

*А.А. Коробкин, А.А. Папин, К.А. Шилимарев*

**Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн\***

*A.A. Korobkin, A.A. Papin, K.A. Shishmarev*

**Analytical and Numerical Study on Quasi-Isothermal Problem of Interaction between Ice Cover of Channel and Surface Waves**

Для уравнений совместного движения воды и ледового покрова канала формулируется начально-краевая квазиизотермическая задача в случае, когда ледовый покров закреплен на стенках канала. Проводится аналитическое и численное исследование задачи.

**Ключевые слова:** ледовый покров канала, поверхностные волны, дисперсионная зависимость.

Initial-boundary quasi-isothermal problem when ice cover is fixed on the channel walls, equations of combined motion of the water and the channel ice sheet is considered. Analytical and numerical study of the problem is conducted.

**Key words:** ice sheet channel, surface waves, dispersion relation.

**1. Постановка задачи.** В рамках линейного приближения рассматривается безвихревое движение жидкости в канале шириной  $b$  и высотой  $H$ , покрытом льдом. Потенциал  $\varphi(x, y, z, t)$  скоростей течения удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;$$

$$(-H < z < 0, 0 < y < b, -\infty < x < \infty);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (y = 0, b);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (z = -H);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = w_t, \quad (z = 0),$$

здесь  $w(x, y, t)$  – прогиб ледовой поверхности.

Интеграл Бернулли берется в виде

$$\frac{1}{\rho} p + \varphi_t + g w = 0,$$

где  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность воды;  $g$  – ускорение свободного падения [1].

Функция  $w(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению вида [2, 3]

$$m w_{tt} + D \nabla^4 w - \Delta(Q(x, y)w) = p(x, y, 0, t),$$

$$(0 < y < b, -\infty < x < \infty)$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» (проект №2.2.2.4/4278), а также федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственные контракты №14.740.11.0355, №14.740.11.0878).

и условиям

$$w = w_y = 0, \quad (y = 0, b),$$

где  $m$  – масса покрова на единицу площади ( $m = \rho_i h_i$ ;  $h_i$  – толщина покрова);  $Q(x, y)$  – температурные напряжения, связанные с образованием ледового покрова;  $\nabla$  – оператор градиента.

Изгибная жесткость  $D$  вычисляется по формуле  $D = E h_i^3 / [12(1 - \nu^2)]$ , где  $E$  – модуль Юнга и  $\nu$  – коэффициент Пуассона для льда. Толщина льда  $h_i$  и его плотность  $\rho_i$  считаются постоянными. Краевые условия для  $w$  означают, что ледовое покрытие приморозено к стенкам канала.

Решение сформулированной задачи для  $w$  ищется в виде  $w(x, y, t) = A F(y/b) \sin(kx + \omega t)$ , где  $A = \text{const}$  – амплитуда волны;  $k = \text{const}$  – волновое число;  $\omega = \text{const}$  – частота волны; искомая функция  $F(\tilde{y})$ ,  $\tilde{y} = \frac{y}{b}$ , удовлетворяет условиям  $F = F' = 0$  при  $\tilde{y} = 0, \tilde{y} = 1$ . Температурные напряжения  $Q$  считаются постоянными, следовательно, для каждой заданной температуры получим собственную функцию  $w$ .

В безразмерных переменных (знак тильда опускается) исходная задача для  $w$  сводится к следующей задаче относительно  $F$  и  $\lambda$

$$\frac{d^4 F}{dy^4} - 2\overline{K} \frac{d^2 F}{dy^2} + (K^4 + \overline{\alpha}) F(y) =$$

$$= \lambda(\alpha + \Lambda(K)) F, \quad (0 < y < 1); \quad (1)$$

$$F = F_y = 0, \quad (y = 0, 1),$$

где  $K = kb$ ;  $2\overline{K} = \left(2K^2 + \frac{Qb^2}{D}\right)$ ;  $\alpha = \frac{m}{\rho b}$ ;  $\lambda = \frac{\omega^2 \rho b^5}{D}$ ;  $\overline{\alpha} = \frac{\rho g b^4}{D} + \frac{QK^2}{D}$ .

Учитывая условие  $\varphi_z = w_t$  и вид функции  $w$ , потенциал скоростей  $\varphi$  будем искать в виде  $\varphi = A\phi(y, z) \cos(kx + \omega t)$ , где функция  $\phi(y, z)$  удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = K^2 \phi, \quad (-h < z < 0, 0 < y < 1);$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (y = 0, 1);$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (z = -h);$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F(y), \quad (z = 0),$$

где  $\Lambda(K) < F = \phi(y, 0)$  и  $h = H/b$ .

Требуется, при заданных параметрах  $K, \bar{K}, \bar{\alpha}, \alpha$  найти собственные значения  $\lambda$  и соответствующие функции  $F(y)$ , а также исследовать зависимость  $\omega(k)$  при уменьшении толщины льда и сравнить вычисления с дисперсионным соотношением, полученным для задачи со свободной поверхностью [4]. Полученный результат будет использован для изучения возможности разрушения ледового покрова в канале движущимся судном на воздушной подушке. Ранее подобные задачи о ледовом покрове в канале не рассматривались. Задача без учета температурных напряжений исследовалась в [4]. Задача без учета температурных напряжений с одной вертикальной стенкой исследовалась в [5].

**2. Алгоритм численного решения задачи (1).** Определим ортонормированную систему функций  $\{\psi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$  на интервале  $(0, 1)$  как решения следующей спектральной задачи

$$\begin{aligned} \psi_n^{iv} &= \beta_n^4 \psi_n, \quad (0 < y < 1); \\ \psi_n &= \psi_n' = 0, \quad (y = 0, 1); \\ \int_0^1 \psi_n^2(y) dy &= 1, \quad \int_0^1 \psi_n \psi_m dy = 0 \quad (n \neq m). \end{aligned} \quad (2)$$

Функции  $\psi_n(y)$  называются балочными функциями. Они дают формы колебаний балки постоянного поперечного сечения, заделанной на обоих концах; соответствующие собственные значения  $\beta_n$  связаны с собственными частотами колебаний балки.

Решение задачи (1) будем искать в виде

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(y). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и используя (2), получим систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов  $a_n$  и параметра  $\lambda$ . Система имеет бесконечное число уравнений. При ее приближенном решении ограничимся конечным числом  $N$  уравнений и находим собственные числа

полученной матрицы. Проводя расчеты при различных  $N$ , получаем последовательности вида

$$\begin{aligned} \lambda_1^{N_0}, \quad \lambda_1^{N_0+1}, \quad \lambda_1^{N_0+2}, \quad \dots \\ \lambda_2^{N_0}, \quad \lambda_2^{N_0+1}, \quad \dots \\ \vdots \\ \lambda_k^{N_0}, \quad \lambda_k^{N_0+1}, \quad \dots, \end{aligned}$$

сходимость которых при фиксированном  $k$  и растущем  $N$  проверяется численно.

Функции  $\psi_n(y)$  вычисляются аналитически, а собственные значения  $\beta_n$  – численно.

Подставляя (3) в (1) и умножая обе части полученного равенства на  $\psi_m(y)$ , после интегрирования  $y$  с учетом (2) приходим к равенству:

$$\begin{aligned} a_m \beta_m^4 + 2\bar{K}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_{nm} + (K^4 + \bar{\alpha}) a_m &= \\ &= \lambda(\alpha a_m + b_m), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} b_m &= \int_0^1 \psi_m(y) \phi(y, 0) dy; \\ C_{nm} &= - \int_0^1 \psi_n'' \psi_m dy = \int_0^1 \psi_n' \psi_m' dy = - \int_0^1 \psi_n \psi_m'' dy. \end{aligned}$$

Для вычисления  $b_m$  рассмотрим вспомогательную задачу относительно  $\phi(y, z)$ :

$$\nabla^2 \phi = K^2 \phi, \quad (0 < y < 1, -h < z < 0);$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0, 1;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F(y), \quad (z = 0, 0 < y < 1),$$

где  $F(y)$  определен в (3).

Функцию  $\phi(y, z)$  представим в виде

$$\phi(y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(y, z),$$

где новые искомые функции  $\phi_k(y, z)$  удовлетворяют следующей задаче:

$$\nabla^2 \phi_k = K^2 \phi_k, \quad (0 < y < 1, -h < z < 0);$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial y} = 0, \quad y = 0, 1; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial z} = 0, \quad z = -h;$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial z} = \psi_k(y), \quad (z = 0, 0 < y < 1).$$

Тогда для  $b_m$  имеем

$$\begin{aligned} b_m &= \int_0^1 \psi_m \phi dy = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^1 \psi_m \phi_k(y, 0) dy = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^1 \frac{\partial \phi_m}{\partial z} \phi_k dy. \end{aligned}$$

Повторяя анализ, проведенный в [4], находим:

$$\int_0^1 \frac{\partial \phi_m}{\partial z} \phi_k dy = \int_{\Omega} (\nabla \phi_k \nabla \phi_m + K^2 \phi_k \phi_m) dy dz.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{\partial \phi_m}{\partial z} \phi_k dy = \int_0^1 \phi_m \frac{\partial \phi_k}{\partial z} dy \equiv M_{mk}.$$

Поэтому приходим к равенству

$$b_m = \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk} a_k, \quad M_{mk} = M_{km}.$$

Используя введенные элементы  $C_{nm}$  и  $M_{mk}$ , равенство (4) представим в виде

$$\begin{aligned} (\beta_m^4 + K^4 + \overline{\alpha}) a_m + 2\overline{K}^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} a_n = \\ = \lambda(\alpha a_m + \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} a_n), \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$(D + 2\overline{K}^2 C) \vec{a} = \lambda(\alpha I + M) \vec{a}, \quad (6)$$

где  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)^T$  – вектор;  $D = \text{diag}\{\beta_1^4 + K^4 + \overline{\alpha}, \beta_2^4 + K^4 + \overline{\alpha}, \dots\}$  – диагональная матрица;  $C = \{C_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$  и  $M = \{M_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$  – симметричные матрицы.

Умножим обе части (6) на  $(\alpha I + M)^{-1}$  и обозначим

$$A = (\alpha I + M)^{-1} \cdot (D + 2\overline{K}^2 C).$$

Приходим к задаче вида

$$(A - \lambda I) \vec{a} = 0. \quad (7)$$

Элементы матрицы  $A$  вычисляются численно по указанным выше формулам. После этого находятся собственные значения  $\lambda_n$  и вычисляется функция  $F_n$ .

**3. Численное решение задачи (7).** Будем решать численно задачу (7) при следующих значениях параметров:  $K = \overline{K} = 100$ ;  $\overline{\alpha} = 144.452$ ;  $\alpha = 0.0183$ .

Решение в вычислительной среде MatLab строится в несколько этапов:

1. Матрица  $C$  не зависит от параметров задачи, вычисляется заранее и сохраняется в файле.

Это же справедливо для последовательности  $\beta_n$  и функций  $\psi_n(y)$ .

2. Вычисляются матрицы  $M$  и  $D$ , зависящие от параметров задачи.

3. Вычисляется матрица  $A$  заданной размерности.

4. Вычисляются собственные значения  $\lambda_n$  и собственные вектора  $a_n$ .

5. По найденным значениям  $\lambda_n$  находятся частоты  $\omega_n$ .

В таблице 1 приведены 4 первых значения  $\omega_n$ , соответствующие полученным собственным значениям  $\lambda_n$  для разного числа уравнений в (7)

Таблица 1

Значения  $\omega_n$  в зависимости от числа уравнений

5 уравнений	20 уравнений	50 уравнений
113,9748	105,6593	105,1798
205,7769	193,6093	192,8032
328,8829	305,2569	302,798
419,2954	397,1653	394,6687

Заметим, что разность чисел, полученных для матриц размерности  $50 \times 50$  и  $20 \times 20$ , на порядок меньше от разности чисел, полученных для  $50 \times 50$  и  $5 \times 5$ . Разность первых двух частот для матриц  $50 \times 50$  и  $20 \times 20$  по модулю не превышает 1, когда разности 3 и 4 чисел больше разности первого числа в 6 раз. Для более высокой точности полученных значений  $\omega$  требуется построение матриц с большим числом уравнений в (7).

На рисунках 1–2 представлены графики изменения прогиба ледового канала  $w$ , соответствующие частоте волны  $\omega_n = 105,6593$ , при  $t = \text{const} = 1$ ,  $x \in [-10, 10]$  и  $x = \text{const} = 0$ ,  $t \in [0, 0.1]$  соответственно.

Будем увеличивать волновое число  $k$  от 1 до 4 с шагом по  $k$  равным 0,1. Получим при каждом  $k$  свои собственные частоты  $\omega_n$ . Начнем уменьшать толщину льда  $h$  и сравним полученные последовательности  $\omega_n$  с частотами, полученными для задачи со свободной поверхностью [4]

$$\omega^2 = g \sqrt{k^2 + \mu_n^2} \tanh[\sqrt{k^2 + \mu_n^2} H],$$

где  $k$  – волновое число;  $\omega$  – частота волны;  $H$  – высота канала;  $\mu_n = \pi n/b$ ;  $b$  – ширина канала.

Результаты вычислений представлены на рисунке 3.

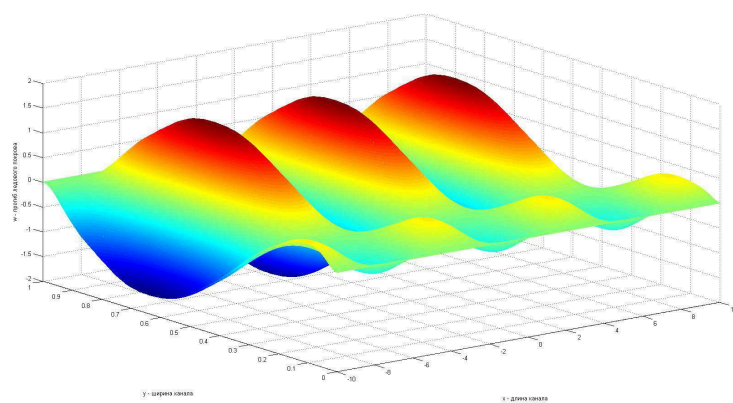


Рис. 1. График функции  $w$  при  $\omega = 105,6593$ ;  $t = 1$

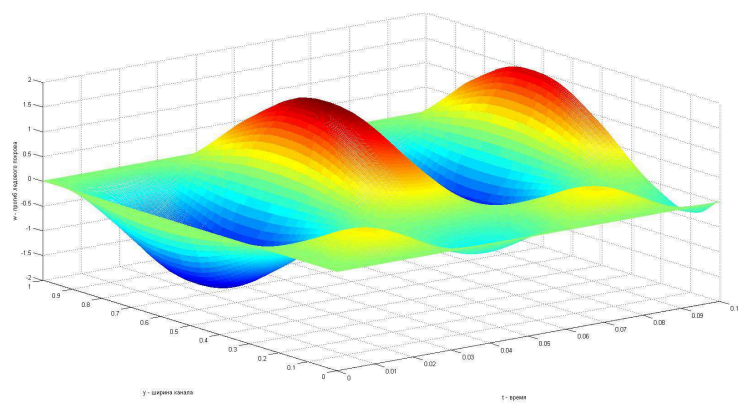


Рис. 2. График функции  $w$  при  $\omega = 105,6593$ ;  $x = 1$

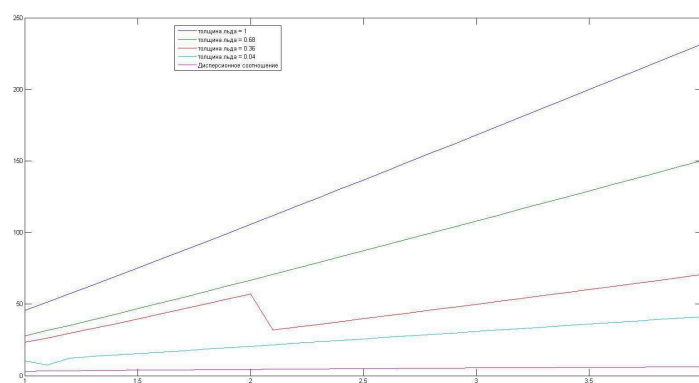


Рис. 3. График функции  $\omega(k)$  в зависимости от толщины канала  $h$

### Библиографический список

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. — М., 1963. - Ч. I, II.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М., 1975.
3. Nowacki W. Thermoelasticity. - 2nd Edition. — Pergamon Press Ltd., 1986.
4. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия АлтГУ. — 2012. — № 1/1.
5. Brocklehurst P., Korobkin A.A., Parau E.I. Hydroelastic wave diffraction by a vertical cylinder. Philos Transact A Math Phys Eng Sci. — 2011. — Vol. 369, №19.