УДК 512.548 + 515.12

С.В. Дронов

Обобщение понятия компактности отношения при отдалении горизонта в AST

S.V. Dronov

Generalization of the Notion of Compact Relation Connected with Horizon Shifting in AST

Работа выполнена в рамках альтернативной теории множеств. Предлагается обобщение понятия отношения неразличимости на случай, когда основной горизонт – класс конечных натуральных чисел – заменяется на более широкий аддитивный сегмент. Основное внимание уделено обобщению понятия компактности отношения и его применению к вновь вводимому отношению на семействе измеримых подклассов достаточно большого множества.

Ключевые слова: неразличимость, компактное отношение, измеримые подклассы.

This work is carried out in the alternative set theory (AST). We propose a generalization of the notion of indescernibility relation in the situation when the main horizon of the finite natural numbers is replaced by some wider additive cut. Mostly our attention is concentrated on the generalized compactness of relations and its application to some new relation defined on the family of the measurable subclasses of a sufficiently large set.

Key words: indescernibility, compact relation, measurable subclasses

1. Вводные замечания. Работа выполнена в аксиоматике альтернативной теории множеств (AST), изложение которой можно найти в [1]. Как обычно, класс рациональных чисел мы будем обозначать $\mathbf{Q}$, а ближайший горизонт в классе натуральных чисел (класс конечных натуральных чисел) – $\mathbf{FN}$. Далее в работе будем в качестве горизонтов рассматривать более широкие, чем $\mathbf{FN}$, начальные отрезки натурального ряда (сегменты). По выбранному с этой целью сегменту $A \subset \mathbf{N}$ построим основной класс A-ограниченных рациональных чисел

$$\mathbf{BQ}(A) \;=\; \{x \in \mathbf{Q}|\, (\exists n \in A)\, |x| < n\}.$$

Далее можно на $\mathbf{BQ}(A)$ определить отношение $\approx_A$ по формуле

$$(x \approx_A y) \;\equiv\; (\forall n \in A)\, |x-y| < \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Условимся называть его A-отождествлением, а элементы $\mathbf{BQ}(A)$, находящиеся в этом отношении,– A-тождественными. С помощью введения фактор-классов по этому и подобным отношениям могут быть построены объекты и введены понятия, аналогичные основным объектам и понятиям классической математики.

В случае, когда $A = \mathbf{FN}$, подробно рассмотренном в [1], доказано, что введенное отношение является компактной π-эквивалентностью. Под компактностью отношения понимается свойство, согласно которому в любом бесконечном множестве обязательно найдутся два различных элемента, находящихся в этом отношении. Понятие эквивалентности здесь не отличается от классического, π-свойство в AST означает, что могут быть построены теоретико-множественные отношения $R_n, n \in \mathbf{FN}$ такие, что изучаемое отношение является их пересечением. Отношение с перечисленными свойствами в [1] было названо неразличимостью.

Как видно из приведенных определений, практически каждое из них связано с основным горизонтом ($\mathbf{FN}$), а следовательно, при попытке изменить этот горизонт все они нуждаются в переосмыслении. Этому, а также некоторым приложениям рассматриваемого подхода к теории вероятностей в рамках системы определений, предложенных в [2], и посвящена настоящая работа.

2. Свойства отождествления по аддитивному сегменту. Класс $A \subset \mathbf{N}$ называется сегментом, если $1 \in A$ и

$$(\forall k, n)\, (n \in A, k \in \mathbf{N}, k < n) \Rightarrow (k \in A).$$

Сегмент называют аддитивным (мультипликативным), если сумма (соответственно, произведение) двух любых его элементов принадлежит этому сегменту. Будем далее предполагать, что выбран и зафиксирован аддитивный основной сегмент A, строго больший, чем $\mathbf{FN}$.

В силу определения (1) понятно, что если задать теоретико-множественное отношение R_n на $\mathbf{BQ}(A)$ соотношением

$$(xR_ny) \equiv |x-y| < \frac{1}{n} \,,$$

то $\approx_A \, = \, \cap\{R_n, \, n\in A\}$, что служит полным аналогом π-свойства неразличимости при переходе к новому горизонту. Отметим, что $\approx_A$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда основной сегмент A аддитивен – этот факт неоднократно отмечался в предыдущих работах автора и легко проверяется непосредственно.

Предположим, что между элементами класса B и некоторым натуральным числом $|B|$ можно установить биективное соответствие. Согласно [1], в этом случае B можно рассматривать как множество, а $|B|$ – количество его элементов. Множество a, состоящее из элементов произвольной природы, назовем A-конечным, если справедливо $|a|\in A$, и A-бесконечным – в противном случае. Назовем отношение A-компактным, если в любом A-бесконечном подмножестве его области определения имеются различные элементы, находящиеся в этом отношении.

Теорема 1. *Отношение $\approx_A$ A-компактно в том и только том случае, когда сегмент A мультипликативен.*

Доказательство. Для доказательства достаточности рассмотрим A-бесконечное множество $a\subset \mathbf{BQ}(A)$. Тогда $\alpha=|a|\notin A$. Расположим и перенумеруем элементы этого множества по возрастанию (это можно сделать в соответствии с утверждением 2.5.2 в [1]): $x_0<x_1<\ldots<x_{\alpha-1}$. Если натуральное число m таково, что

$$(\forall j=1,\ldots,\alpha-1)\ x_j-x_{j-1}\geq\frac{1}{m}, \tag{2}$$

то

$$x_{\alpha-1}-x_0=\sum_{j=1}^{\alpha-1}(x_j-x_{j-1})\geq\frac{\alpha}{m}\,.$$

В силу условия $a\subset \mathbf{BQ}(A)$ может быть указано $n\in A$ такое, что $x_{\alpha-1}-x_0<n$, откуда $\alpha\leq mn$, что в силу заявленного свойства мультипликативности A и условия $\alpha\notin A$ немедленно приводит к заключению, что $m\notin A$. Поскольку условие (2) имеет теоретико-множественный характер, может быть выбрано минимальное натуральное m с этим условием. Для такого m найдется j, для которого будет выполнено

$$0<x_j-x_{j-1}<\frac{1}{m-1}\,,$$

но $m-1$ все еще не может быть элементом A, откуда следует $x_j\approx_A x_{j-1}$, и достаточность мультипликативности сегмента для A-компактности отношения $\approx_A$ доказана.

Обратно, пусть нашлись такие $m,n\in A$, что $\alpha=mn\notin A$. Рассмотрим A-бесконечное множество

$$a \ = \ \left\{0, \ \frac{1}{m}, \ \frac{2}{m}, \ \ldots \ \frac{\alpha-1}{m}\right\}.$$

Среди его элементов нет A-тождественных, но $\frac{\alpha-1}{m}<\frac{\alpha}{m}=n\in A$, а значит, $a\subset\mathbf{BQ}(A)$. Теорема доказана.

3. Отношение эквивалентности, связанное с A-зазорами. Зафиксируем аддитивный сегмент A. В работе [2] было введено следующее понятие A-зазора, позволяющее определить вероятности для классов, попадающих в такой зазор. Пусть x – множество произвольной природы, $|x|=\beta\notin A$. Если для некоторого подкласса $B\subset x$ могут быть построены две монотонные по включению цепочки подмножеств x $u_n, n\in A$ и $v_n, n\in A$, первая из которых возрастает, а вторая убывает, и $(\forall n)$ $u_n\subset B\subset v_n$, причем существуют два предела в смысле [3]

$$\lim_{n\in A}\frac{|u_n|}{\beta}=\lim_{n\in A}\frac{|v_n|}{\beta}\,, \tag{3}$$

то условимся говорить, что B лежит в A-зазоре, определяемом цепочками множеств u_n, v_n. Общее значение пределов (3) называется вероятностью класса B и обозначается $\mathbf{P}_A(B)$.

Отметим тот очевидный факт, что любое подмножество x лежит в A-зазоре, который определяется двумя тождественными цепочками множеств, а значит, имеет вероятность. Семейство всех подклассов x, для которых вероятность может быть определена описанным образом, в цитированной работе обозначалось $\mathcal{B}(A)$.

Теорема 1 из [2] дает критерий, позволяющий проверить попадание двух имеющих вероятности классов B, C в один и тот же зазор без привлечения порождающих цепочек множеств u_n, v_n. Оказывается, необходимым и достаточным условием для этого является равенство нулю вероятности симметрической разности этих классов $B\Delta C$.

Условимся писать $B\sim_A C$, если классы B, C лежат в одном A-зазоре. Изучим свойства введенного таким образом отношения на $\mathcal{B}(A)$.

Если $B\sim_A\emptyset$ (и, как следствие, $\mathbf{P}_A(B)=0$), то будем называть класс B A-пренебрежимым.

Лемма 1. *Отношение $B\sim_A C$ имеет место тогда и только тогда, когда оба класса $B\setminus C$, $C\setminus B$ A-пренебрежимы.*

Теорема 2. *Отношение $\sim_A$ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить его транзитивность. Но если $\mathbf{P}_A(B\Delta C)=\mathbf{P}_A(C\Delta D)=0$, то и $\mathbf{P}_A(B\Delta D)=0$ в силу соотношения

$$B\Delta D\subset(B\Delta C)\cup(C\Delta D)$$

и обычных свойств вероятности, обоснованных в [2]. Теорема доказана.

Опираясь на эту теорему, будем называть введенное отношение A-ортоэквивалентностью. Поскольку в настоящей работе основной сегмент фиксирован, его обозначение в названии отношения будем часто опускать.

Следствие 1. *Пусть $\alpha \notin A$ – натуральное число, B_n, $n \leq \alpha$ – цепочка подклассов x, для каждого из которых определена вероятность. Если A мультипликативен, то среди этих классов найдутся два различных, имеющих одинаковые вероятности.*

Действительно, все числа $\mathbf{P}_A(B_n), n \leq \alpha$ являются элементами $\mathbf{BQ}(A)$ (располагаются между 0 и 1), а значит, по теореме 1 среди них имеются два A-тождественных. Но, как было объяснено в [3], для случая пределов A-последовательностей понятия A-тождественности и равенства совпадают.

4. Обобщенная компактность отношения ортоэквивалентности. Доказанное следствие показывает, что если ввести на подклассах множества x отношение, связывающее два класса, имеющих одинаковые вероятности, то это отношение будет A-компактным. В частности, ортоэквивалентные подклассы также имеют одинаковые вероятности, но ортоэквивалентность является существенно более тонким отношением. При этом оказывается, свойство A-компактности часто имеется и у отношения $\sim_A$.

Лемма 2. *Пусть $\alpha \notin A$. Тогда среди элементов произвольной цепочки u_n, $n \leq \alpha$ дизъюнктных подмножеств x с A-бесконечным числом элементов β не может быть найдено ни одного A-бесконечного набора, состоящего из множеств, не являющихся A-пренебрежимыми.*

Доказательство. Пусть, напротив, при некотором $\delta \notin A$ множества u_{n_1}, ... u_{n_δ} не являются A-пренебрежимыми. Тогда может быть указано такое $k \in A$, что

$$(\forall j = 1, ..., \delta)\ |u_{n_j}| > \frac{\beta}{k}\,.$$

Таким образом, в силу дизьюнктности множеств имеет место неравенство

$$\left|\cup\{u_{n_j},\ j \leq \delta\}\right| = \sum_{j\leq\delta} |u_{n_j}| > \frac{\delta}{k}\beta\ > \beta,$$

что невозможно в силу того, что это объединение есть подмножество x, а $|x| = \beta$.

Пусть B – произвольный класс, $W = \{w_t,\ t \in B\}$ – семейство дизъюнктных множеств, заиндексованное элементами B. Обозначим через $Z(B)$ такой класс, элементы которого z являются цепочками вида z_t, $t \in B$, где каждое из z_t может принимать лишь значения 0 или 1. Семейство $\mathcal{U}(W)$ будем называть порожденным семейством W, если для каждого $u \in \mathcal{U}(W)$ может быть указана цепочка $z \in Z(B)$ такая, что

$$u\ =\ \cup_{\{t:\, z_t=1\}}\, w_t, \tag{4}$$

и наоборот, любое u, построенное по цепочке $z \in Z(B)$ с привлечением (4), принадлежит семейству $\mathcal{U}(W)$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha \notin A$ и все множества $U = \{u_n,\ n \leq \alpha\}$ различны. Тогда может быть указан A-бесконечный набор дизъюнктных подмножеств W такой, что $U = \mathcal{U}(W)$.*

Доказательство. Пусть u^z обозначает либо само множество u, либо его дополнение в зависимости от того, равен ли z 0 или 1. Тогда в качестве W можно взять набор тех из множеств

$$u_0^{z_0} \cap ... \cap u_\alpha^{z_\alpha}, \quad z \in Z(\alpha),$$

которые не являются пустыми, исключая то множество, где все z_j равны 1 одновременно.

В силу теоретико-множественного характера всех использованных соотношений понятно, что для некоторого β выполнено $W = \{w_n, n \leq \beta\}$. В случае, когда исходные множества дизъюнктны, β будет наименьшим и равным α. Наибольшее $\beta = 2^\alpha - 1$ достигается, когда каждая пара исходных множеств имеет непустое пересечение.

Лемма 4. *Пусть $\alpha \notin A$, Если*

$$(\forall k \in A)\ 2^k \in A, \tag{5}$$

то в произвольной цепочке u_n, $n \leq \alpha$ подмножеств x найдутся два A-ортоэквивалентных подмножества.

Доказательство. Если в цепочке есть одинаковые множества, то утверждение тривиально. Иначе построим набор W в соответствии с предыдущей леммой. Упорядочим его множества по убыванию количеств их элементов и будем считать, что их номера соответствуют построенному упорядочиванию.

Будем говорить, что те из w_t, которые входят в (4) и не являются A-пренебрежимыми, образуют существенную часть u. Ясно, что два множества рассматриваемого набора A-ортоэквивалентны тогда и только тогда, когда их существенные части совпадают (лемма 1).

Из условия (5) и результатов [3] немедленно вытекает, что найдется натуральное число $\gamma \notin A$ такое, что $2^\gamma < \alpha$. Согласно лемме 2 в W не может найтись A-бесконечного набора элементов, не являющихся A-пренебрежимыми. Поэтому для найденного γ набор $\widehat{W} = \{w_n,\ n \leq \gamma\}$ содержит все не-A-пренебрежимые множества из W. Если предположить, что возможно построение взаимнооднозначного отображения набора множеств u_n, $n \leq \alpha$ на класс всех различных существенных их частей, то натуральное число α оказалось бы субвалентно числу 2^γ подмножеств $\widehat{W}$, что невозможно по варианту теоремы Кантора – Бернштейна из [1, с. 190]. Следовательно, среди наших множеств обязаны найтись два с одинаковыми существенными частями. Лемма доказана.

Для получения основной теоремы нам понадобится следующий почти очевидный факт.

Лемма 5. *В любом A-зазоре лежит некоторое подмножество x.*

Доказательство. Пусть цепочки множеств $u_n, v_n,\ n \in A$ определяют рассматриваемый зазор. Рассмотрим систему условий

$$(u_n \subset v_k)\&((n > k) \Rightarrow ((u_n \supset u_k)\&(v_n \subset v_k)),$$

выполненную для $n, k \in A$. Поскольку здесь содержатся лишь теоретико-множественные условия, то, согласно результатам [3], цепочки $u_n,\ v_n$ можно продолжить до некоторого натурального $\alpha \notin A$ с сохранением их всех. Очевидно, что тогда, например, $(\forall n \in A)\ u_n \subset u_\alpha \subset v_n$, т.е. u_α лежит в рассматриваемом A-зазоре.

Теорема 3. *Пусть сегмент A мультипликативен. Отношение A-ортоэквивалентности является A-компактным на семействе $\mathcal{B}(A)$ тогда и только тогда, когда справедливо (5).*

Доказательство. Пусть $B_n,\ n \leq \alpha \notin A$ – цепочка подклассов x, для каждого из которых возможно определение вероятности. Это означает, что каждый из классов расположен в какомлибо A-зазоре. По лемме 5 построим цепочку множеств $u_n,\ n \leq \alpha$, каждое из которых лежит в том же зазоре, что и соответствующий класс B_n. Очевидно, для всех n верно $B_n \sim_A u_n$. Но, согласно лемме 4, могут быть указаны два различных индекса $n, m \leq \alpha$, для которых имеет место A-ортоэквивалентность множеств u_n и u_m. Тогда $B_n \sim_A B_m$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $k \in A,\ 2^k \notin A$. Обозначим через a целую часть дроби $\frac{\beta}{k+1}$. Сформируем из элементов x набор $W = \{w_n,\ n \leq k\}$ дизъюнктных множеств, имеющих по a элементов. Тогда в силу условий, наложенных на A, $\frac{a}{\beta} > \frac{1}{k+2}$ и ни одна из вероятностей построенных множеств не является A-тождественной нулю. В наборе множеств $\mathcal{U}(W)$ содержится 2^k различных элементов, и все множества, входящие в него, имеют разные существенные части. Построенный контрпример доказывает теорему.

5. Обсуждение и заключительные замечания. Понятие, аналогичное A-зазорам, рассматривалось ранее в нескольких работах М. Калины и П. Златоша (см., например:[4, 5]). Но у них изучалась лишь ситуация, связанная с ближайшим основным горизонтом **FN**, поэтому настоящую работу можно рассматривать как развитие предложенных в цитированных статьях подходов. Понятие ортоэквивалентности, насколько это известно автору, ранее не рассматривалось.

Пусть $\mathcal{S}(x)$ – класс всех подмножеств x. В силу полученных выше результатов (теорема 2 и лемма 5) имеет место следующее утверждение.

Следствие 2. *Фактор-классы $\mathcal{B}(A)/\sim_A$ и $\mathcal{S}(x)/\sim_A$ совпадают.*

Этот факт дает нам возможность в задачах, связанных с исследованием вероятностей классов, ограничиваться исследованием лишь подмножеств основного множества. Для них, очевидно, имеют место все предположения и формулы классической вероятностной схемы.

Библиографический список

1. Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. – Новосибирск, 2004.

2. Дронов С.В. Об одном пополнении класса событий в AST // Известия АлтГУ. – 2010.– №1.

3. Дронов С.В. О четких продолжениях последовательностей // Известия АлтГУ. – 1999.–№1.

4. Kalina M., Zlatos P. Arithmetics of Cuts and Cuts of Classes // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1988. – V. 29, №3.

5. Kalina M., Zlatos P. Borel Classes in AST. Measurability, Cuts and Equivalence // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1989. – V. 30, №2.