УДК 57.02.001.57

А.М. Шайдук

Моделирование процессов формирования электромиографических сигналов

A.M. Shayduk

Simulation of the Formation of Electromyographic Signals

В работе изложена математическая модель, показывающая возможности получения информации о форме и частоте следования потенциалов действия отдельных двигательных единиц из интерференционного электромиографического сигнала.

Ключевые слова: моделирование электромиографических сигналов, потенциалы действия, двигательные единицы.

In this paper we presented a mathematical model showing the possibility of obtaining information about the shape and the repetition frequency of action potentials of individual motor units of the electromyographic interference signal.

Key words: modeling EMG signal, reconstruction of the potential of the action of the separate motor unit.

Известно, что сложные электромиосигналы, снимаемые с поверхности кожи вблизи от сокращающихся мышц, являются результатом сложения электрических потенциалов, генерируемых большим количеством так называемых двигательных единиц (групп мышечных волокон) [1]. Каждая двигательная единица генерирует квазипериодические импульсы, частота следования которых определяется величиной усилия мышцы, совершающей механическую работу. Длительность импульсов на порядок меньше периода их следования.

Такая картина построена на основании данных о свойствах миоимпульсов, полученных инвазивным методом. Инвазивный метод получения информации о свойствах миоимпульсов имеет, разумеется, весьма ограниченное применение и вряд ли получит широкое распространение при исследовании свойств миоимпульсов человека. Но если построить адекватную математическую модель генерации накожной электромиограммы, можно поставить и решать обратную задачу – по наблюдаемым характеристикам накожной электромиограммы получить свойства отдельных миоимпульсов неинвазивным методом.

Рассмотрим здесь спектральные характеристики накожной электромиограммы. Действительно, электромиографический сигнал, если он формируется описанным выше способом, должен иметь весьма характерный спектр [2, 3]. Пусть зависимость напряжения от времени для потенциала действия отдельной двигательной единицы есть функция $f(t)$. Вид этой функции обычно устанавливается экспериментально инвазивными методами. Миографический сигнал одной двигательной единицы $U(t)$, снимаемый накожным методом, представляет собой сумму отдельных потенциалов действия, сдвинутыми друг относительно друга на время τ_n

$$U_1(t) = \sum_{n=1}^{N} f(t-\tau_n), \tag{1}$$

где N – полное число отдельных импульсов, генерируемое за время измерения миограммы.

При измерении накожным методом регистрируемый сигнал создается уже не одной двигательной единицей. Двигательные единицы, расположенные рядом с электродами, создают на последних некоторое напряжение такого же типа, как и сигнал 1, поскольку управляются одним нервным волокном. Полный регистрируемый сигнал будет являться суперпозицией сигналов типа 1, случайно сдвинутых по оси времени на некоторую величину Δt_k, где индекс k есть условный номер двигательной единицы.

В случае одинакового вклада некоторого количества K двигательных единиц, регистрируемый сигнал принимает вид

$$U(t) = \sum_{k=1}^{K} U_1(t-\Delta t_k) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N} f(t-\tau_n-\Delta t_k). \tag{2}$$

В [2] показано, что из свойств преобразования Фурье следует мультипликативность спектра сигнала, генерируемого одной двигательной единицей. В [3, 4] показано, что и в случае сигнала типа 2, в котором учитывает генерация сигналов многими двигательными единицами, мультипликативность спектра сохраняется и добавляется новый сомножитель, описывающий влияние интерференции сигналов от множества двигательных единиц. Теперь комплексная спектральная функция $A(\omega)$ сигнала (2) есть

$$A(\omega) = A_0(\omega) \cdot A_1(\omega) \cdot A_2(\omega), \tag{3}$$

где

$$A_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt; \tag{4}$$

$$A_1(\omega) = \sum_{n=1}^{N} e^{-i\omega\tau_n}; \tag{5}$$

$$A_2(\omega) = \sum_{k=1}^{K} e^{-i\omega\Delta t_k}. \tag{6}$$

Измеряемая обычно спектральная мощность сигнала $S(\omega)$ является вещественной функцией и определяется как

$$S(\omega) = |A(\omega)|^2 = S_0(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega) \tag{7}$$

Рассмотрим здесь, как влияет на наблюдаемый спектр случайный сдвиг фаз между различными двигательными единицами. Это влияние целиком описывается функцией $S_2(\omega) = |A_2(\omega)|^2$.

Для вычисления выражения (6) необходимо знать явный вид последовательности Δt_k. Поскольку эта последовательность формируется случайно, необходимо определить тип статистики, которой подчиняется величина Δt_k. Пусть пока плотность вероятности получить значение Δt_k есть $p(\Delta t_k)$, т.е. вероятность $dW(\Delta t_k)$ получить значение Δt_k в интервале $d(\Delta t_k)$ есть

$$dW(\Delta t_k) = p(\Delta t_k) d(\Delta t_k).$$

Если требуется вычислить спектральную функцию (6) одной реализации, необходимо задать задать плотность вероятности $p(\Delta t)$ и провести численное моделирование суммы 6, используя соответствующий генератор случайных чисел.

На рисунке 1 приведен результат такого моделирования для равномерного распределения величины Δt_k на отрезке $-T_0/2 < \Delta t_k < T_0/2$, т.е. плотность вероятности

$$p(\Delta t_k) = \begin{cases} 1/T_0, & |\Delta t_k| < T_0/2 \\ 0. & |\Delta t_k| > T_0/2. \end{cases} \tag{8}$$

Из рисунка 1 видно, что на частоте $\nu = 1/T_0$ функция $S_2(\omega)$ обращается в ноль. Это приводит к возникновению провала в полном спектре миосигнала. Заметим однако, что этот результат справедлив лишь для выбранной статистики.

На рисунке 2 приведен результат численного моделирования для гауссовского распределения плотности вероятности $p(\Delta t)$ с дисперсией $\sigma = T_0/2$, т.е.

$$p(\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp(-\frac{(\Delta t)^2}{2\sigma^2}). \tag{9}$$

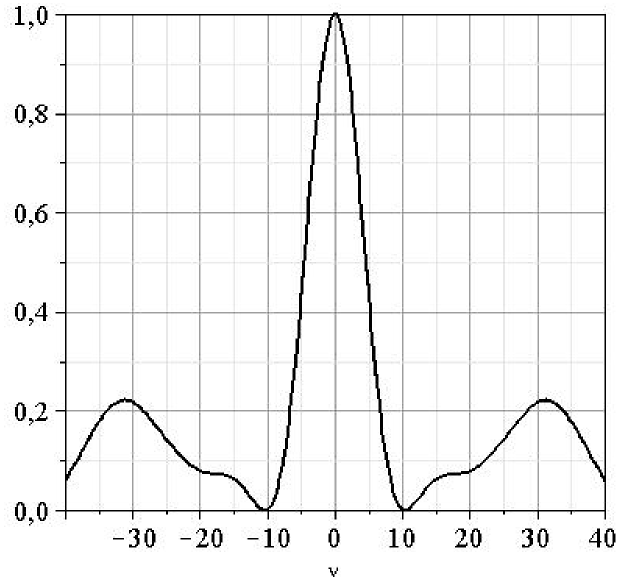

Рис. 1. Реализация спектральной плотности, обусловленной случайным сдвигом фаз. Равномерное распределение 0.05 $c < \Delta t_k <$ 0.05 c, число двигательных единиц $K = 20$

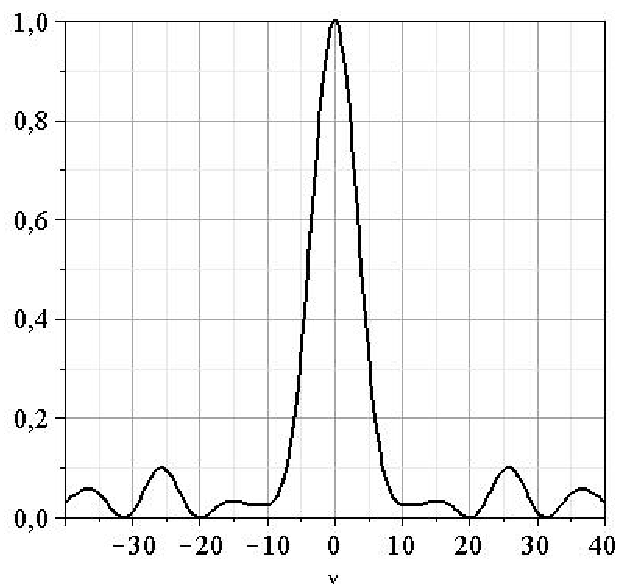

Рис. 2. Реализация спектральной плотности, обусловленной случайным сдвигом фаз. Гауссовское распределение с дисперсией -0.05 c, число двигательных единиц $K = 20$

В этой реализации на частоте $\nu = 1/T_0$ в полном спектре $S(\omega)$ минимума наблюдаться не будет, но появляются минимумы на приблизительно удвоенной частоте.

Вычислим теперь спектр мощности $\langle S_2(\omega)\rangle$, усредненный по бесконечному числу реализаций.

$$\langle S_2(\omega)\rangle = \langle |A_2(\omega)|^2\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} e^{-i\omega(\Delta t_k - \Delta t_l)} \right\rangle. \tag{10}$$

Выражение 10 представляет собой среднее от суммы K^2 слагаемых типа $I_{kl} = \exp(-i\omega(\Delta t_k - \Delta t_l)$. Среднее от суммы равно сумме средних, поэтому достаточно найти среднее слагаемого I_{kl}. При $k = l$ в силу нормировки плотности вероятности $\langle I_{kl}\rangle = 1$. Если $k \neq l$, то

$$\langle I_{kl}\rangle = A_p(\omega)A_p(\omega)^*, \tag{11}$$

где

$$A_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta t)e^{-i\omega(\Delta t)}d(\Delta t) \tag{12}$$

– спектральная функция плотности вероятности распределения величины Δt_k.

Таким образом, спектр мощности $\langle S_2(\omega)\rangle$ полностью определяется спектром мощности плотности вероятности $p(\Delta t_k)$.

Теперь, выполняя суммирование в 10 с учетом 11, получаем окончательно

$$\langle S_2(\omega)\rangle = K^2\left(\frac{1}{K} + \left(1 - \frac{1}{K}\right)\cdot A_p(\omega)A_p(\omega)^*\right). \tag{13}$$

Для получения количественных оценок необходимо использовать какой-либо явный тип плотности вероятности.

Пусть, например, используется равномерное распределение 8. В этом случае

$$A_p(\omega) = \frac{2}{\omega T_0}\sin(\frac{\omega T_0}{2}),$$

и средний по реализациям спектр мощности $\langle S_2(\omega)\rangle$ есть

$$\langle S_2(\omega)\rangle = K^2\left(\frac{1}{K} + \left(1 - \frac{1}{K}\right)\cdot \frac{4}{\omega^2 T_0^2}\sin^2(\frac{\omega T_0}{2})\right). \tag{14}$$

Теперь этот сомножитель $\langle S_2(\omega)\rangle$ не обращается в ноль и спектральные линии в спектре полного миосигнала исчезнуть не могут. Будут наблюдаться характерные провалы на нескольких первых частотах $\nu = n/T_0$, $n = 1, 2....$ Минимальное значение сомножителя $\langle S_2(\omega)\rangle$ есть K, т.е. спектральная мощность полного сигнала просто пропорциональна числу участвующих в его формировании двигательных единиц. Интерференционные эффекты наблюдаются лишь в диапазоне частот вблизи нуля $|\Delta\nu| < 1/T_0$.

Если случайный сдвиг фаз подчиняется нормальному распределению типа 9 с дисперсией σ, то

$$A_p(\omega) = \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right),$$

и усреднение по реализациям дает

$$\langle S_2(\omega)\rangle = K^2\left(\frac{1}{K} + \left(1 - \frac{1}{K}\right)\cdot \exp(-\sigma^2\omega^2)\right). \tag{15}$$

При таком типе статистики усреднение по реализациям приводит к исчезновению характерных «провалов» в полном спектре мощности, хотя в отдельных реализациях они могут появляться. Интерференционные эффекты от сложения сигналов от разных двигательных единиц в спектре проявляются лишь в диапазоне частот вблизи нуля. Диапазон частот определяется дисперсией $|\Delta\nu| < 1/\sigma$. Если величина дисперсии сравнима с характерным периодом следования импульсов в одной двигательной единице, то интерференционные эффекты могут совсем не проявляться в усредненном по реализациям полном спектре мощности. Спектральная мощность сигнала в этом случае практически на всех частотах будет пропорциональна количеству участвующих в его формировании двигательных единиц.

Из (15) видно, что регистрируемая спектральная мощность электромиосигнала может оказаться чрезвычайно усиленной в диапазоне частот вблизи нуля из-за специфического поведения спектральной мощности $S_2(\omega)$. Интерференция сигналов со случайным сдвигом фаз приводит к резкому усилению сигналов с частотой, близкой к нулю. Соответствующий диапазон частот есть $-\pi/\tau_r < \omega < \pi/\tau_r$, или $-1/(2\tau_r) < \nu < 1/(2\tau_r)$. Поэтому, если в измеряемом электромиосигнале вследствие погрешностей измерения или обработки результатов появятся низкочастотные артефакты (например, небольшая постоянная составляющая), то они и будут давать основной вклад в спектральную мощность сигнала.

Если в качестве аналитического представления функции $f(t)$ выбрать гауссовский моноимпульс $f(t)$ в виде

$$f(t) = t\cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2}, \tag{16}$$

где τ_0 – характерная длительность моноимпульса, то спектр гауссовского моноимпульса может быть вычислен аналитически. В этом случае максимум спектральной мощности моноимпульса соответствует частоте

$$\omega = \sqrt{2}/\tau_0.$$

При уменьшении частоты ниже значения $\sqrt{2}/\tau_0$ спектральная мощность быстро падает до нуля. Если $\pi/\tau_r \ll \sqrt{2}/\tau_0$, то эффект усиления низкочастотных составляющих сигнала может не возникать по причине их малости в исходном спектре $A_0(\omega)$. Иными словами, если в модельном регулярном сигнале

$$\frac{\tau_r}{\tau_0} \gg \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sim 1,$$

то усиление низкочастотных составляющих сигнала может не проявиться.

Если, наоборот, выполняется условие

$$\frac{\tau_r}{\tau_0} \leq 1, \tag{17}$$

то спектр сигнала качественно меняется. Из спектра исчезает информация об огибающей исходного одиночного миоимпульса и о частоте регулярной компоненты миосигнала. В этом случае получение информации о структуре сигнала отдельного мотонейрона уже невозможно. Отметим однако, что в реальных миографических сигналах частота следования миоимпульсов – десятки герц, т.е. период следования импульсов – десятки миллисекунд, а характерное время существования отдельного импульса – единицы миллисекунд. Поэтому, видимо, условие 17 в реальных миосигналах никогда не выполняется.

Относительно легко измеряемой характеристикой электромиосигнала является среднеквадратичное значение

$$< f^2 >= \frac{1}{T}\int\limits_0^T f_h(t)^2 dt, \tag{18}$$

где T – длительность регистрируемой части электромиосигнала. Для предлагаемой здесь математической модели сигнала соотношение 18 запишется как

$$< f^2 >= \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(t-n\tau_r-\tau_h(k))\right)^2 dt. \tag{19}$$

После раскрытия квадрата двойной суммы выражение 19 будет состоять из $(N\cdot K)^2$ интегралов. При этом $N\cdot K$ слагаемых будут иметь вид

$$f_g^2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t-n\tau_r-\tau_h(k))^2 dt \approx \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)^2 dt, \tag{20}$$

а остальные слагаемые примут вид

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t-n_1\tau_r-\tau_h(k_1))f(t-n_2\tau_r-\tau_h(k_2))dt. \tag{21}$$

Пусть опять $\tau_r \gg \tau_0$. В этом случае все интегралы в соотношениях 20 примерно одинаковы и отличны от нуля. Все интегралы в соотношениях 21, напротив, практически равны нулю, поскольку область перекрытия соседних моноимпульсов практически отсутствует, подынтегральное выражение в соотношениях 21 близко к нулю во всей конечной области интегрирования. Следовательно,

$$< f^2 >= \frac{N}{T}K\int\limits_0^T f(t)^2 dt = \nu\cdot K\cdot f_g^2 T. \tag{22}$$

В соотношении 22 учтено, что $N/T = \nu$ – частота следования регулярного импульса. Поскольку частота следования пропорциональна мышечному усилию, из модели следует известный результат, что интенсивность миограммы пропорциональна мышечному усилию.

Обратимся теперь к возможности восстановления некоторых параметров электромиосигнала, если известен его спектр $S(\omega)$. Очевидно, что тонкая структура спектра позволяет восстановить частоту следования одиночных импульсов, поскольку эта структура определяется регулярной составляющей сигнала $A_1(\omega)$. Некоторые спектральные линии в конкретных реализациях могут исчезать или быть подавлены хаотической составляющей спектра $A_2(\omega)$, однако можно рассчитывать, что усреднение по различным реализациям оставит подавленными лишь частоты

$$\nu_n = n\cdot\frac{1}{2\tau_r}$$

и устойчивая спектральная линия будет обнаружена.

Таким образом, результаты спектрального анализа модельных электромиограмм показывают, что в сложной структуре среднего спектра мощности должна содержаться спектральная линия, расположенная в низкочастотной области. Если последовательность миоимпульсов достаточно «периодична», максимум первой спектральной линии среднего спектра мощности электромиограммы соответствует частоте следования миоимпульсов. В работе [5] соответствующая устойчивая спектральная линия для всех испытуемых нами была обнаружена экспериментально. Тем самым подтверждена адекватность модельных представлений о структуре спектра электромиограмм. Можно утверждать, что имеется принципиальная возможность определения частоты следования миоимпульсов отдельных двигательных единиц по среднему спектру мощности поверхностной электромиограммы.

Библиографический список

1. Косицкий Г.И. Физиология человека. – М., 1985.

2. Рангайян Р.М. Анализ биомедицинских сигналов: практический подход. – М., 2007.

3. Шайдук А.М., Останин С.А. Моделирование электромиографического сигнала средствами LabVIEW // Известия АлтГУ. – 2011. – №1 (65).

4. Шайдук А.М., Останин С.А. Восстановление параметров электромиографического сигнала средствами LabVIEW // Известия АлтГУ. – 2011. – №1 (69).

5. Шайдук А.М., Останин С.А., Юсупов Е.Р. Экспериментальное обнаружение средней частоты следования миоимпульсов по поверхностной электромиограмме // Журнал радиоэлектроники. – М., 2011. – №9.