УДК 539.3

Г.Л. Горынин, Ю.В. Немировский

Математическое моделирование упругих макрохарактеристик для 1-периодических сред*

G.L. Gorynin, Ju.V. Nemirovsky

Mathematical Modeling of Elastic Macro-characteristics for the 1-Periodic Media

Рассмотрен метод усреднения, позволяющий получать макрохарактеристики для упругой 1-периодической среды без введения каких-либо гипотез. Макрохарактеристики вычисляются как интегралы ячейковых функций, которые находятся путем решения семейства рекуррентных задач на периодической ячейке. Получены асимптотические формулы, позволяющие по макровеличинам восстанавливать значения микроперемещений и напряжений в каждой точке 1-периодического континуума.

Ключевые слова: метод усреднения, макрохарактеристики упругой среды, периодическая ячейка, периодические среды, напряжение, перемещения.

The method of the averaging allows receiving macro-characteristics for the elastic 1-periodic medium without introduction of any hypothesis. Macro-characteristics are calculated as integrals of the cellular functions which are found by solving family of recurrent problems on a periodic cell. The authors received asymptotic formulas which make possible to restore value of micro-displacements and stresses at each point of a 1-periodic medium on macro-sizes.

Key word: method of averaging, macro-characteristic of the elastic medium, periodic cell, periodic medium, stress, displacement.

Постановка задачи. Рассмотрим одномерную упругую среду, упругие характеристики которой периодически меняются вдоль пространственной оси x, так, что можно считать эту среду разбитой на периодически повторяющиеся слои (рис.). Внутри каждого слоя упругие характеристики меняются непрерывно. В дальнейшем такую среду будем называть 1-периодичной. Пусть u_x, u_y, u_z – перемещения точек стержня в направлении осей x, y, z соответственно; $\sigma_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора напряжения; $[f]$ – скачок величины f на границе перехода от одной упругой среды к другой с разными свойствами; $\left(E_{\alpha\beta j\psi}\right)_i$ – упругие постоянные, внутри каждой упругой среды они могут непрерывно меняться, а на границах сред претерпевать скачки. Пусть h – линейный размер периодичности вдоль оси x, L – характерный размер тела, $\tilde{E}$ – характерное среднее значение модуля Юнга, F_α – объемные силы. Перейдем к безразмерным переменным и функциям, для простоты не меняя их обозначения:

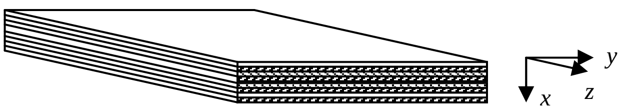
$$x \leftrightarrow x/L,\ y \leftrightarrow y/L,\ z \leftrightarrow z/L,\ u_\alpha \leftrightarrow u_\alpha/h,$$

$$E_{\alpha\beta\varphi\psi} \leftrightarrow E_{\alpha\beta\varphi\psi}/\tilde{E},\ \sigma_{\alpha\beta} \leftrightarrow \sigma_{\alpha\beta}/\tilde{E},$$

$$q_\alpha \leftrightarrow q_\alpha/\tilde{E},\ \tilde{F}_\alpha = F_\alpha h/\tilde{E}.$$

В дальнейшем будем считать, что отношение размера периодической ячейки упругой среды к характерному размеру тела является малым

$$\varepsilon = h/L << 1.$$



Один-периодическая среда,
периодичность вдоль оси x

Рассмотрим тело, вырезанное из 1-периодичной среды, на которое действуют какие-либо нагрузки, тогда внутри тела должны выполняться уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha x}}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial\sigma_{\alpha y}}{\partial y}\varepsilon + \frac{\partial\sigma_{\alpha z}}{\partial z}\varepsilon + F_\alpha = 0,\ \alpha=\{x,y,z\}. \quad (1)$$

На границе перехода от одной упругой среды к другой должны быть непрерывны перемещения и контактные напряжения:

$$[\sigma_{\alpha x}] = 0,\ [u_\alpha] = 0,\ \alpha = \{x,y,z\}, \quad (2)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №11-01-00121-а).

Считаем, что материал упругой среды является анизотропным, закон Гука для которого в каждой точке содержит 21 независимую константу $E_{\alpha\beta\varphi\psi}$ и имеет вид [1]:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum E_{\alpha\beta\varphi\psi} e_{\varphi\psi}, \quad \alpha,\beta,\varphi,\psi \in \{x,y,z\}. \quad (3)$$

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора перемещений следующими соотношениями:

$$e_{\alpha\beta} = 0.5\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}\varepsilon + \frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha}\varepsilon\right), \ \alpha,\beta \in \{x,y,z\}. \quad (4)$$

Если к задаче (1)–(4) добавить краевые условия на поверхности исследуемого тела, заданные либо путем задания поверхностных сил, действующих на тело, либо путем задания кинематических ограничений на перемещение точек поверхности, то получится стандартная краевая задача пространственной теории упругости. Решение данной задачи усложняется тем, что упругие характеристики $E_{\alpha\beta\varphi\psi}$ в соответствии с определением один-периодичной среды являются быстро меняющимися периодическими функциями пространственной координаты, поэтому при использовании численного метода для сохранения минимальной точности требуется использовать слишком большое число конечных элементов, размеры которых должны быть как минимум соизмеримы с размерами каждой из сред, составляющих собой периодические слои. В работе [1] была рассмотрена такая же задача в более общей постановке, когда среда считается три-периодической, с помощью метода асимптотического расщепления [2], воспользуемся результатами этой работы. Внутри каждого периодически повторяющегося слоя введена быстрая переменная ξ_x [3]:

$$x = x_i + \xi_x\varepsilon, \quad \xi_x \in [0,1], \quad (5)$$

где x_i – координаты границы i-го периодического слоя. Упругие характеристики 1-периодической среды можно считать зависящими только от этой быстрой координаты:

$$E_{\alpha\beta\varphi\psi} = E_{\alpha\beta\varphi\psi}(\xi_x). \quad (6)$$

В дальнейшем используются векторные обозначения

$$\overline{r} = (x,y,z) = x\text{Э}_x + y\text{Э}_y + z\text{Э}_z, \ \overline{\xi} = \xi_x\text{Э}_x. \quad (7)$$

Считаем, что перемещения и напряжения зависят от быстрых и от медленных переменных и справедливо следующее условие периодичности:

$$u_\alpha(\xi_x,\overline{r})\big|_{\xi_x=0} = u_\alpha(\xi_x,\overline{r})\big|_{\xi_x=1},$$
$$\sigma_{\alpha\beta}(\xi_x,\overline{r})\big|_{\xi_x=0} = \sigma_{\alpha\beta}(\xi_x,\overline{r})\big|_{\xi_x=1},$$
$$\alpha,\beta \in \{x,y,z\}. \quad (8)$$

Дифференциальный оператор в направлении x в новых переменных меняется:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_x}, \ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (9)$$

Вследствие изменения дифференциальных операторов (9) задача (1)–(4) претерпевает изменения:

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha x}}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial\sigma_{\alpha y}}{\partial y}\varepsilon + \frac{\partial\sigma_{\alpha z}}{\partial z}\varepsilon + \frac{\partial\sigma_{\alpha x}}{\partial\xi_x} + F_\alpha = 0,$$
$$\alpha = \{x,y,z\}. \quad (10)$$

Условие (2) на границе перехода от одной упругой среды к другой и закон Гука (3) остаются без изменений. Формулы для компонент тензора деформаций принимают вид:

$$e_{\alpha\beta} = 0.5\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}\varepsilon + \frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha}\varepsilon + \frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi_x}\delta_{\beta x} + \frac{\partial u_\beta}{\partial\xi_x}\delta_{\alpha x}\right),$$
$$\alpha,\beta \in \{x,y,z\}. \quad (11)$$

Решение задачи (10)–(11), (2)–(3) для компонент вектора перемещений и тензора напряжений ищем в следующем виде [1]:

$$\left(u_\alpha^\eta\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}\left(U_\alpha^\eta\right)^{\overline{k}}(\xi_x)\frac{\partial^k\eta_0^{(n)}}{\partial x^{k_x}\partial y^{k_y}\partial z^{k_z}}\varepsilon^k\right),$$
$$\alpha \in \{x,y,z\},$$
$$\left(\sigma_{\alpha\beta}^\eta\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)^{\overline{k}}(\xi_x)\frac{\partial^k\eta_0^{(n)}}{\partial\overline{r}^{\overline{k}}}\varepsilon^k\right). \quad (12)$$

Считаем, что объемные силы имеют расщепленный характер зависимости от быстрой и медленных переменных:

$$F_\alpha(\overline{r},\xi_x) = q_\alpha(\xi_x)\, f_\alpha(\overline{r}). \quad (13)$$

Оператор осреднения по ячейке является интегралом по периодической быстрой переменной, он имеет естественный вид:

$$\langle \_ \rangle = \int_0^1 \_ \, d\xi_x. \quad (14)$$

Если формулы (11)–(12) подставить в краевую задачу (10)–(11), (2)–(3) с условием периодичности (8) и собрать подобные при степенях дифференциальных операторов по медленным переменным и приравнять их нулю, то получим для каждого фиксированного целочисленного вектора $\overline{k}$ краевые задачи на периодической ячейке (периодическом слое) для неизвестных 1-периодических ячейковых функций вектора перемещений:

$$\frac{d\left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)^{\overline{k}}}{d\xi_x} + \left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)^{\overline{k}-\text{Э}_x} + \left(\tau_{\alpha y}^\eta\right)^{\overline{k}-\text{Э}_y} +$$
$$+\left(\tau_{\alpha z}^\eta\right)^{\overline{k}-\text{Э}_z} - q_\alpha(\overline{\xi})B_\alpha^{\overline{k}} = 0,$$
$$\alpha \in \{x,y,z\}; \quad (15)$$

формулы связи ячейковых функций тензора напряжений и вектора перемещений:

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)^{\bar{k}}=0.5\sum_{\varphi,\psi\in\{x,y,z\}}E_{\alpha\beta\varphi\psi}\left(\frac{d\left(U_{\varphi}^{\eta}\right)^{\kappa}}{d\xi_x}\delta_{\psi x}+\right. \tag{16}$$

$$\left.+\frac{d\left(U_{\psi}^{\eta}\right)^{\bar{k}}}{d\xi_x}\delta_{\varphi x}+\left(U_{\varphi}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_{\psi}}+\left(U_{\psi}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_{\varphi}}\right);$$

на границе перехода внутри ячейки от одной упругой среды к другой должны выполняться условия непрерывности:

$$\left[\left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\right]=0,\ \left[\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\right]=0,\ \alpha=\{x,y,z\}; \tag{17}$$

условия периодичности ячейковых функций

$$\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}(\xi_x)\Big|_{\xi_x=0}=\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}(\xi_x)\Big|_{\xi_x=1},$$

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)^{\bar{k}}(\xi_x)\Big|_{\xi_x=0}=\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)^{\bar{k}}(\xi_x)\Big|_{\xi_x=1},$$

$$\alpha,\beta\in\{x,y,z\}. \tag{18}$$

Выражения (15)–(18) для каждого фиксированного целочисленного вектора $\bar{k}$ представляют собой краевую задачу на нахождение 1-периодических ячейковых функций вектора перемещений.

Для однозначной определенности всех констант при $\left|\bar{k}\right|\geq 1$ к задаче (15)–(18) следует добавить условие нормировки:

$$\left\langle\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\right\rangle=0,\ \left|\bar{k}\right|\geq 1,\ \alpha\in\{x,y,z\}. \tag{19}$$

Формулы для вычисления констант $\left(B_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}$ получаются из условия разрешимости уравнений (15) и выполнения условий периодичности (18):

$$\left(B_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}=\left\langle\left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_x}+\left(\tau_{\alpha y}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_y}+\left(\tau_{\alpha z}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_z}\right\rangle,$$

$$\alpha=\{x,y,z\}. \tag{20}$$

Таким образом, получается система рекурсивных одномерных краевых задач (15)–(20) на нахождение трех 1-периодических ячейковых функций $\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}$.

Краевые задачи на периодической ячейке при $k=0$. Решение краевой задачи (18)–(23) при жесткостном номере $k=0$ состоит из трех независимых решений:

$$\left(U_{\alpha}^{\nu_{\varphi}}\right)^{\bar{0}}=\delta_{\alpha}^{\varphi},\ \left(\tau_{\alpha\beta}^{\nu_{\varphi}}\right)^{\bar{0}}=0,\ \eta_0(\bar{r})=\nu_{\varphi}(\bar{r}),$$

$$\alpha,\beta,\varphi\in\{x,y,z\}; \tag{21}$$

Из равенств (20)–(21) следует, что следующие константы равны нулю

$$\left(B_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}=0,\ \left|\bar{k}\right|=1,\ \alpha=\{x,y,z\}. \tag{22}$$

Ячейковые функции тензора напряжений $\left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)^{\bar{k}}$ для всех ячейковых векторов $\bar{k}$ определяются явным образом из (15) и (18):

$$\left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)^{\bar{k}}(\xi_x)=\left(C_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}-\left(T_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}(\xi_x),\ \alpha\in\{x,y,z\}, \tag{23}$$

где $\left(C_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}$ – константы интегрирования, а $\left(T_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}(\xi_x)$ – функции, вычисляемые по формуле

$$\left(T_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}(\xi_x)=\int_0^{\xi_x}\left(\left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_x}+\left(\tau_{\alpha y}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_y}+\right.$$

$$\left.+\left(\tau_{\alpha z}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_z}-q_{\alpha}(\zeta)\left(B_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\right)d\zeta,\ \alpha\in\{x,y,z\}. \tag{24}$$

Если функции $\left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)^{\bar{k}}$, найденные из равенств (23), подставить в формулы (16) и производные функций $\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}$ оставить слева, а все остальное перенести вправо, то получим систему из трех линейных дифференциальных уравнений на функции $\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}$ для каждого векторного индекса $\bar{k}$ при заданном жесткостном номере k:

$$\sum_{\varphi\leq\psi}E_{\alpha x\varphi\psi}\left(2-\delta_{\varphi\psi}\right)\left(\frac{d\left(U_{\varphi}^{\eta}\right)^{\bar{k}}}{d\xi_x}\delta_{\psi x}+\frac{d\left(U_{\psi}^{\eta}\right)^{\bar{k}}}{d\xi_x}\delta_{\varphi x}\right)=$$

$$=2\left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)^{\bar{k}}-\sum_{\varphi\leq\psi}E_{\alpha x\varphi\psi}\left(2-\delta_{\varphi\psi}\right)\left(\left(U_{\varphi}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_{\psi}}+\left(U_{\psi}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{\mathfrak{s}}_{\varphi}}\right),$$

$$\alpha\in\{x,y,z\}. \tag{25}$$

Ячейковые функции при $k = 1$.

Из выражения (24) при $k=1$ и равенств (21) следует тождественное равенство нулю следующих функций

$$\left(T_{\alpha}^{\nu_{\varphi}}\right)^{\bar{k}}(\xi_x)=0,\ \alpha,\varphi\in\{x,y,z\},\ \left|\bar{k}\right|=1. \tag{26}$$

Из равенств (23) и (26) следует, что следующие ячейковые функции равны неизменным константам:

$$\left(\tau_{\alpha x}^{\nu_{\varphi}}\right)^{\bar{k}}(\xi_x)=\left(C_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}},\ \alpha,\varphi\in\{x,y,z\},\ \left|\bar{k}\right|=1. \tag{27}$$

Равенство удобно (25) записать в другом виде:

$$\sum_{\gamma\in\{x,y,z\}} E_{\alpha x\gamma x}\left(X_{\gamma}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}}=\left(B_{\alpha}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}},\ \alpha\in\{x,y,z\},\qquad(28)$$

где известные правые части вычисляются по следующим формулам с учетом равенств (21)

$$\left(B_{\alpha}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}}=2\left(C_{\alpha}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}}-\sum_{\eta\le\lambda\in\{y,z\}} E_{\alpha x\eta\lambda}\left(2-\delta_{\eta\lambda}\right)\times$$
$$\times\left(\left(U_{\eta}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}-\overline{\exists}_{\lambda}}+\left(U_{\lambda}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}-\overline{\exists}_{\eta}}\right),\qquad(29)$$

а неизвестные функции $\left(X_{\gamma}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}}$ связаны с производными ячейковых функций по переменной периодической ячейки следующим образом

$$\left(X_{\gamma}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}}=\left(2-\delta_{x\gamma}\right)\left(\frac{d\left(U_{x}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}}}{d\xi_{x}}\delta_{\gamma x}+\right.$$
$$\left.+\frac{d\left(U_{\gamma}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}}}{d\xi_{x}}+\left(U_{x}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}-\overline{\exists}_{\gamma}}+\left(U_{\gamma}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}-\overline{\exists}_{x}}\right).\qquad(30)$$

Окончательная структура решения задачи (10)–(11), (2)–(3) для 1-периодической среды имеет вид суммы трех независимых решений (12), полученных на основе равенств (21):

$$\left(u_{\alpha}\right)^{(n)}=v_{\alpha}^{(n)}\left(\overline{r}\right)+$$
$$\sum_{\varphi\in\{x,y,z\}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}\left(U_{\alpha}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{k}}\left(\xi_{x}\right)\frac{\partial^{k}v_{\varphi}^{(n)}}{\partial\overline{r}^{\overline{k}}}\varepsilon^{k}\right);$$
$$\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)^{(n)}=$$
$$=\sum_{\varphi\in\{x,y,z\}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_{\kappa}}\right)^{\overline{k}}\left(\xi_{x}\right)\frac{\partial^{k}v_{\varphi}^{(n)}}{\partial\overline{r}^{\overline{k}}}\varepsilon^{k}\right),$$
$$\alpha,\beta\in\{x,y,z\}.\qquad(31)$$

Из формул (31) следует, что функции $v_{\varphi}^{(n)}\left(\overline{r}\right)$ имеют физический смысл, они являются усредненными перемещениями по периодической ячейке

$$v_{\alpha}^{(n)}\left(\overline{r}\right)=\left\langle\left(u_{\alpha}\right)^{(n)}\right\rangle,$$

в дальнейшем эти функции будут называться макроперемещениями. Три неизвестные функции макроперемещений $v_{\varphi}^{(n)}\left(\overline{r}\right)$ удовлетворяют системе трех уравнений в частных производных:

$$\sum_{\varphi\in\{x,y,z\}}\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}\left(B_{\alpha}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{k}}\frac{\partial^{k}v_{\varphi}^{(n)}}{\partial\overline{r}^{\overline{k}}}\varepsilon^{k}\right)+f_{\alpha}\left(\overline{r}\right)=0,$$
$$\alpha\in\{x,y,z\}.\qquad(32)$$

К системе (32) следует добавить краевые условия на поверхности тела, заданные в виде поверхностных макросил или макроперемещений, тогда получится краевая задача, тождественная пространственной задаче теории упругости для однородного тела [2].

Для всех асимптотических методов наиболее важное значение имеют самые первые асимптотические приближения. Минимальное значение номера приближения, при котором система уравнений (32) имеет смысл, равняется двум: $n = 2$.

Выражения для перемещений и напряжений (31) в этом частном случае имеют вид (верхний индекс в скобочках, указывающий на номер асимптотического приближения, здесь опускаем):

$$u_{\alpha}=v_{\alpha}\left(\overline{r}\right)+$$
$$+\sum_{\varphi\in\{x,y,z\}}\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}\left(U_{\alpha}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{k}}\left(\xi_{x}\right)\frac{\partial^{k}v_{\varphi}}{\partial\overline{r}^{\overline{k}}}\varepsilon^{k}\right),$$
$$\alpha\in\{x,y,z\};$$

$$\sigma_{\alpha\beta}=\sum_{\varphi\in\{x,y,z\}}\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{k}}\left(\xi_{x}\right)\frac{\partial^{k}v_{\varphi}}{\partial\overline{r}^{\overline{k}}}\varepsilon^{k}\right).\qquad(33)$$

Соответственно система уравнений (32) примет вид:

$$\sum_{\varphi\in\{x,y,z\}}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=2}\left(B_{\alpha}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{k}}\frac{\partial^{2}v_{\varphi}}{\partial\overline{r}^{\overline{k}}}\varepsilon^{2}\right)+f_{\alpha}\left(\overline{r}\right)=0,$$
$$\alpha\in\{x,y,z\}.\qquad(34)$$

Усредненная среда. Усредним по ячейке компоненты тензора напряжений (33) и рассмотрим величины, содержащие только первые степени малого параметра ε, введем для них обозначения такие же, как и для компонент тензора напряжений, но содержащие сверху знак титлы:

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}=\sum_{\varphi,\psi\in\{x,y,z\}}\left\langle\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_{\varphi}}\right)^{\overline{\exists}_{\psi}}\right\rangle\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial\psi}\varepsilon.\qquad(35)$$

Введенные величины являются первым асимптотическим приближением к средним напряжениям 1-периодической среды. Из выполнения уравнения (34) следует, эти величины $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$, подобно компонентам действительного тензора напряжений, удовлетворяют уравнению равновесия (1) для сплошной макросреды, на которую действуют объемные макросилы. Величины $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ в дальнейшем будем именовать как макронапряжения, а условную однородную упругую среду, в которой они возникают, – как упругую макросреду.

Для усредненных ячейковых функций тензора напряжений может быть доказано свойство перестановочности индексов:

$$\left\langle \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_\varphi}\right)^{\bar{\text{э}}_\psi} \right\rangle = \left\langle \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_\psi}\right)^{\bar{\text{э}}_\varphi} \right\rangle,\ \varphi,\psi \in \{x,y,z\}. \qquad (36)$$

Для макросреды в соответствии с формулами (4) может быть введен тензор деформаций, вычисляемый по ее макроперемещениям:

$$\tilde{e}_{\alpha\beta} = 0.5\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha}\right)\varepsilon\,. \qquad (37)$$

Тогда равенство (35) может быть переписано с использованием свойств (36) и формулы (37) в следующем виде:

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y,z\}} \tilde{E}_{\alpha\beta\varphi\psi}\tilde{e}_{\varphi\psi}\,,\ \alpha,\beta\in\{x,y,z\}, \qquad (38)$$

где $\tilde{E}_{\alpha\beta\varphi\psi}$ – упругие модули макросреды, которые вычисляются по формуле

$$\tilde{E}_{\alpha\beta\varphi\psi} = \frac{1}{2}\left(\left\langle \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_\varphi}\right)^{\bar{\text{э}}_\psi} \right\rangle + \left\langle \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_\psi}\right)^{\bar{\text{э}}_\varphi} \right\rangle\right). \qquad (39)$$

Таким образом, макронапряжения $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора напряжений в однородной среде, точки которой деформируется так же, как средние перемещения исходной 1-периодической среды и упругие константы которой вычисляются из операции усреднения ячейковых функций 1-периодической среды.

Таким образом, создана асимптотическая теория упругих анизотропных 1-периодических сред без введения каких-либо гипотез о характере напряженного состояния периодической ячейки или о характере ее деформационного состояния. Упругие характеристики однородной макросреды вычисляются как интегралы ячейковых функций на периодической ячейке исходной среды. Получены формулы, позволяющие вычислить перемещения и напряжения исходной среды по ее макроперемещениям и жесткостным функциям ячейки**.**

Пример. 1-периодическая среда с одной плоскостью симметрии анизотропных свойств. В этом случае часть упругих констант равна нулю и закон Гука (3) имеет вид:

$$\sigma_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta xx}e_{xx} + \sum_{\eta,\gamma\in\{y,z\}} E_{\alpha\beta\eta\gamma}e_{\eta\gamma}\,,$$

$$\sigma_{x\beta} = 2\sum_{\eta\in\{y,z\}} E_{x\beta x\eta}e_{x\eta}\,,$$

$$\alpha,\beta\in\{y,z\} \text{ и } \alpha=\beta=x. \qquad (40)$$

Формулы для ячейковых функций тензора напряжений принимают следующий вид:

$$\left(\tau_{xx}^{\eta}\right)^{\bar{k}} = E_{xxxx}\left(\frac{d\left(U_x^\eta\right)^{\bar{k}}}{d\xi_x} + \left(U_x^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{\text{э}}_x}\right) +$$

$$+0.5\sum_{\varphi\le\psi\in\{y,z\}} E_{xx\varphi\psi}\left(2-\delta_{\varphi\psi}\right)\left(\left(U_\varphi^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{\text{э}}_\psi} + \left(U_\psi^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{\text{э}}_\varphi}\right),$$

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)^{\bar{k}} = E_{\alpha\beta xx}\left(\frac{d\left(U_x^\eta\right)^{\bar{k}}}{d\xi_x} + \left(U_x^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{\text{э}}_x}\right) +$$

$$0.5\sum_{\varphi\le\psi\in\{y,z\}} E_{\alpha\beta\varphi\psi}\left(2-\delta_{\varphi\psi}\right)\left(\left(U_\varphi^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{\text{э}}_\psi} + \left(U_\psi^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{\text{э}}_\varphi}\right),$$

$$\left(\tau_{x\beta}^{\eta}\right)^{\bar{k}} =$$

$$= \sum_{\psi\in\{y,z\}} E_{x\beta x\psi}\left(\frac{d\left(U_\psi^\eta\right)^{\bar{k}}}{d\xi_x} + \left(U_x^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{\text{э}}_\psi} + \left(U_\psi^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{\text{э}}_x}\right),$$

$$\alpha,\beta\in\{y,z\}. \qquad (41)$$

Из формул (41) следует, что часть ячейковых функций тождественно равна нулю:

$$\left(\tau_{xx}^{v_x}\right)^{\bar{\text{э}}_y} = \left(\tau_{xx}^{v_y}\right)^{\bar{\text{э}}_x} = \left(\tau_{xx}^{v_x}\right)^{\bar{\text{э}}_z} = \left(\tau_{xx}^{v_z}\right)^{\bar{\text{э}}_x} = 0,$$

$$\left(\tau_{\beta x}^{v_\psi}\right)^{\bar{\text{э}}_\psi} = \left(\tau_{\beta x}^{v_y}\right)^{\bar{\text{э}}_z} = \left(\tau_{\beta x}^{v_z}\right)^{\bar{\text{э}}_y} = 0,$$

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_\varphi}\right)^{\bar{\text{э}}_x} = \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_x}\right)^{\bar{\text{э}}_\varphi} = 0\,,$$

$$\beta,\varphi\in\{y,z\},\ \psi\in\{x,y,z\}, \qquad (42)$$

другая часть постоянна на ячейке:

$$\left(\tau_{xx}^{v_y}\right)^{\bar{\text{э}}_z} = \left(\tau_{xx}^{v_z}\right)^{\bar{\text{э}}_y} = \left\langle \frac{1}{E_{xxxx}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{E_{xxyz}}{E_{xxxx}} \right\rangle,$$

$$\left(\tau_{xx}^{v_\psi}\right)^{\bar{\text{э}}_\psi} = \left\langle \frac{1}{E_{xxxx}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{E_{xx\psi\psi}}{E_{xxxx}} \right\rangle,$$

$$\left(\tau_{yx}^{v_x}\right)^{\bar{\text{э}}_z} = \left(\tau_{yx}^{v_z}\right)^{\bar{\text{э}}_x} = \left(\tau_{zx}^{v_x}\right)^{\bar{\text{э}}_y} = \left(\tau_{zx}^{v_y}\right)^{\bar{\text{э}}_x} = \frac{1}{\widehat{\Delta}}\widehat{E}_{xyxz}\,,$$

$$\left(\tau_{\beta x}^{v_x}\right)^{\bar{\text{э}}_\beta} = \left(\tau_{\beta x}^{v_\beta}\right)^{\bar{\text{э}}_x} = \frac{1}{\widehat{\Delta}}\widehat{E}_{x\beta x\beta}\,,$$

$$\widehat{\Delta} = \widehat{E}_{xzxz}\widehat{E}_{xyxy} - \left(\widehat{E}_{xyxz}\right)^2,\ \widehat{E}_{\alpha\beta\varphi\psi} = \left\langle \frac{E_{\alpha\beta\varphi\psi}}{\Delta} \right\rangle, \qquad (43)$$

$$\Delta = E_{xyxy}E_{xzxz} - \left(E_{xyxz}\right)^2,$$

третья часть зависит от переменной ячейки:

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_\psi}\right)^{\bar{\text{э}}_\psi} = \frac{E_{\alpha\beta xx}}{E_{xxxx}}\left\langle \frac{1}{\mathrm{E}_{xxxx}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{E_{xx\psi\psi}}{E_{xxxx}} \right\rangle +$$

$$+\left(E_{\alpha\beta\psi\psi} - \frac{E_{\alpha\beta xx}E_{xx\psi\psi}}{E_{xxxx}}\right),$$

$$\alpha,\beta,\psi\in\{y,z\},$$

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_y}\right)^{\bar{\text{э}}_z} = \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_z}\right)^{\bar{\text{э}}_y} = \frac{E_{\alpha\beta xx}}{E_{xxxx}}\left\langle \frac{1}{E_{xxxx}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{E_{xxyz}}{E_{xxxx}} \right\rangle +$$

$$+\left(E_{\alpha\beta yz} - \frac{E_{\alpha\beta xx}E_{xxyz}}{E_{xxxx}}\right), \qquad (44)$$

Для макросреды выполняется закон Гука (40), причем формулы для макроупругих констант имеют вид:

$$\tilde{E}_{xxxx} = \left\langle \frac{1}{E_{xxxx}} \right\rangle^{-1},$$

$$\tilde{E}_{xx\alpha\beta} = \tilde{E}_{\alpha\beta xx} = \left\langle \frac{1}{E_{xxxx}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{E_{xx\alpha\beta}}{E_{xxxx}} \right\rangle,$$

$$\tilde{E}_{x\alpha x\beta} = \frac{1}{\widehat{\Delta}} \widehat{E}_{x\alpha x\beta},$$

$$\tilde{E}_{\alpha\beta\varphi\lambda} = \left\langle \frac{E_{\alpha\beta xx}}{E_{xxxx}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{E_{xxxx}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{E_{xx\varphi\lambda}}{E_{xxxx}} \right\rangle + \left\langle E_{\alpha\beta\varphi\lambda} - \frac{E_{\alpha\beta xx} E_{xx\varphi\lambda}}{E_{xxxx}} \right\rangle, \alpha, \beta, \varphi, \lambda \in \{y, z\}. \tag{45}$$

Из формул (45) можно сделать выводы, что макроупругие константы в целом зависят не только от упругих констант периодической среды с теми же самыми индексами, но и от упругих констант с другими индексами. Указанные зависимости существенно отличаются от формул, получаемых на основе гипотез о характере напряженного состояния периодических ячеек [4].

Библиографический список

1. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Метод асимптотического расщепления для упругой 3-периодической среды // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: мат. Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. – Новосибирск, 2011.
2. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Деформирование слоистых анизотропных стержней в пространственной постановке. 1: Продольно-поперечный изгиб и условие кромочной совместимости // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45, №3.
3. Бахвалов Н.С., Опанасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М., 1984.
4. Ванин Г.А. Метод усреднения в теории упругости композиционных материалов // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20, №12.