\rho(\alpha\ddot\sigma-\sigma\ddot\alpha)-\frac{\rho}{2}x^1(\sigma\ddot\sigma-\sigma\ddot\sigma).$$

Аналогично находятся автоморфизмы, порождаемые операторами $\langle\cdot\rangle_2$ и $\langle\cdot\rangle_3$ с некоторыми фиксированными функциями $\tau(t)$и $\lambda(t)$ соответственно. Окончательно таблица внутренних автоморфизмов алгебры Ли L имеет вид

	$\bar x^1$	$\bar x^2$	$\bar\alpha(t)$	$\bar\beta(t)$	$\bar\gamma(t)$
$A_1(t_1)$	x^1	x^2	$\alpha(t+t_1)$	$\beta(t+t_1)$	$\gamma(t+t_1)$
$A_2(t_2)$	x^1	x^2	$\alpha(t)\cos t_2+\beta(t)\sin t_2$	$\beta(t)\cos t_2-\alpha(t)\sin t_2$	$\gamma(t)$
$A_3(\sigma(t))$	x^1	x^2	$\alpha(t)-x^1\dot\sigma$	$\beta(t)-x^2\sigma$	$\gamma(t)+\rho(\ddot\sigma\alpha-\sigma\ddot\alpha)-$ $-\frac{\rho}{2}x^1(\dot\sigma\ddot\sigma-\sigma\dddot\sigma)$
$A_4(\tau(t))$	x^1	x^2	$\alpha(t)+x^2\tau$	$\beta(t)-x^1\dot\tau$	$\gamma(t)+\rho(\ddot\tau\beta-\tau\ddot\beta)-$ $-\frac{\rho}{2}x^1(\dot\tau\ddot\tau-\tau\dddot\tau)$
$A_5(\lambda(t))$	x^1	x^2	$\alpha(t)$	$\beta(t)$	$\gamma(t)-x^1\dot\lambda$

Напомним, что подалгебры $H, K \subset L$ называются *подобными*, если существует внутренний автоморфизм $A \in \operatorname{Int} L$, с которым $K = AH$ [6, 7].

Заметим, что координаты x^1, x^2 являются инвариантами группы внутренних автоморфизмов.

1. Предположим, что $x^1 \neq 0$. Без ограничения общности будем считать $x^1 = 1$. Заметим, что применение автоморфизов $A_3(\sigma(t))$ и $A_4(\tau(t))$ позволяет занулить $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$. Для этого необходимо решить систему

$$0 = \bar{\alpha} = \alpha - \dot{\sigma} + x^2\tau$$
$$0 = \bar{\beta} = \beta - x^2\sigma - \dot{\tau}$$

относительно σ и τ. Ее решение, по крайней мере локально, всегда существует. Аналогично $A_5(\lambda(t))$ делает $\bar{\gamma} = 0$. Таким образом, любой одномерный оператор с ненулевыми координатами x^1, x^2 эквивалентен оператору $X_1 + x^2 X_2$.

2. Пусть $x^1 = 0$, но $x^2 \neq 0$. Тогда автоморфизмами $A_3(\sigma(t))$ и $A_4(\tau(t))$ зануляем $\bar{\beta}$ и $\bar{\alpha}$ соответственно. В этом случае $\bar{\gamma}$ занулить не удается, поэтому базисный оператор имеет вид $X_2 + \langle\gamma(t)\rangle_3$.

3. В случае $x^1 = x^2 = 0$ функции $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ – произвольные отличные от 0 (на них нельзя подействовать автоморфизмом), зато функцию $\bar{\gamma}$ удастся занулить, решив дифференциальное уравнение относительно σ: $0 = \bar{\gamma} = \gamma(t) + \rho(\ddot{\sigma}\alpha - \sigma\ddot{\alpha})$. Таким образом, базисный оператор сводится к $\langle\alpha(t)\rangle_1 + \langle\beta(t)\rangle_2$.

4. Наконец, в случае $x^1 = x^2 = \alpha = \beta = 0$ остается функция $\gamma(t)$, которую не удается занулить. Базисный оператор здесь $\langle\gamma(t)\rangle_3$.

Итак, оптимальная система одномерных подалгебр $\Theta_1 L$ такова:

$$X_1 + x^2 X_2,\ X_2 + \langle\gamma(t)\rangle_3,$$
$$\langle\alpha(t)\rangle_1 + \langle\beta(t)\rangle_2,\ \langle\gamma(t)\rangle_3. \qquad (15)$$

Точные решения, построенные относительно некоторых из операторов (14), рассмотрены, например, в [8–10].

Рассматриваемая алгебра (9) имеет следующую структуру: $L = L_2 \dot{\oplus} L_\infty$, причем бесконечномерная часть L_∞ является идеалом в L, а L_2 – подалгеброй. Двумерные подалгебры алгебры L получаются расширением одномерных и нульмерной подалгебр. Заметим, что действием группы внутренних автоморфизмов один из операторов двумерной подалгебры всегда можно привести к виду (15).

1. Сначала рассмотрим двумерную подалгебру, у которой первый базисный оператор приведен к виду $X_1 + x^2 X_2$. Ее базис имеет следующий наиболее общий вид:

$$\left\{X_1 + x^2 X_2, X_2 + \langle\alpha\rangle_1 + + \langle\beta\rangle_2 + \langle\gamma\rangle_3\right\}.$$

Проверим условие подалгебры:

$$\left[X_1 + x^2 X_2, X_2 + \langle\alpha\rangle_1 + \langle\beta\rangle_2 + \langle\gamma\rangle_3\right] =$$
$$= \langle\dot{\alpha}\rangle_1 + \langle\dot{\beta}\rangle_2 + \langle\dot{\gamma}\rangle_3 + x^2\langle\alpha\rangle_2 - x^2\langle\beta\rangle_1 =$$
$$= \langle\dot{\alpha} - x^2\beta\rangle_1 + \langle\dot{\beta} + x^2\alpha\rangle_2 + \langle\dot{\gamma}\rangle_3.$$

Получившийся оператор должен линейно выражаться через базисные операторы подалгебры. Таким образом, α, β, γ должны удовлетворять системе уравнений $\dot{\alpha} = x^2\beta$, $\dot{\beta} = -x^2\alpha$, $\dot{\gamma} = 0$, откуда

$$\alpha = C_1 \sin\left(x^2(t + C_2)\right),$$
$$\beta = C_1 \cos\left(x^2(t + C_2)\right), \quad \gamma = C_3. \qquad (16)$$

В силу автоморфизма $A_1(t_1)$, серия подалгебр (16) примет вид

$$\left\{X_1 + x^2 X_2, X_2 + C_1\langle\sin(x^2 t)\rangle_1 + + C_1\langle\cos(x^2 t)\rangle_2 + C_3\langle 1\rangle_3\right\}. \qquad (17)$$

2. Рассмотрим предыдущий случай, когда $x^2 = 0$. Из условий подалгебры $\alpha = C_1$, $\beta = C_2$ и $\gamma = C_3$, и подалгебра принимает вид

$$\left\{X_1,\ X_2 + C_1\langle 1\rangle_1 + + C_2\langle 1\rangle_2 + C_3\langle 1\rangle_3\right\}.$$

После применения автоморфизма $A_2(t_2)$ и переобозначения констант окончательно имеем

$$\left\{X_1, X_2 + C_1\langle 1\rangle_1 + C_3\langle 1\rangle_3\right\}. \qquad (18)$$

3. Рассмотрим следующую подалгебру (здесь рассматривается случай, когда при вычитании $X_1 + x^2 X_2$ из (12) остается только $\langle\alpha\rangle_1 + \langle\beta\rangle_2 + + \langle\gamma\rangle_3$):

$$\left[X_1 + x^2 X_2, \langle\alpha\rangle_1 + \langle\beta\rangle_2 + \langle\gamma\rangle_3\right] =$$
$$= \langle\dot{\alpha}\rangle_1 + \langle\dot{\beta}\rangle_2 + \langle\dot{\gamma}\rangle_3 + x^2\langle\alpha\rangle_2 - x^2\langle\beta\rangle_1 =$$
$$= \langle\dot{\alpha} - x^2\beta\rangle_1 + \langle\dot{\beta} + x^2\alpha\rangle_2 + \langle\dot{\gamma}\rangle_3 =$$
$$= k\left(\langle\alpha\rangle_1 + \langle\beta\rangle_2 + \langle\gamma\rangle_3\right).$$

Находим решение соответствующей системы для α, β, γ:

$$\alpha = e^{kt}\left(C_1\cos(x^2 t) + C_2\sin(x^2 t)\right),$$
$$\beta = e^{kt}\left(-C_1\sin(x^2 t) + C_2\cos(x^2 t)\right), \quad \gamma = C_3 e^{kt}.$$

Тогда подалгебра имеет вид

$$\left\{X_1 + x^2 X_2, \left\langle e^{kt}\left(C_1 \cos\left(x^2 t\right) + C_2 \sin\left(x^2 t\right)\right)\right\rangle_1 + \right.$$
$$\left. + \left\langle e^{kt}\left(-C_1 \sin\left(x^2 t\right) + C_2 \cos\left(x^2 t\right)\right)\right\rangle_2 + C_3 \left\langle e^{kt}\right\rangle_3\right\}. \quad (19)$$

4. Случай $\left\{X_2 + \langle\gamma_1\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_1 + \langle\beta_2\rangle_2 + \langle\gamma_2\rangle_3\right\}$ дает подалгебру

$$\left\{X_2 + \langle\gamma_1\rangle_3, \langle\gamma_2\rangle_3\right\}. \quad (20)$$

Осталось выполнить расширение нульмерной подалгебры L_2.

5. Рассмотрим двумерные подалгебры L вида $\left\{\langle\alpha_1\rangle_1 + \langle\beta_1\rangle_2, \langle\alpha_2\rangle_1 + \langle\beta_2\rangle_2 + \langle\gamma_2\rangle_3\right\}$

$$\left[\langle\alpha_1\rangle_1 + \langle\beta_1\rangle_2, \langle\alpha_2\rangle_1 + \langle\beta_2\rangle_2 + \langle\gamma_2\rangle_3\right] =$$
$$= \rho\langle\alpha_2\ddot{\alpha}_1 - \alpha_1\ddot{\alpha}_2\rangle_3 + \rho\left\langle\beta_2\ddot{\beta}_1 - \beta_1\ddot{\beta}_2\right\rangle_3 =$$
$$= \rho\left\langle\alpha_2\ddot{\alpha}_1 - \alpha_1\ddot{\alpha}_2 + \beta_2\ddot{\beta}_1 - \beta_1\ddot{\beta}_2\right\rangle_3.$$

Условие подалгебры накладывает условие на функции α и β, имеем:

$\left\{\langle\alpha_1\rangle_1 + \langle\beta_1\rangle_2, \langle\alpha_2\rangle_1 + \langle\beta_2\rangle_2 + \langle\gamma_2\rangle_3\right\}$ при условии

$$\dot{\alpha}_1\alpha_2 - \alpha_1\dot{\alpha}_2 = \beta_1\dot{\beta}_2 - \beta_2\dot{\beta}_1 + C. \quad (21)$$

6. Последний вариант отвечает подалгебре

$$\left\{\langle\gamma_1\rangle_3, \langle\gamma_2\rangle_3\right\}. \quad (22)$$

Итак, оптимальная система двумерных подалгебр $\Theta_2 L$ для системы (8) состоит из подалгебр (17)–(22).

В работе рассмотрены уравнения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла при различном выборе объективной производной (вращательной, верхней и нижней) девиатора тензора напряжений в уравнении состояния. Показано, что уравнения плоскопараллельных движений допускают одинаковую бесконечномерную группу симметрий при любом выборе объективной производной. Построены оптимальные системы одно- и двумерных подалгебр бесконечномерной алгебры Ли, соответствующей допускаемой группе. Эти результаты могут быть использованы для получения новых точных решений изучаемых уравнений.

Автор выражает благодарность В.В. Пухначеву за постановку задач и С.В. Головину за полезное обсуждение и внимание к работе.

Библиографический список

1. Пухначев В.В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, №4.
2. Рейнер М. Реология. – М., 1965.
3. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. – М., 1963.
4. Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М., 1978.
5. Joseph D.D. Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids. – Springer Verlag, 1990.
6. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М., 1978.
7. Головин С.В., Чесноков А.А. Групповой анализ дифференциальных уравнений: учеб. пособие. – Новосибирск, 2008.
8. Пухначев В.В. Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2009. – Т. 50, №2.
9. Мещерякова Е.Ю., Пухначев В.В. Групповой анализ уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XIV Междунар. конф. – Ростов-на-Дону, 2010.
10. Liapidevskii V.Yu., Pukhnachev V.V., Tani A. Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium // Wave Motion. – Vol. 48. – 2011.