

УДК 57.02.001.57

*А.М. Шайдук, С.А. Останин, В.К. Коновалов, С.Л. Леонов,
Д.Ю. Козлов, В.Г. Колмогоров, М.Н. Лобанов*

Проблема стандартизации масштаба при вычислении фрактальной размерности медицинских изображений

*A.M. Shayduk, S.A. Ostanin, V.K. Konovalov, S.L. Leonov,
D.Yu. Kozlov, V.G. Kolmogorov, M.N. Lobanov*

Problems of Standardization Scale in Calculating Fractal Dimension of Medical Images

Проанализирована проблема стандартизации масштаба измеряемых функций медицинских изображений, возникающая в связи с необходимостью оценки величины их фрактальных размерностей. Получены количественные соотношения между характеристиками функции изображения, при которых фрактальная размерность не может быть определена однозначно. Приведены результаты численного моделирования зависимости величины фрактальной размерности изображения от его параметров.

Ключевые слова: фрактальная размерность, анализ медицинских изображений.

Для количественного описания степени хаотичности фрагментов медицинских изображений часто осуществляют оценку величины их фрактальной размерности [1–5]. Оценку фрактальной размерности выполняют, например, для характеристики структурных изменений в биомедицинских изображениях [6], классификации медицинских изображений [7], диагностики заболеваний молочной железы [8–12], раковых опухолей [13–14]. Разные виды медицинских изображений представляют собой распределения различных физических величин Z в плоскости (x, y) . В том случае, когда Z не является пространственной характеристикой исследуемого объекта, возникает необходимость в нормировке функции $Z(x, y)$ перед вычислением фрактальной размерности. Как будет показано ниже, при определенных условиях существует связь между величиной нормировочного размерного параметра и оценкой величины фрактальной размерности функции $Z(x, y)$. Следовательно, существует возможность получения различных значений фрактальной размерности для одного изображения при разных значениях нормировочного параметра, что может повлечь неоднозначную медицинскую интерпретацию изображения. В настоящей работе исследуется проблема стандартизации масштаба измеряемой функции изображения, возникающая в связи с необходимостью оценки его фрактальной размерности.

In this paper we formulated and analyzed standardization scale of measured features peculiar to medical images, arising from the need to estimate the value of their fractal dimensions. The quantitative relation between characteristics of the image function at which the fractal dimension can not be determined unambiguously was obtained. The results of numerical modeling show the dependence of the image fractal dimension on its parameters.

Key words: fractal dimension, analysis of medical images.

Для иллюстрации проблемы рассмотрим частный случай, вычисление фрактальной размерности поверхности функции $Z(x, y)$, заданной на прямоугольнике $x_{\min} < x < x_{\max}$ и $y_{\min} < y < y_{\max}$. В качестве меры выберем площадь S указанной поверхности, а в качестве элементарного элемента этой меры – величину dS . Выберем опять же для иллюстрации один из способов определения dS .

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2} \cdot dx \cdot dy. \quad (1)$$

Чтобы получить фрактальную последовательность, можно заменить производные в соотношении (1) конечными разностями, считая, например

$$\varepsilon_n = \Delta x = \Delta y \quad (2)$$

и вычисляя меру S_n как сумму элементарных мер dS_n , зависящих теперь от параметра ε_n :

$$dS_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta Z_x}{\varepsilon_n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z_y}{\varepsilon_n}\right)^2} \cdot d\varepsilon_n^2, \quad (3)$$

$$S_n = \sum_{\text{все } dS} dS_n. \quad (4)$$

Однако соотношение (3), вполне понятное с математической точки зрения, в физике и медицине не может иметь смысла, поскольку и координаты x , y и функция Z – размерные величины, которые в соотношении (3) сравниваются с безразмерной едини-

цей. В соотношение (3) должны входить только безразмерные величины.

Координаты x, y легко приводятся к безразмерному виду с помощью преобразований:

$$\xi = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \quad \eta = \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}. \quad (5)$$

Для приведения функции Z к безразмерному виду ее необходимо поделить на некоторый размерный параметр A , т.е. при вычислении элемента меры использовать функцию

$$\Theta = \frac{Z}{A}. \quad (6)$$

В публикациях по вычислению фрактальной размерности, где такое преобразование не делалось, по умолчанию считается, что $A = 1$ – единица размерности Z .

Пусть выбран некоторый масштаб A . Тогда для этого масштаба новый элемент меры dS есть

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\Theta_x}{\varepsilon_n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\Theta_y}{\varepsilon_n}\right)^2} \varepsilon_n^2 = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta Z_x}{\varepsilon_n}\right)^2 + \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta Z_y}{\varepsilon_n}\right)^2} \varepsilon_n^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, используя размерный параметр Z , мы должны вычислять элемент меры как

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta Z_x}{\varepsilon_n}\right)^2 + \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta Z_y}{\varepsilon_n}\right)^2} \varepsilon_n^2. \quad (8)$$

Вопрос, однако, состоит в следующем: зависит ли фрактальная размерность от выбора параметра A ? Каким образом сравнивать результаты, данные для которых получены из разных источников? Ответ легко получить с формальной математической точки зрения. Рассмотрим частные случаи.

Гладкая поверхность. Пусть все производные от $Z(x, y)$ существуют и конечны. Тогда при уменьшении параметра ε_n из соотношения (8) получаем

$$dS_n \rightarrow \sqrt{1 + \text{const} \cdot \varepsilon_n^2} \rightarrow \text{const} \cdot \varepsilon_n^2. \quad (9)$$

Число слагаемых в сумме (4) есть $1/\varepsilon_n$ и поэтому значение меры в соотношении (4) при уменьшении ε_n стремится к постоянному значению, не зависящему от ε_n :

$$S = \frac{1}{\varepsilon_n^2} \cdot dS \rightarrow \text{const}.$$

В этом случае фрактальная размерность

$$D = 2 + \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{\ln(S_n)}{\ln(1/\varepsilon_n)} \rightarrow 2 \quad (10)$$

и не зависит от выбора параметра A .

Шероховатая поверхность. Теперь рассмотрим функцию $Z(x, y)$, принимающую случайное значение в каждой точке. Пусть среднеквадратичное отклонение от среднего Z существует и равно σ . В этом случае при достаточно малом ε_n будет выполняться условие

$$\left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta Z}{\varepsilon_n}\right)^2 \gg 1 \quad (11)$$

и элемент меры dS , в среднем, можно оценить как

$$dS \approx \frac{\sigma}{A \varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n^2 \sim \frac{\sigma}{A} \cdot \varepsilon_n. \quad (12)$$

Значение меры S есть

$$S \sim \frac{1}{\varepsilon_n^2} \cdot \frac{\sigma}{A} \cdot \varepsilon_n \sim \frac{\sigma}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon_n}. \quad (13)$$

Фрактальная размерность

$$D = 2 + \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{\ln(S_n)}{\ln(1/\varepsilon_n)} \rightarrow 3 \quad (14)$$

и в этом случае также не зависит от A .

Медицинское изображение. Однако для медицинских изображений нет возможности сделать параметр ε_n сколь угодно малым. Его наименьшее значение есть $\varepsilon_n = 1/N$, где N – число линейных пикселей, составляющих цифровое изображение. Оценивая характерную величину ΔZ в соотношении (11) как среднеквадратичное отклонение Z в изображении, мы видим, что для случайной матрицы фрактальная размерность перестанет зависеть от A только лишь при выполнении условия

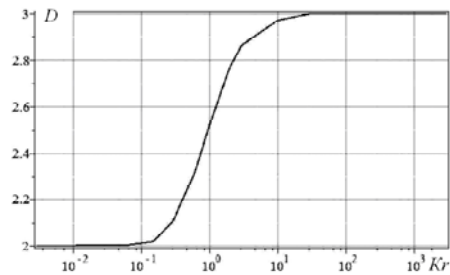
$$Kr^2 = \left(\frac{\sigma}{A} \cdot N\right)^2 \gg 1. \quad (15)$$

Однако для размеров матриц в медицинских изображениях условие (15) может не выполняться. В этом случае результат обработки изображения будет зависеть от выбора параметра A .

В качестве примера приведем результаты численного эксперимента для изображения размером 100×101 пикселей, в котором каждый пиксел принимает случайное значение в некотором диапазоне. Среднеквадратичное отклонение значений Z есть σ . Рассчитывалась фрактальная размерность этой матрицы в зависимости от критерия

$$Kr = N \cdot \frac{\sigma}{A}. \quad (16)$$

Как видно из рисунка, фрактальная размерность, теоретически равная 3, может весьма существенно отличаться от этого значения. В диапазоне $0,1 < Kr < 10$ фрактальная размерность случайной матрицы изменяется в интервале от практически 2 (гладкая поверхность) до практически 3 (абсолютно шероховатая поверхность).



Фрактальная размерность для случайного изображения в зависимости от параметра Kr

Если взять $A = 1000$ в шкале Хаунсфилда (используемой в компьютерной томографии), то при $\sigma \sim 10$ все матрицы, даже абсолютно шероховатые, размером меньше чем 100×100 , становятся «относительно гладкими» с фрактальной размерностью около 2. Следовательно, при обработке подобных изображений необходимо выбрать некоторый критерий для определения параметра A .

В качестве такого критерия можно использовать критерий (16). В этом случае при одинаковом значении Kr случайные матрицы разных размеров будут иметь одинаковые фрактальные размерности. Таким образом, на примере двумерного изображения показана возможность устранения неоднозначной оценки величины фрактальной размерности.

Библиографический список

1. Reljin I.S., Reljin B.D. Fractal geometry and multifractals in analyzing and processing medical data and images // *Archive of Oncology*. – 2002. – Vol. 10 (4).
2. Al-Kadi O.S., Watson D. Texture Analysis of Aggressive and Nonaggressive Lung Tumor CE CT Images // *IEEE transactions on biomedical engineering*. – 2008. – Vol. 55, №7.
3. Jianhua Wu, Chunhua Jiang, Liqiang Yao. Medical Image Retrieval Based on Fractal Dimension // *Young Computer Scientists*. – 2008. (ICYCS 2008. The 9th International Conference).
4. Penn Alan I., Loew Murray H. Estimating fractal dimension of medical images // *Medical Imaging 1996: Image Processing*, Murray H. Loew; Kenneth M. Hanson; Eds. – Proc. SPIE Vol. 2710.
5. Irini S. Reljin, Branimir D. Reljin. Fractal geometry and multifractals in analyzing and processing medical data and images // *Archive of Oncology*. – 2002. – V. 10(4).
6. Swarnakar V., Acharya R.S., Sibata C., Shin K. Fractal based characterization of structural changes in biomedical images // *SPIE*. – 1996. – V. 2709.
7. Chen C.C., Daponte J.S., Fox M.D. Fractal feature analysis and classification in medical imaging // *IEEE Trans Med Imaging*. – 1989. – V.8 (2).
8. Caldwell C.B., Stapleton S.J., Hodsworth D.W. at al. Characterisation of mammographic parenchymal pattern by fractal dimension // *Physics in Medicine & Biology*. – 1990. – V35(2).
9. Pierre Kestener, Jean Marc Lina, Phillipe Saint-Jean, at al. Wavelet-based multifractal formalism to assist in diagnosis in digitized mammograms // *Image Anal Stereol*. – 2001. – V. 20.
10. Tomislav Stojic', Irini Reljin, Branimir Reljin. Adaptation of multifractal analysis to segmentation of microcalcifications in digital mammograms // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2006. – V. 367.
11. Guo Q., Shao J., Ruiz V.F. Characterization and classification of tumor lesions using computerized fractal-based texture analysis and support vector machines in digital mammograms // *Int J Comput Assist Radiol Surg*. – 2009. – V. 4(1).
12. Mavroforakis M.E., Georgiou H.V., Dimitropoulos N. at al. Mammographic masses characterization based on localized texture and dataset fractal analysis using linear, neural and support vector machine classifiers // *Artif Intell Med*. – 2006. – V. 37(2).
13. Mihara N., Kuriyama K., Kido S. at al. The usefulness of fractal geometry for the diagnosis of small peripheral lung tumors // *Nippon Igaku Hoshasen Gakkai Zasshi*. – 1998. – V. 58(4).
14. James W. Baish, Rakesh K. Jain. Fractals and cancer // *Cancer Research*. – 2000. – V. 60.