УДК 532.517

О.Н. Гончарова

Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе раздела*

O.N. Goncharova

Modeling of Flows Under Conditions of Heat- and Mass Transfer at the Interface

Математическое моделирование взаимодействия тепловой, гравитационной и термокапиллярной конвекции в областях с границами раздела, даже без учета массопереноса – важная и актуальная задача. Наличие неизвестной границы раздела, не являющейся материальной поверхностью при учете испарения через нее, вносит в математическое моделирование дополнительные трудности. Основным и принципиальным вопросом становится формулировка граничных условий на поверхности раздела двух сред. На основе законов сохранения и соотношений на сильном разрыве обобщенные кинематическое, динамическое и энергетическое условия сформулированы в данной работе в безразмерной форме. Обсуждаются теоретические аспекты исследования задач с границами раздела, гипотезы, принимаемые при выводе условий на границе раздела, способы получения упрощенных постановок.

Ключевые слова: конвекция в жидкости, сопутствующий поток газа, граница раздела, испарение с границы раздела, условия на границе раздела.

Mathematical modeling of interaction of the thermal, gravitational and thermocapillary convection in the domains with interfaces is very important and actual problem even without mass transfer. The presence of an unknown interface, that is not a material surface by taking into account the evaporation, brings in the modeling the additional difficulties. The principal question here is to formulate the interface conditions. The generalized kinematic, dynamic and energetic conditions are formulated in this paper in the dimensionless form on the basis of the conservation laws and strong discontinuity relations. The theoretical aspects of investigation of the problems with interfaces, hypotheses used by derivation of the interface conditions and methods of simplifications of the problem statements are discussed.

Key words: convection in a fluid, co-current gas flow, interface, evaporation through the interface, interface conditions.

1. Введение. Математическое моделирование течений жидкостей со свободными границами или границами раздела, которые возникают либо сопровождаются испарением под действием потока газа, становится актуальной задачей ввиду сложности задач, требующих решения. Даже при отсутствии массопереноса на границе раздела нестационарные задачи, задачи с деформируемыми границами продолжают оставаться сложными для исследования, несмотря на то, что хорошо поставлены. Подробному изучению различных аспектов, связанных с процессами в жидкостях, в том числе гравитационной и термокапиллярной конвекцией, посвящены монографии [1–3]. В работах [4, 5] представлен строгий вывод условий на свободной границе. Эти условия базируются на предположении, что граница раздела есть движущаяся гладкая материальная поверхность, понимаемая как образ фиксированной поверхности в пространстве Лагранжевых координат. Отметим, что в обычной постановке задач со свободными границами исключается такой процесс, как массоперенос через границу раздела.

Моделирование процессов, которые характеризуются переносом массы через границу, предполагает обобщение граничных условий, принимаемых на свободной поверхности. Данная проблема давно и успешно решается при изучении задач плавления и кристаллизации [6]. На основе условий на сильном разрыве [7–9] в [6] проведен вывод условий на границе «твердое тело – расплав», позволяющих учесть перенос примеси через границу. Из многих работ, посвященных конденсации, следует выделить монографию [10], посвященную постановке задач конденсации, где граничные условия формулируются с учетом потока массы через границу.

Одна из важных моделей испарения слоя жидкости, находящейся в контакте со слоем газа, предлагается в [11], где формулировка гранич-

*Работа выполнена в рамках научно-исследовательской работы в АлтГУ (проект 7.3975.2011), ИТ СО РАН (интеграционный проект 96) и при поддержке РФФИ (проект 10-01-00007).

ных условий проведена на основе классических принципов термодинамики необратимых процессов [12], развитых в [13]. Уравнения баланса массы, импульса и энергии на границе раздела представлены в [11] в предположении о слабом испарении, пренебрежении вязкой диссипацией, молекулярно-кинетической энергией пара в уравнениях баланса энергии и импульса. При этом испарение рассматривается близким к глобальному состоянию равновесия, (p_0, T_0) выбираемому в качестве относительного состояния, $p_0 = P(T_0)$, где $P(T)$ – закон испарения «жидкость – пар». Кинетическое уравнение Герца–Кнудсена для определения потока массы в результате испарения выражает пропорциональность этого потока разности между давлением насыщенного пара и актуальным парциальным давлением пара в газе [11] (см. также: [14]):

$$J = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi R^g T_I}}\big(P(T_I) - p_s\big). \tag{1}$$

Здесь R^g – идеальная газовая постоянная, деленная на молярную массу пара; T_I – температура на границе раздела со стороны жидкости; α – коэффициент аккомодации, зависящий от R^g, p_0, T_0 и от феноменологического параметра. Этот параметр участвует в условии, определяющем границу раздела и обобщающем обычные соотношения равновесия на границе раздела, записанные для температуры и химического потенциала. Уравнение Клаузиуса–Клапейрона [15,16], которое выражает давление пара при определенной температуре с помощью скрытой теплоты парообразования, используется здесь в экспоненциальной форме

$$P(T) = p_0\, exp\big(- \frac{L(T_0)}{R^g}\big(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\big)\big) \tag{2}$$

и помогает определить температуру насыщенного пара T_s, как $p_s = P(T_s)$. Здесь $L(T_0)$ – скрытая теплота парообразования (испарения) в состоянии равновесия; относительное состояние может быть выбрано как p_s, T_s, благодаря постоянной температуре в предположении о постоянном термодинамическом давлении пара. Теоретическая модель испарения слоя чистой жидкости, соседствующей со слоем газа, разработана в [14] на основе [11].

В работах [17–21] течение жидкости с испарением изучается в приближении тонкого слоя. Двумерная длинноволновая модель испаряющегося тонкого слоя жидкости, стекающего по неоднородно нагретой подложке, изучается в [17]. Течение жидкости описывается в терминах толщины слоя, уравнение для которой выводится на основе системы уравнений Навье–Стокса и энергии при подходящих граничных условиях. Поток массы принимается во внимание в кинематическом и динамических условиях. Дополнительно следует сформулировать соотношение, определяющее локальный поток массы J. Данное соотношение выписывается с использованием линеаризованного относительно температуры T соотношения для J вида [17]:

$$J = \alpha\rho_s L\big(\frac{M}{2\pi R_g T_s^3}\big)^{1/2}(T - T_s), \tag{3}$$

где α – коэффициент аккомодации; L – скрытая теплота испарения; ρ_s – плотность пара; M – молекулярный вес; R_g – универсальная газовая постоянная; T_s – температура насыщенного пара. Подобная форма записи потока массы J используется в [18] (см.: [22]), где в рамках длинноволнового приближения изучается движение слоя испаряющегося под действием лазерной радиации расплава, стекающего по наклонной стенке [22]. Уравнение, определяющее форму свободной поверхности [17], представляет собой нелинейное уравнение типа Беннея (Benney's type), учитывающее эффекты гравитации, вязкости, капиллярности, термокапиллярности и испарения. Слагаемое, выражающее силы за счет отдачи пара, включено в уравнение баланса нормальных напряжений на границе раздела согласно [23].

Работа [24] посвящена математическому моделированию процессов формирования сферических микробаллонов с учетом диффузионного переноса растворенного газа, как пассивной примеси, через свободную границу. Изучается задача о динамике сферической оболочки со свободными поверхностями, содержащей внутри газовый пузырь. Динамика сферического слоя определяется инерционными, тепловыми, диффузионными факторами. Считается, что жидкость с растворенным в ней газом есть несжимаемая вязкая жидкость. Осуществлена постановка задачи на основе уравнений Навье–Стокса, теплопереноса и диффузии. Сформулированы условия на свободных поверхностях, определяющие в том числе баланс энергии на внутренней границе и диффузионный поток массы через нее. Аналитические исследования, посвященные корректности постановок начально-краевых задач, были продолжены в [25]. Поток массы (поток пассивной примеси) описывается, как правило, с помощью первого закона Фика [15]. Закон Генри [16], как соотношение, связывающее концентрацию примеси (концентрацию газа в [24]) на границе раздела с парциальным давлением газа вне области, замыкает постановку задачи.

В [20] содержится подробное описание постановок задач, решаемых в приближении тонкого слоя, включая также и испаряющиеся пленки жидкости, и конденсируемые слои. Уравнение баланса массы на границе раздела вводится при предположении о нормальном потоке массы к границе раздела подобно [14, 22]. При изучении процессов тепло- и массопереноса, сопряженных с испарением, выделяют слой Кнудсена вблизи границы раздела пар – жидкость. Анализ приложений кинетической теории к проблемам испарения и конденсации, структура слоя Кнудсена и граничные условия, которые необходимо рассматривать на границе раздела пар – жидкость, представлены в [26]. Обобщенный подход к понятию границы раздела развивается в [27], где граница раздела вводится как отдельная двумерная термодинамическая система между двух фаз.

Принципиальные вопросы постановки условий на границе раздела на основе законов сохранения и условий на скачке проанализированы в [23, 28]. В [23] представлена интегральная форма соотношений баланса, выведены первичные и вторичные условия на скачке и источник энтропии на границе раздела (см.: [29]). Из недавних работ, посвященных выводу и анализу условий на границе раздела с испарением, следует отметить [30–33]. Граничные условия на границе раздела между двумя Ньютоновскими жидкостями получены в [30] на основе интегральных законов сохранения с использованием определения границы раздела, как поверхности Гиббса. Соотношение для потока испаряющейся массы, полученное на основе статистической теории [34], используется в [30] для замыкания постановки задачи.

2. Условия на термокапиллярной границе раздела под действием сопутствующего потока газа и вызываемого им испарения. При изучении течений жидкостей в сопровождении потока газа, что вызывает испарение с границы раздела [31, 32], требуется провести математическое моделирование взаимодействующих процессов. Прежде всего необходимо сформулировать условия на границе раздела, учитывающие испарение (поток массы) и действие термокапиллярных сил.

Предположим, что материальная область разделена гладкой поверхностью Γ на две подобласти Ω_1 и Ω_2, заполненные вязкими, несжимаемыми, несмешивающимися жидкостями (или жидкостью и смесью газа и пара). Принадлежность фазе обозначается индексом «1» или «2». Пусть v_n – нормальная скорость, D_n – скорость смещения границы Γ в направлении нормали $\mathbf{n}$, $D_n = -\dfrac{F_t}{|\nabla_x F|}$, если Γ задана неявно в виде $F(\mathbf{x}, t) = 0$, при этом градиент вычисляется относительно пространственных переменных, $v_n^{'} = v_n - D_n$ – относительная скорость, $\mathbf{P}$ – тензор напряжений, связанный согласно закону Стокса для несжимаемых сред с тензором скоростей деформаций $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ следующим образом:

$$\mathbf{P}_i = -p_i\mathbf{I} + 2\rho_i\nu_i\mathbf{D}(\mathbf{v}_i), \tag{4}$$

$D_{kl}(\mathbf{v}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial v_l}{\partial x_k}\right)$ $(k, l = 1, 2, 3)$; p_i – давление; ρ_i – плотность; ν_i – коэффициент кинематической вязкости iой жидкости $(i = 1, 2)$; $\mathbf{P}_i\mathbf{n} = -p_i\mathbf{I}\mathbf{n} + 2\rho_i\nu_i\ \mathbf{D}(\mathbf{v}_i)\mathbf{n}$ – вектор напряжений $(i = 1, 2)$; $(P_i)_n = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{P}_i\mathbf{n}) = -p_i + 2\rho_i\nu_i\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_i)\mathbf{n}$ is нормальная составляющая вектора напряжений; $P_\tau^i = \tau\cdot(\mathbf{P}_i\mathbf{n}) = 2\rho_i\nu_i\tau\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_i)\mathbf{n}$ $(i = 1, 2)$ – касательная составляющая вектора напряжений; τ — касательный вектор (один из двух касательных векторов в случае $3D$).

Пусть характерный размер l есть диаметр области Ω_1, занятой жидкостью. Введем две характерных скорости: v_* – характерная скорость жидкости (будет определена ниже) и u_* – характерная скорость сопутствующего потока газа. Различные характерные времена процессов также могут быть рассмотрены в данной задаче. Рассмотрим, однако, характерное время t_* такое, что $l = v_* t_*$. Пусть все остальные характерные величины в задаче о совместном течении жидкости и газа при наличии границы раздела определяются жидкой средой. Пусть T_* – характерный перепад температуры; p_* – характерное давление, $p_* = \rho_1 {v_*}^2$, где $\rho_* = \rho_1$ – характерная плотность (плотность жидкости), $\sigma_* = \sigma_0$ – характерное значение поверхностного натяжения, равное значению поверхностного натяжения при некотором относительном значении температуры T_0. В случае линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры можно записать: $\sigma = \sigma(T) = 1 - \dfrac{MaCa}{RePr}(T - T_0)$. В результате перехода к безразмерным величинам возникают следующие безразмерные комплексы: $\overline{\rho} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ — отношение плотностей газа и жидкости; $\overline{\nu} = \dfrac{\nu_2}{\nu_1}$, $\chi = \dfrac{\chi_2}{\chi_1}$, $\overline{\kappa} = \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}$ – отношение коэффициентов кинематической вязкости, температуропроводности, теплопроводности газа и жидкости соответственно; $\overline{v} = \dfrac{u_*}{v_*}$ – отношение характерных скоростей газа и жидкости; $Re = \dfrac{v_* l}{\nu_1}$ – число Рейнольдса жидкости; $Pr = \dfrac{\nu_1}{\chi_1}$ – число Прандтля; $Ma = \dfrac{\sigma_T T_* l}{\rho_1\nu_1\chi_1}$ – число Марангони; $Ca = \dfrac{v_*\rho_1\nu_1}{\sigma_0}$ – капиллярное число. Обозначим также $\widetilde{\kappa} = \dfrac{\kappa_1 T_*}{l\rho_1 v_*^3}$. Этот параметр может быть представлен с помощью параметра испарения.

Представим в безразмерном виде обобщенные кинематическое, динамические и энергетическое условия на термокапиллярной границе [31, 32]:

$$v_{1\,n} - D_n = \overline{\rho}(\overline{v}v_{2\,n} - D_n) = \overline{J}\,J_{ev}; \tag{5}$$

$$-p_1 + \frac{2}{Re}\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_1)\mathbf{n} = -p_2 + \overline{\rho}\,\overline{\nu}\,\overline{v}\frac{2}{Re}\mathbf{n}\cdot D(\mathbf{v}_2)\mathbf{n} + $$
$$+\overline{\rho}(\overline{\rho} - 1)(\overline{v}v_{2\,n} - D_n)^2 + 2\sigma H\frac{1}{CaRe}; \tag{6}$$

$$2\tau\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_1)\mathbf{n}-2\overline{\rho}\,\overline{\nu}\,\overline{v}\,\tau\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_2)\mathbf{n}=-\frac{Ma}{RePr}\frac{\partial T}{\partial\tau};\quad(7)$$

$$\widetilde{\kappa}\{\frac{\partial T_1}{\partial n}-\overline{\kappa}\frac{\partial T_2}{\partial n}\}+\frac{Ma}{Re^2Pr}\{Tdiv_{\Gamma}\mathbf{v}_1\}=$$

$$=\overline{\rho}(\overline{v}v_{2\,n}-D_n)\{\overline{U}+\Big(\frac{1}{\overline{\rho}}-1\Big)P_{1\,n}\}+$$

$$+\frac{1}{2}\overline{\rho}(\overline{\rho}-1)^2(\overline{v}v_{2\,n}-D_n)^3+$$

$$+\frac{1}{CaRe}2\sigma H(\overline{\rho}-1)(\overline{v}v_{2\,n}-D_n).\qquad(8)$$

Здесь $\overline{J}=\dfrac{J_*^{ev}}{\rho_1 v_*}$; $\overline{U}=\dfrac{\lambda_U}{v_*^2}$ (λ_U используется для обозначения скрытой теплоты испарения), характерный поток массы J_*^{ev} будет определяться ниже,

$$P_{1n}=-p_1+\frac{2}{Re}\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_1)\mathbf{n}.\qquad(9)$$

Имеет место также соотношение, определяющее поток пара на границе раздела:

$$(\overline{v}v_{2\,n}-D_n)=-\frac{\widetilde{\chi}_d}{(1-C)}\frac{\partial C}{\partial n},\qquad(10)$$

где $\widetilde{\chi}_d=\dfrac{\chi_d}{lv_*}=\dfrac{1}{Pe_d}$; Pe_d — диффузионное число Пекле; C — массовая доля пара в среде Ω_2 (в газе).

3. Параметрический анализ обобщенных условий на границе раздела. Пусть $l=1$см — характерный размер области Ω_1, занятой жидкостью. Рассмотрим систему «жидкость – газ» вида «этанол – азот». Тогда плотность жидкости $\rho_1\approx0.79$ г/см^3; плотность газа $\rho_2\approx1.2\cdot10^{-3}$ г/см^3; поверхностное натяжение $\sigma_0\approx22$ дин/см; $\sigma_T\approx0.08$ дин/(см К; кинематическая вязкость $\nu_1\approx0.015$ см^2/сек; $\nu_2\approx0.15$ см^2/сек; теплопроводность $\kappa_1\approx4\cdot10^{-4}$ кал/(см сек К), $\kappa_2\approx0.65\cdot10^{-4}$ кал/(см сек К)); температуропроводность $\chi_1\approx0.89\cdot10^{-3}$ см^2/сек, $\chi_2\approx0.3$ см^2/сек; коэффициент диффузии $\chi_d\approx0.135$ см^2/сек. Скрытая теплота испарения λ_U считается приближенно равной 217 кал/г (см.: [35]). Тогда на основе приведенных значений можно оценить некоторые безразмерные параметры: $\overline{\rho}\approx1.5\cdot10^{-3}$; $\dfrac{1}{\overline{\rho}}\approx0.7\cdot10^3$; $\overline{\nu}\approx10$; $\overline{\chi}\approx337$; $\overline{\kappa}\approx0.16$; $Pr\approx17$.

В качестве характерной скорости u_* для газовой фазы можно рассмотреть ту же самую скорость v_*, что и для жидкости, но можно определить характерную скорость газа u_* с помощью удельного расхода газа Q. Характерная скорость жидкости v_* выбирается здесь равной скорости v_{th}, индуцируемой термокапиллярными силами: $v_*=v_{th}=\dfrac{\sigma_T T_*}{\rho_1\nu_1}$. Тогда $v_{th}\approx7$ (см/сек), если $T_*=1\,K$; $\overline{v}\sim10^{-1}$, если $u_*=1$ (см/сек); $Ma\approx0.74\cdot10^4$; $Re\approx0.47\cdot10^3$; $Ca\approx3.8\cdot10^{-3}$; $\overline{U}\approx2$; $\widetilde{\kappa}\sim10^{-6}$.

Отметим, что характерная скорость испарения $v_{ev}=\dfrac{J_*^{ev}}{\rho_1}$, где характерный поток массы J_*^{ev}, определяемый, как $J_*^{ev}=\dfrac{\kappa_1T_*}{l\lambda_U}$, ведет к значениям $v_{ev}\sim10^{-6}$ (см/сек). Вычисляя J_*^{ev}, получим, что $J_*^{ev}\sim10^{-6}$ (г/(см^2 сек)). Характерное время испарения равно 10^6 сек, так что испарение – достаточно медленный процесс. (Здесь речь идет о полном испарении слоя жидкости толщиной 1 см).

Пусть параметр испарения $\mathcal{E}$ вводится как отношение характерного времени релаксации вязких напряжений t_ν ($t_\nu=\dfrac{l}{v_\nu}$, $v_\nu=\dfrac{\nu}{l}$) к характерному времени испарения t_{ev} ($t_{ev}=\dfrac{l}{v_{ev}}$) [17, 20]. Тогда параметр $\widetilde{\kappa}$ можно переписать в виде $\widetilde{\kappa}=\mathcal{E}\overline{U}\,\dfrac{v_\nu}{v_*}$. Имеем $\widetilde{\kappa}=\mathcal{E}\overline{U}\,\dfrac{Pr}{Ma}$, если $v_*=v_{th}$. Заметим, что параметр испарения $\mathcal{E}$ можно ввести и другим способом [30].

Перепишем систему (6), (7), (8) в терминах J_{ev}, так что может быть проведен простой параметрический анализ:

$$-p_1+2\alpha_1\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_1)\mathbf{n}=-p_2+2\alpha_2\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_2)\mathbf{n}\;+$$

$$+\alpha_3\overline{J}^2J_{ev}^2+\alpha_42\sigma H;\qquad(11)$$

$$2\tau\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_1)\mathbf{n}-2\alpha_5\tau\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_2)\mathbf{n}=-\alpha_6\frac{\partial T}{\partial\tau};\qquad(12)$$

$$\{\frac{\partial T_1}{\partial n}-\overline{\kappa}\frac{\partial T_2}{\partial n}\}+\beta_2\{Tdiv_{\Gamma}\mathbf{v}_1\}=$$

$$=\beta_3\overline{J}J_{ev}+\beta_4\overline{J}J_{ev}P_{1\,n}+\frac{1}{2}\beta_5\overline{J}^3J_{ev}^3+$$

$$+\beta_6\overline{J}2\sigma HJ_{ev}.\qquad(13)$$

Для определения J_{ev} см. (5) и, например, (10) (также [11, 14, 31]), и для определения P_{1n} — (9). Безразмерные коэффициенты α_i $(i=1,...,6)$ и β_i $(i=2,...,6)$ определяются следующим образом: $\alpha_1=\dfrac{1}{Re}$; $\alpha_2=\dfrac{\overline{\rho}\;\overline{\nu}\;\overline{v}}{Re}$; $\alpha_3=1-\dfrac{1}{\overline{\rho}}$; $\alpha_4=\dfrac{1}{CaRe}$; $\alpha_5=\overline{\rho}\;\overline{\nu}\;\overline{v}$; $\alpha_6=\dfrac{Ma}{RePr}$; $\beta_2=\dfrac{Ma}{Re^2Pr\widetilde{\kappa}}$; $\beta_3=\dfrac{\overline{U}}{\widetilde{\kappa}}$; $\beta_4=(\dfrac{1}{\overline{\rho}}-1)\dfrac{1}{\widetilde{\kappa}}$; $\beta_5=(1-\dfrac{1}{\overline{\rho}})^2\dfrac{1}{\widetilde{\kappa}}$; $\beta_6=(1-\dfrac{1}{\widetilde{\rho}})\dfrac{1}{CaRe\widetilde{\kappa}}$.

Если скорость v_{th}, определяемая силами Марангони, вводится в качестве характерной скорости процесса и $u_*=v_*$, тогда коэффициенты в (11), (12), (13) имеют следующие порядки:

$\alpha_1 \sim 10^{-3}$; $\alpha_2 \sim 10^{-5}$; $\alpha_3 \sim 10^3$; $\alpha_4 \sim 1$; $\alpha_5 \sim 10^{-2}$; $\alpha_6 \sim 1$; $\beta_2 \sim 10^3$; $\beta_3 \sim 10^6$; $\beta_4 \sim 10^9$; $\beta_5 \sim 10^{12}$; $\beta_6 \sim 10^9$.

Заметим, что $\overline{J} \sim 10^{-7}$ (см. (5) для характерного значения J_*^{ev} и определение $\overline{J}$: $\overline{J} = \dfrac{J_*^{ev}}{\rho_1\, v_*}$). Следующие безразмерные параметры получены в результате анализа соотношений (11), (12), (13): $\alpha_3\overline{J}^{\,2} \sim 10^{-11}$, $\beta_3\overline{J} \sim 10^{-1}$, $\beta_4\overline{J} \sim 10^2$, $\beta_5\overline{J}^{\,3} \sim 10^{-9}$, $\beta_6\overline{J} \sim 10^2$.

Резонно предложить отбросить члены, порядка меньшего, чем 10^{-9}, в данном случае, когда в качестве характерной скорости выбрана v_{th}. После пренебрежения слагаемыми $\alpha_3\overline{J}^{\,2}$, $\beta_5\overline{J}^{\,3}$ в уравнениях (11), (12), (13) получается система уравнений, в которой дополнительные слагаемые, по сравнению с теми, что применяются для численных расчетов [31], могут играть существенную роль [32]:

$$-p_1 + 2\alpha_1 \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_1)\mathbf{n} =$$

$$= -p_2 + 2\alpha_2 \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v}_2)\mathbf{n} \ + \alpha_4 2\sigma H; \qquad (14)$$

$$2\tau\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v_1})\mathbf{n} - 2\alpha_5\tau\cdot\mathbf{D}(\mathbf{v_2})\mathbf{n} = -\alpha_6\frac{\partial T}{\partial \tau}; \qquad (15)$$

$$\{\frac{\partial T_1}{\partial n} - \overline{\kappa}\frac{\partial T_2}{\partial n}\} + \beta_2\{T div_\Gamma \mathbf{v}_1\} = \beta_3\overline{J}J_{ev} +$$

$$+\beta_4\overline{J}J_{ev}\,P_{1n} + \beta_6\overline{J}2\sigma H J_{ev}. \qquad (16)$$

Граничное условие (16) есть обобщение условия Стефана, которое возникает в задачах с фазовым переходом [36]. Это условие можно переписать в терминах $(v_n^1 - D_n)$ вместо $\overline{J}J_{ev}$ (см. (5)):

$$\{\frac{\partial T_1}{\partial n} - \overline{\kappa}\frac{\partial T_2}{\partial n}\} + \beta_2\{T div_\Gamma \mathbf{v}_1\} = \beta_3(v_n^1 - D_n) +$$

$$+\beta_4(v_n^1 - D_n)\,P_{1n} + \beta_6 2\sigma H(v_n^1 - D_n).$$

Второе слагаемое в левой части (16) ответственно за затраты энергии для преодоления деформации поверхности термокапиллярными силами вдоль поверхности. Важность учета данного члена в граничном условии была продемонстрирована результатами в [37]. Правая часть (16) пропорциональна скорости потока испаряющейся массы и характеризует затраты тепла на деформацию свободной поверхности в результате испарения.

Безразмерная форма условий на границе раздела с испарением (5)–(10) представлена для случая линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры (для общего случая см.: [31]).

Заключение. Обобщенные кинематическое, динамическое и энергетическое граничные условия есть результат соотношений на сильном разрыве, законов сохранения массы, импульса, энергии. Вывод данных условий осуществлен на основе следующих гипотез. Для чистых поверхностей без поверхностно-активных веществ свободная поверхностная энергия отождествляется с коэффициентом поверхностного натяжения σ. С использованием термодинамического тождества, связывающего абсолютную температуру, удельные поверхностные энтропию и энергию, считается выполненным уравнение Гиббса–Дюгема [1,2,16,38]. Согласно закону Стокса для несжимаемой жидкости выполняется соотношение (4) между тензором напряжений и тензором скоростей деформации. Предполагается равенство касательных скоростей на границе раздела Г. Следуя выбору термодинамических переменных, скрытая теплота испарения может быть определена как скачок энтальпии или как скачок внутренней (потенциальной) энергии $[U]$ [12,39]. Именно $[U]$ принимается равным скрытой теплоте испарения (см. также [11,30,38,40]). Согласно закону Фурье [15] полагается $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$, где κ – коэффициент теплопроводности; $\mathbf{q}$ – вектор потока тепла. С использованием первого закона Фика [15] записывается уравнение диффузии пара в области Ω_2, используя которое, выводится дополнительное соотношение баланса массы (10) на границе Г. Для завершения постановки задачи требуется определить, исходя из кинетической теории, соотношение, выражающее поток испаряющейся жидкости J_{ev} J_{ev} (см., например: (3)). Непрерывность температуры есть еще одно условие условие, принимаемое в представленном рассмотрении. Если граница раздела отделяет жидкость от пара, то непрерывность химического потенциала полагается выполненной на границе раздела, как следствие локального термодинамического равновесия [2, 16].

Библиографический список

1. Edwards D.A., Brenner H., Wasan D.T. Interfacial transport processes and rheology. – Boston etc., 1991.

2. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. – М., 2008.

3. Nepomnyaschy A.A., Velarde M.G., Colinet P. Interfacial phenomena and convection. — Chapman

and Hall/CRC, 2002.

4. Napolitano L.G. Thermodynamics and dynamics of surface phases // Acta Astronautica. – 1979. – Vol. 6(9).

5. Пухначёв В.В. Движение вязкой жидкости со свободными границами. – Новосибирск, 1989.

6. Белова И.В. Численные исследования напряжений в твердой фазе в процессе кристаллизации. Дисс. ... канд. физ-мат. наук. – Новосибирск, 1990.

7. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред.: II Классические модели механики сплошных сред. – Новосибирск, 1977.

8. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкостей. – М., 1963.

9. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М., 1962.

10. Исаченко В.П. Теплообмен при конденсации. – М, 1977.

11. Margerit J., Colinet P., Lebon G., Iorio C.S., Legros J.C. Interfacial nonequilibrium and Benard-Marangoni instability of a liquid-vapor system // Phys. Rev. – 2003. — Vol. E 68.

12. Haase R. Thermodynamics of irreversible processes. – Mineola NY, 1990.

13. Bedeaux D. Non Equilibrium Thermodynamics of Surfaces // Advances of Thermodynamics. – 1992. – №6.

14. Haut B., Colinet P. Surface-tension-driven instability of a liquid layer evaporating into an inert gas // J. of Colloid and Interface Science. – 2005. – №285.

15. De Groot S.R., Mazur P. Non-equilibrium thermodynamics. – Amsterdam, 1962.

16. Prigogine I., Dufay R. Chemical thermodynamics. – London; New York, 1954.

17. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.C. Long-wave instabilities of non-uniformly heated falling films // J. Fluid Mech. – 2002. – N. 453.

18. Мирзаде Ф.Х. Волновая неустойчивость слоя расплавленного металла, образующегося при интенсивных лазерных воздействиях // Журнал технической физики. – 2005. – Vol. 75(2).

19. Klentzman J., Ajaev V.S. The effects of evaporation on fingering instabilities // Physics of Fluids. – 2009. – №21.

20. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films // Reviews of Modern Physics. – 1997. – Vol. 69(3).

21. Gatapova E.Ya., Kabov O.A. Shear-driven flows of locally heated liquid films // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. – 2008. – Vol. 51(19-20).

22. Burelbach J.P., Bankoff S.G., Davis S.H. Nonlinear stability of evaporating/condensing liquid films // J. Fluid Mech. – 1988. – №195.

23. Delhaye J.M. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation // Int. J. of Multiphase Flow. – 1974. – N. 1.

24. Гончарова О.Н. Математическая модель формирования сферических оболочек в условиях кратковременной невесомости // Динамика сплошной среды. – 1987. – №82.

25. Гончарова О.Н. Глобальная разрешимость задачи о формировании сферических микробаллонов // Динамика сплошной среды. – 1993. – №106.

26. Frezzotti A. Boundary conditions at the vapor-liquid interface // Phys. Fluids. – 2011. – №23.

27. Bedeaux D., Kjelstrup S. Irreversible thermodynamics — a tool to describe phase transition far from global equilibrium // Chemical Engineering Sciences. – 2004. – №59.

28. Ghez R. Irreversible thermodynamics of a stationary interface // Surface sciences. – 1970. – №20.

29. Slattery J.C. Interfacial transport phenomena. – New York, 1990.

30. Das K.S., Ward C.A. Surface thermal capacity and its effects on the boundary conditions at fluid-fluid interfaces // Phys. Rev. – 2007. – Vol. E 75.

31. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Study of evaporative convection in an open cavity under shear stress flow // Microgravity Sci. Technol. – 2009. – Vol. 21(1).

32. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Heat and mass transfer control by evaporative thermal pattering of thin liquid layers // Computational Thermal Sci. – 2011. – Vol. 3(4).

33. Кузнецов В.В. Условия переноса тепла и массы на границе раздела жидкость – газ при диффузионном испарении // Journal of Siberian Federal. Mathematics and Physics. – 2010. — Vol. 3(2).

34. Rahimi P., Ward C.A. Kinetics of evaporation: statistical rate theory approach // Int. J. Thermodyn. — 2005. — Vol. 8(1).

35. Weast R.C. CRC Handbook of Chemistry and Physics. — CRC Press, 1978–1979.

36. Crank J. Free and moving boundary problems. — Oxford, 1984.

37. Bekezhanova V., Kabov O. Instability of the joint flow of liquid film and co-current gas flow: theory and experiment // Book of Abstracts "Sixth International Topical Team Workshop on Two-Phase Systems for Ground and Space Applications— Cava de' Tirreni (Napoli, Italy), 2011, September 25–28.

38. Defay R., Prigogine I. Surface tension and adsorption. — New York, 1966.

39. Bedeaux D., Hermans L.J.F., Ytrehus T. Slow evaporation and condensation // Physica. — 1990. — Vol. A 169.

40. Ghez R. A generalized Gibbsian surface // Surface sciences. — 1966. – №4.