УДК 539.3

А.Д. Матвеев

Определение коэффициента запаса прочности, вероятности разрушения и срока службы для совокупности упругих деталей, состоящих из различных материалов*

A. Matveev

Determination of the Safety Factor, Failure Probability and Service Life for a Set of Elastic Parts Containing Various Materials

Предложена детерминистическая процедура анализа прочности совокупности деталей, внешние и внутренние параметры которых являются случайными. В процедуре используются детерминистические функции и величины, которые количественно оценивают влияние случайных параметров на прочность деталей. Изложен метод построения приближенных решений стохастической задачи упругости. Показано, что для тела со случайными параметрами существует бесконечное множество эквивалентных условий прочности. Доказано, что равнонапряженные конструкции имеют меньший запас прочности и срок службы, чем конструкции с концентраторами напряжений при прочих равных условиях.

Ключевые слова: упругие детали, обобщенные эквивалентные напряжения, стохастическая задача упругости, коэффициенты запаса, эквивалентные условия прочности, срок службы.

Deterministic method of analysis of the combined strength of parts, with external and internal parameters being random, has been proposed. In this procedure the deterministic functions and values computing the random parameters influencing on the parts strength have been used. In this procedure the deterministic functions and values computing the random parameters influencing on the parts strength have been used. The method for constructing approximate solutions of the stochastic elasticity problem has been given. It has been showed that for part with random parameters exist crowd equivalent strength conditions. It has been proved that equally stressed structures have smaller safety factor and service life rather than structures with stress concentrators under otherwise equal conditions.

Key word: elastic parts, generalized equivalent stresses, stochastic elasticity problem, safety factor, equivalent strength conditions, service life.

Введение. В основе классической расчетной схемы конструкции лежит гипотеза полной определенности, которая состоит в детерминированности нагрузки, механических свойств материала, размеров и формы конструкции, т.е. нагрузка, модули упругости, размеры конструкции принимают определенные значения. При детерминистическом подходе расчетная схема не всегда вполне удовлетворительно описывает реальную работу конструкции, так как нагрузка и механические свойства материала конструкции носят случайный характер [1–3]. Реальный металл характеризуется микронеоднородностью, которая обусловлена анизотропией кристаллитов, из которых он состоит, наличием между ними пор и неметаллических включений [1]. Поэтому результаты испытаний конструкций на прочность (долговечность) имеют значительный статический разброс, причем явления повреждения и разрушения конструкций обнаруживают вероятностную природу. Это стало причиной развития статистических теорий прочности и разрушения упругих тел [1–3], в основе которых лежат теория вероятностей и математическая статистика. Статистическая теория прочности Н.Н. Афанасьева [1] описывает влияние конструктивных факторов на средние значения пределов выносливости деталей машин. Теория «слабого звена» В. Вейбулла описывает влияние размеров образцов и неоднородности распределения напряжений на характеристики сопротивления хрупкому разрушению. Статистические теории имеют следующие недостатки. В этих теориях используют приближенные простые экспоненциальные законы распределения случайных параметров конструкции, так как построение точных законов с помощью экспериментов затруднительно. Основной числовой характеристикой случайной величины служит математическое ожидание (т.е. среднее значение случайной величины), которое больше наименьшего и меньше наибольшего возможных значений. Поэтому применение в расчетах средних значений нагрузок, модулей упругости и напряжений [3] порождает трудности, связанные с адекватной оценкой прочности конструкций. Время T эксплуатации (наработки) конст-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-00053).

рукции до первого отказа есть случайная величина. Согласно ГОСТу 27.002-89 среднюю наработку T_c конструкции (до первого отказа) находят по формуле $T_c = \int_o^\infty tf(t)dt$, где $f(t)$ – плотность распределения наработки. Отметим, что $T_{\min} < T_c < T_{\max}$; $T_{\min}$ ($T_{\max}$) – минимальное (максимальное) возможное время эксплуатации конструкции. Определить значения $T_{\min}$, $T_{\max}$ трудно. Для практики важно знать значения $T_{\min}$, $T_{\max}$. Как известно, для разрушения хрупкого тела достаточно, чтобы в одной точке тела возникло напряжение, равное предельному. Значит, между максимальным напряжением, возникающим в хрупком теле, и вероятностью его разрушения можно установить взаимно однозначную связь, что и подтверждают статистическая теория («слабого звена») хрупкого разрушения и эксперименты [2]. Опыт показывает, что разрушение пластичного тела происходит только тогда, когда в теле возникает область пластического состояния некоторых размеров. Установить взаимно однозначную связь между размерами этой области и вероятностью разрушения тела очень сложно.

В данной работе изложены некоторые подходы нахождения коэффициентов запаса прочности и времени эксплуатации для упругих конструкций, состоящих из пластичных материалов. При этом считаем, что нагружения и механические характеристики данных конструкций есть случайные стационарные функции.

1. Численный анализ прочности упругих конструкций со случайными характеристиками. Постановку стационарной стохастической краевой задачи теории упругости (в перемещениях) для линейно упругой конструкции (которая состоит из пластичного материала и занимает область V с гладкой границей S) в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ представим в следующем виде [3]

$$-\partial(a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u))/\partial x_j = F_i \text{ в } V \in R^3, \quad (1)$$
$$\text{на } S_q:\ a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)n_j = q_i;$$
$$\text{на } S_u:\ u = 0,\ S = S_u + S_q,$$

где ε_{kh} – деформации; u – вектор перемещений конструкции V; n_j – компоненты внешней нормали к поверхности S_q; a_{ijkh} – модули упругости; $a_{ijkh} \ge 0$; F_i – объемные и q_i – поверхностные силы; a_{ijkh}, F_i, q_i – стационарные случайные гладкие функции координат; функции a_{ijkh} обладают свойствами симметрии; i, j, k, h = 1, 2, 3.

Рассмотрим процедуру нахождения коэффициента запаса прочности для конструкции V. Будем считать, что геометрические параметры конструкции V заданы, т.е. принимают определенные значения. Пусть известны стационарные детерминистические функции координат F_i^1, F_i^2 q_i^1, q_i^2, a_{ijkh}^1, a_{ijkh}^2, что

$$\text{в } V:\ F_i^1 \le F_i \le F_i^2;\ 0 \le a_{ijkh}^1 \le a_{ijkh} \le a_{ijkh}^2;$$
$$\text{на } S_q:\ q_i^1 \le q_i \le q_i^2. \quad (2)$$

Опыт показывает, что значения механических характеристик пластичного однородного материала (металла) образца лежат в некотором интервале и что для изотропных однородных пластичных металлов значения коэффициента Пуассона μ почти не изменяются. Рассмотрим случай. Пусть конструкция V состоит из изотропного пластичного материала. При этом модуль Юнга E конструкции есть случайная функция координат, т.е. $E = E(x, y, z)$, $E \ne const$ в V. Пусть существуют такие числа E_1, E_2, что

$$E_1 \le E(x, y, z) \le E_2,\quad x, y, z \in V. \quad (3)$$

Пусть коэффициент Пуассона μ для конструкции V задан и $\mu = const$. Отметим, что в этом случае стохастическая задача теории упругости (1) имеет бесконечное множество решений, которые отвечают решениям данной задачи упругости для случайных функций E, F_i, q_i конструкции, которые удовлетворяют условиям (2), (3), $E \ne const$ в V. Используем конечно-элементную постановку для краевой задачи теории упругости (1). Область конструкции представляем мелким регулярным разбиением на конечные элементы (КЭ): $V_1,\ldots,V_N$; $V = \bigcup_{e=1}^N V_e$. Обозначим: E^e – модуль Юнга; F_i^e – объемные и q_i^e – поверхностные силы КЭ V_e; E^e, F_i^e, q_i^e – случайные гладкие функции, i = 1, 2, 3; e = 1, …, N; N – общее число КЭ. В силу (2) существуют такие постоянные $F_i^{(e)1}$, $F_i^{(e)2}$, $q_i^{(e)1}$, $q_i^{(e)2}$ (число e фиксировано), что $q_i^{(e)1} \le q_i^e \le q_i^{(e)2}$, $F_i^{(e)1} \le F_i^e \le F_i^{(e)2}$. В силу малых размеров КЭ V_e принимаем $F_i^e, q_i^e, E^e = const$ на V_e. Считаем, что случайная величина E^e меняется дискретно с шагом ΔE, где $\Delta E = (E_2 - E_1)/m$, m – целое (задано), $m \geq 2$, $e = 1,...,N$. Тогда модуль Юнга E^e КЭ V_e может принять одно из значений: $E^e = E_1$, $E^e = E_1 + \Delta E$, $E^e = E_1 + 2\Delta E$,…, $E^e = E_1 + m\Delta E = E_2$. Следовательно, случайная величина E^e может принять $m+1$ различных значений. Итак, для разбиения $V_1,...,V_N$ конструкции имеем $M = (m+1)^N$ различных вариантов распределения модулей Юнга по КЭ, где N, m – целые, заданы. Не теряя общности суждений и для простоты изложения, будем считать, что в области конструкции V: $F_i^1, F_i^2 \geq 0$, на ее поверхности S_q: $q_i^1, q_i^2 \geq 0$.

При расчете конструкции на прочность для всех КЭ используем максимальные (по модулю) значения нагружений. Учитывая (2) и что $F_i^1, F_i^2 \geq 0$, $F_i^1, F_i^2 \geq 0$, принимаем: $F_i^e = F_i^{(e)2}$, $q_i^e = q_i^{(e)2}$, $e = 1,...,N$. В результате для конструкции V получаем M дискретных детерминистических моделей $R_1,…,R_M$, которые имеют различные распределения модулей Юнга по КЭ $V_1,…,V_N$, но имеют одинаковые нагружения для КЭ V_e: $F_i^e = F_i^{(e)2}$, $q_i^e = q_i^{(e)2}$ ($e = 1,...,N$). Пусть решению u_α, которое построено по методу конечных элементов (МКЭ) для дискретной модели R_α, отвечает коэффициент запаса прочности n_α, где $\alpha = 1,...,M$. Определив коэффициенты $n_1,..., n_M$, находим коэффициент запаса прочности n_p конструкции V как минимальное значение из всех возможных, т.е. имеем $n_p = \min(n_1,..., n_M)$, $1 \leq p \leq M$. Итак, для нахождения коэффициентов запаса прочности $n_1,..., n_M$ для дискретных детерминистических моделей $R_1,...,R_M$ следует решить по МКЭ M многомерных задач теории упругости, что связано с большими временными затратами при больших значениях m, N; на практике $m = 10 \div 15$, $N \geq 10^4$.

Данные задачи можно эффективно решать на параллельных компьютерах. Пусть компьютер имеет N независимых процессоров. Если на каждом процессоре решить $k = m+1$ дискретных задач упругости, то в этом случае время решения M задач упругости сокращается в N раз. Современные мощные параллельные компьютеры имеют более 10^4 процессоров. Значит, в настоящее время можно построить $M = (m+1)^N$ приближенных решений стохастической задачи теории упругости (1), используя $m = 10 \div 15$, $N \geq 10^4$ (N – меньше или равно числу процессоров компьютера), т.е. можно приближенно найти коэффициент запаса прочности n_p конструкции V со случайными параметрами, причем чем больше числа m, N, тем точнее определяем значение коэффициента n_p.

Отметим, что изложенную выше процедуру можно использовать для проектирования конструкции V с максимально возможной прочностью. В этом случае коэффициент запаса прочности n_c конструкции V равен $n_c = \max(n_1,..., n_M)$, $1 \leq c \leq M$. Распределение модулей упругости E^e по КЭ V_e соответствует дискретной модели $R_c \in \{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$ конструкции V.

2. Эквивалентные условия прочности для упругих тел со случайными параметрами. Рассмотрим теорему об эквивалентных условиях прочности.

Теорема. Пусть для стохастической задачи теории упругости (1) построены детерминистические конечно-элементные модели $\{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$ (имеющие нагружения F_i^2, q_i^2), которым отвечают коэффициенты запаса $\{n_\alpha\}_{\alpha=1}^M$. Пусть коэффициент запаса $n_p = \min(n_1,..., n_M)$ тела V, $1 \leq p \leq M$, удовлетворяет заданным условиям прочности

$$n_a \leq n_p \leq n_b, \tag{4}$$

тогда для любой дискретной модели $R_s \in \{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$, $1 \leq s \leq M$, $s \neq p$ существуют такие числа n_a^s, n_b^s, что коэффициент запаса n_s модели R_s удовлетворяет условиям

$$n_a^s \leq n_s \leq n_b^s. \tag{5}$$

И наоборот, если $n_a^s \leq n_s \leq n_b^s$, то $n_a \leq n_p \leq n_b$. В этом случае будем говорить, что условия прочности (4), (5) эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим дискретную модель $R_s \in \{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$, $1 \leq s \leq M$, тела V (см. п. 1). Так как $R_s \in \{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$, то $n_s \in \{n_\alpha\}_{\alpha=1}^M$. В силу $n_p = \min(n_1,..., n_M)$, $1 \leq p \leq M$, $s \neq p$, имеем $n_s > n_p$. Значит, существует $\Delta n_s > 0$, где $\Delta n_s = n_s - n_p$. Пусть Δn_s известно. Тогда значения n_a^s, n_b^s находим по формулам

$$n_a^s = n_a + \Delta n_s, \; n_b^s = n_b + \Delta n_s. \tag{6}$$

Пусть коэффициент запаса n_p тела V удовлетворяет заданным условиям (4). Тогда подставляя в (4) $n_p = n_s - \Delta n_s$ и учитывая (6), получаем неравенства (5). Пусть коэффициент запаса n_s модели R_s тела V удовлетворяет условиям (5).

Тогда подставляя (6) в (5) и учитывая, что $\Delta n_s = n_s - n_p$, получаем неравенства (4).

Итак, условия прочности (4), (5) эквивалентны. Теорема доказана.

С точки зрения практики эквивалентность условий прочности (5) условиям прочности (4) выражается в том, что если условия (5) выполняются для коэффициента запаса n_s, то коэффициент запаса n_p тела V удовлетворяет условиям (4), т.е. тело V обладает заданной прочностью. Итак, для тела V существует конечное (при $M \to \infty$ – бесконечное) множество эквивалентных условий прочности $\{n_a + \Delta n_s \le n_s \le n_b + \Delta n_s\}_{s=1}^{M}$, где $\Delta n_s > 0$, которые получаются путем смещения заданных условий (4) вправо на соответствующую величину Δn_s. В расчетах целесообразно использовать условия прочности (5), так как в этом случае достаточно решить лишь только одну детерминистическую задачу упругости для дискретной модели R_s тела V. Для реализации условий прочности (4) необходимо решить большое количество многомерных дискретных задач упругости для тела V (см. п. 1). Отметим, на этапе эскизного проектирования тела V величина Δn_s неизвестна, и найти точное значение Δn_s трудно.

3. Детерминистический анализ прочности совокупности деталей со случайными характеристиками. Рассмотрим детерминистическую процедуру определения коэффициента запаса прочности и времени эксплуатации (срока службы) до первого отказа для совокупности упругих деталей, состоящих из пластичных материалов и образующих некоторую конструкцию. В основе процедуры лежит следующее предположение. Будем считать, что конструкция разрушается, если возникло пластическое состояние хотя бы в одной точке ее области. Задача упругости решается для заданных геометрических параметров конструкции. Влияние случайных параметров конструкции на ее прочностные свойства оценивается с помощью детерминистических величин. В качестве таких величин используем коэффициент запаса прочности n, вероятность разрушения p конструкции, а также зависимость вида $n = f(p)$, где f – гладкая детерминистическая функция. Считаем, что коэффициент n и время Δt эксплуатации конструкции связаны зависимостью $\Delta t = f_o(n)$, где f_o – гладкая детерминистическая функция, $n \in [n_a, n_b]$, где n_a, n_b заданы. Тогда время Δt находим по формуле $\Delta t = f_o(f(p))$. Достоинства данной процедуры состоят в следующем. Функция f_o определяется на отрезке $[n_a; n_в]$. Для малых значений $\delta = n_b - n_a$ (где $\delta = 0{,}1 \div 0{,}5$) функцию $f_o(n)$ на отрезке $[n_a; n_в]$ можно приближенно представить линейной. Вероятность p разрушения конструкции можно определить с помощью испытаний или задать, используя опыт работы подобных конструкций. Таким образом, для коэффициента запаса n и времени Δt эксплуатации конструкции можно найти верхние и нижние оценки, задавая различные значения для параметра p.

Считаем, что все детали состоят из пластичных однородных различных материалов и образуют конструкцию V^q, которая имеет q деталей: $V_1,\ldots,V_q$. Для деталей заданы условия крепления и статическое нагружение. Пусть для детали V_s найдено обобщенное эквивалентное напряжение σ_s^o [4] ($s = 1,\ldots,q$), которое отвечает нагружению F_i^o, q_i^o конструкции V^q. Отметим, что напряжение σ_s^o приближенно отражает характер распределения напряжений в детали V_s [4]. Пусть для коэффициентов запаса прочности всех деталей задан диапазон $[n_a; n_в]$, где $n_a \ge 1$, т. е. коэффициент запаса прочности n_s детали V_s (s = 1, …, q) удовлетворяет условию $n_a \le n_s \le n_в$. Опыт показывает, что вероятность p разрушения конструкции возрастает при уменьшении ее коэффициента n запаса прочности и наоборот. В связи с этим для конструкции V^q и для ее деталей вводим следующие положения.

Положение 1. Считаем, что вероятность p разрушения и коэффициент запаса n конструкции V^q (при любом нагружении F_i^o, q_i^o) связаны равенством

$$n = f_o(p), \tag{7}$$

где $f_o(p)$ – гладкая детерминистическая функция; $f_o(p) < \infty$, $0 < p \le 1$, $f_o(1) = 0$.

Положение 2. Считаем, что модули упругости a_{ijkh}^c и нагружение F_i^c, q_i^c конструкции являются стационарными случайными гладкими функциями; где F_i^c – объемные силы, q_i^c – поверхностные силы. Считаем, что $| a_{ujkh}^c - a_{ijkh}^o | \le \varepsilon$, $| F_i^c - F_i^o | \le \varepsilon$, $| q_i^c - q_i^o | \le \varepsilon$, где a_{ijkh}^o, F_i^o, q_i^o – заданные (средние) параметры, ε – малая величина; i, j, k, h = 1, 2, 3.

В силу положения 2 решение u_o задачи упругости, отвечающее функциям a^o_{ijkh}, F^o_i, q^o_i, будет мало отличаться от решения u_c, построенного с применением случайных функций a^c_{ujkh}, F^c_i, q^c_i. Значит, и коэффициенты запаса n_o, n_c, отвечающие соответственно заданным a^o_{ijkh}, F^o_i, q^o_i и случайным a^c_{ujkh}, F^c_i, q^c_i параметрам, будут мало отличаться друг от друга. Поэтому можно считать, что для случайных параметров конструкции зависимость (7) имеет один и тот же вид.

Положение 3. Считаем, что вероятность p разрушения и коэффициент запаса n детали V_s (при любом заданном нагружении) связаны равенством

$$n = f_{(s)}(p), \tag{8}$$

где $f_{(s)}(p)$ – гладкая детерминистическая функция; $0 \le f_{(s)}(p) < \infty$ при $0 < p \le 1$, $f_{(s)}(1) = 0$; значение s фиксировано, $s = 1,\ldots,q$.

Следует отметить, что дефекты, вызывающие разрушение конструкции V^q, могут возникать в деталях $V_1,\ldots,V_q$ независимо друг от друга, как, например, возникновение царапин, микротрещин, сколов при изготовлении, монтаже и эксплуатации конструкции V^q (деталей $V_1,\ldots,V_q$). На основе данного факта введем следующее положение.

Положение 4. Считаем, что разрушение конструкции V^q может произойти в любой из деталей: $V_1,\ldots,V_q$, при этом возможные разрушения в этих деталях являются независимыми (по вероятности) событиями.

Опыт показывает, что увеличение коэффициента запаса прочности n конструкции приводит к увеличению времени Δt ее эксплуатации и наоборот. Учитывая этот факт, введем положение.

Положение 5. Считаем, что существует такая гладкая детерминистическая функция $F(n)$, что

$$\Delta t = F(n), \tag{9}$$

где Δt – время эксплуатации конструкции V^q, которая имеет коэффициент запаса прочности n; $n \in [n_a; n_в]$; $F(n)$ – возрастающая функция ($n \ge 0$), $F(0) = 0$.

Отметим, что согласно (7), (9) имеем $\Delta t = F(f_o(p))$. В первом приближении функцию $f_{(s)}(p)$ представим в виде $f_{(s)}(p) = \alpha_{(s)}(1-p)$, где $\alpha_{(s)} = const$, $\alpha_{(s)} > 0$, где значение s фиксировано, $s = 1,\ldots,q$. Тогда в силу (8) имеем

$$n = \alpha_{(s)}(1-p). \tag{10}$$

Коэффициент $\alpha_{(s)}$ определяем следующим образом. Находим коэффициент запаса прочности n^m_s для детали V_s по формуле

$$n^m_s = \sigma^s_{\text{Т}} / \sigma^m_s, \quad i = 1,\ldots,q, \tag{11}$$

где $\sigma^s_{\text{Т}}$ – предел текучести материала детали V_s; значение напряжения $\sigma^s_{\text{Т}}$, отвечающее справочной литературе; σ^m_s – обобщенное эквивалентное напряжение детали V_s, отвечающее заданному статическому нагружению F^m_i, q^m_i конструкции V^q.

Пусть коэффициенту n^m_s запаса прочности детали V_s ($n_a \le n^m_s \le n_в$) отвечает вероятность p^m_s ее разрушения, $s = 1,\ldots,q$. Значение параметра p^m_s можно определить с помощью испытаний, проведенных для партии деталей типа V_s. В приближенных расчетах значение p^m_s может быть задано, $0 < p^m_s < 1$. Пусть n^m_s, p^m_s известны, $s = 1,\ldots,q$. Тогда в силу (10) для параметров n^m_s, p^m_s выполняется равенство $n^m_s = \alpha_{(s)}(1-p^m_s)$. Откуда получаем

$$\alpha_{(s)} = n^m_s / (1-p^m_s), \quad s = 1,\ldots,q. \tag{12}$$

Используя обобщенное эквивалентное напряжение σ^o_s (отвечающее заданному статическому нагружению F^o_i, q^o_i конструкции), коэффициент запаса прочности n^o_s детали V_s находим по формуле [4]

$$n^o_s = \sigma^s_{\text{Т}} / \sigma^o_s, \quad s = 1,\ldots,q. \tag{13}$$

Пусть коэффициенту запаса прочности n^o_s ($n_a \le n^o_s \le n_в$) детали V_s отвечает вероятность p^o_s ее разрушения. Тогда для n^o_s, p^o_s в силу (10) имеем равенство

$$n^o_s = \alpha_{(s)}(1-p^o_s), \quad s = 1,\ldots,q. \tag{14}$$

Подставляя (12) в (14) , получаем

$$n^o_s = n^m_s (1-p^o_s)/(1-p^m_s), \quad s = 1,\ldots,q. \tag{15}$$

Используя (15), вероятность p^o_s представим

$$p^o_s = 1 - n^o_s (1-p^m_s) / n^m_s, \quad s = 1,\ldots,q. \tag{16}$$

Учитывая положение 4, находим вероятность p_q^k разрушения конструкции V^q хотя бы в одной из деталей $V_1,\dots,V_q$ по формуле

$$p_q^k = 1 - \prod_{s=1}^{q}(1 - p_s^o). \qquad (17)$$

В первом приближении функцию $f_o(p)$ представим линейной $f_o(p) = \alpha_o(1-p)$, см. положение 1, где $\alpha_o = const$, $\alpha_o > 0$. Тогда в силу (7) имеем

$$n = \alpha_o(1-p). \qquad (18)$$

Коэффициент α_o находим следующим образом. Для конструкции V^q определяем коэффициент запаса прочности $n_o = \min(n_1^o,\dots,n_q^o)$, где n_s^o – коэффициент запаса прочности детали V_s, $s = 1,\dots,q$ (см. формулу (13)). Пусть коэффициенту запаса прочности n_o конструкции V^q (для заданного ее нагружения F_i^o, q_i^o, $n_a \le n_o \le n_в$) отвечает вероятность p_o ее разрушения. Отметим, что параметр p_o можно определить с помощью испытаний. В приближенных расчетах p_o может быть задано, $0 < p_o < 1$. Считая n_o, p_o известными, находим $\alpha_o = n_o/(1-p_o)$. Подставляя α_o в (18), получаем

$$n = n_o(1-p)/(1-p_o). \qquad (19)$$

В силу (19) для коэффициента запаса прочности n_q^k и вероятности p_q^k разрушения (см. формулу (17)) конструкции V^q имеем зависимость

$$n_q^k = n_o(1-p_q^k)/(1-p_o). \qquad (20)$$

Учитывая, что $F(0) = 0$ (см. положение 5), функцию $F(n)$ в первом приближении представим линейной вида $F(n) = \beta n$, где $\beta = const$, $\beta > 0$, значение β находим с помощью испытаний. Используя (9) и (20), время t_q^k эксплуатации конструкции V^q (которая имеет коэффициент запаса прочности n_q^k) находим по формуле $t_q^k = \beta n_q^k$ или

$$t_q^k = \beta n_o(1-p_q^k)/(1-p_o). \qquad (21)$$

В силу (11), (13), (16), (17), (21) время t_q^k эксплуатации совокупности деталей $V_1,\dots,V_q$ (конструкции V^q) зависит от следующих факторов: характера нагружения и вероятности p_q^k разрушения конструкции V^q; физических свойств материала деталей $V_1,\dots,V_q$ (пределов текучести $\sigma_Т^1,\dots,\sigma_Т^q$ материала при статическом нагружении; предельных напряжений $\sigma_П^1,\dots,\sigma_П^q$ – при циклическом), вероятностей $p_1^o,\dots,p_q^o$ разрушения и эквивалентных напряжений $\sigma_1^o,\dots,\sigma_q^o$ соответственно деталей $V_1,\dots,V_q$ (т.е. от характера распределения напряжений в конструкции V^q). Опыт показывает, что значение вероятности p_s^o разрушения детали V_s отражает ее форму и размеры, качество изготовления (т.е. случайный характер распределения модулей упругости по области детали V_s), случайный характер нагружения, условия крепления и эксплуатации, $s = 1,\dots,q$. Пусть для коэффициента n запаса прочности конструкции V^q (который определяется по 4-й теории прочности) задан диапазон: $n_a \le n \le n_в$, $n_a \ge 1$. Пусть при $n_q^k = n_Т$, $n_Т \ge 1$, в конструкции V^q возникает пластическое состояние. Тогда для коэффициентов n_q^k используем диапазон $n_a^o \le n_q^k \le n_в^o$, где $n_a^o = n_a + C_r$, $n_в^o = n_в + C_r$, $C_r = n_Т - 1$ (диапазон $[n_a; n_в]$ смещается по оси On на величину C_r вправо). При $n_Т < 1$ имеем $n_a^o = n_a - C_p$; $n_в^o = n_в - C_p$; $C_p = 1 - n_Т$ (диапазон $[n_a; n_в]$ смещается по оси On на величину C_p влево). Отметим, что данную процедуру можно использовать и для деталей $V_1,\dots,V_q$, которые имеют циклические нагружения. В этом случае для детали V_s вместо напряжения $\sigma_Т^s$, $s = 1,\dots,q$, используем предельное напряжение $\sigma_П^s$.

4. Прочностные свойства равнонапряженных конструкций. Рассмотрим равнонапряженные детали $V_1^r,\dots,V_q^r$, которые образуют конструкцию V^r. Они имеют такие же размеры, нагружения и закрепления, как и детали $V_1,\dots,V_q$. Обозначим через σ_s^r обобщенное эквивалентное напряжение детали V_s^r ($s = 1,\dots,q$) равнонапряженной конструкции V^r, причем $\sigma_1^r = \sigma_2^r = \dots = \sigma_q^r$. Пусть $\sigma_\alpha = \max\{\sigma_s^o\}_{s=1}^q$, σ_α – максимальное обобщенное эквивалентное напряжение конструкции V^q, где $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^o$, при $s = \alpha$, $1 \le \alpha \le q$. Пусть $\sigma_\alpha^r = \sigma_\alpha$.

Поскольку $\sigma_s^o \le \sigma_\alpha = \sigma_\alpha^r$, $s = 1,...,q$, то имеем $n_s^o = (\sigma_\text{Т}^s / \sigma_s^o) \ge n_s^r$, где $n_s^r = \sigma_\text{Т}^s / \sigma_\alpha^r$, n_s^r – коэффициент запаса прочности детали V_s^r. Так как $n_s^o \ge n_s^r$, получаем $p_s^o \le p_s^r$, где $p_s^r = 1 - n_s^r(1 - p_s^m)/n_s^m$, p_s^r – вероятность разрушения детали V_s^r, $s = 1,...,q$. Из неравенства $p_s^o \le p_s^r$ при $s \ne \alpha$ (при $s = \alpha$ имеем $p_\alpha^o = p_\alpha^r$), используя (17), имеем $p_q^k < p_r^k$, где $p_r^k = 1 - \prod_{i=1}^{q}(1 - p_i^r)$, p_r^k – вероятность разрушения конструкции V^r. Так как $p_q^k < p_r^k$, то, используя (20), получаем $n_q^k > n_r^k$; где n_r^k – коэффициент запаса прочности конструкции V^r, $n_r^k = n_o(1 - p_r^k)/(1 - p_o)$. Отсюда следует, что $t_q^k > t_r^k$, где $t_q^k = \beta\, n_q^k$, $t_r^k = \beta\, n_r^k$; t_r^k – время эксплуатации конструкции V^r. Итак, равнонапряженная конструкция обладает меньшим запасом прочности и сроком службы, чем конструкция с концентраторами напряжений при прочих равных условиях. В расчетах вместо обобщенных эквивалентных напряжений σ_s^o, σ_s^m [4] можно применять максимальные эквивалентные напряжения $\tilde{\sigma}_s^o$, $\tilde{\sigma}_s^m$, посчитанные для детали V_s по четвертой теории прочности.

Библиографический список

1. Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов. – М., 1953.

2. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов. – М., 1964.

3. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М., 1970.

4. Матвеев А.Д. Определение коэффициентов запаса прочности конструкций с учетом распределения напряжений // Вестник КрасГАУ. – 2007. – №3.