

Ю.А. Суковатов

**Теоретическое исследование нелинейной стадии  
градиентно-дрейфовой неустойчивости  
во внешней ионосфере\***

Yu.A. Sukovatov

**The Theoretical Study on Nonlinear Gradient-Drift  
Instability in the Outer Ionosphere**

Рассмотрена нелинейная стадия двумерной градиентно-дрейфовой неустойчивости. Исследуется зависимость установившегося уровня возмущений электронной концентрации и динамики установления стационарного состояния от параметров ионосферной плазмы и волн. Рассчитанные значения установившегося уровня возмущений электронной концентрации наблюдаются в экспериментах.

**Ключевые слова:** внешняя ионосфера, нелинейная градиентно-дрейфовая неустойчивость, численные методы, ионосферные неоднородности.

**Введение.** В работе рассмотрена нелинейная стадия двумерной градиентно-дрейфовой неустойчивости. Выведена система двух нелинейных уравнений для первой и второй гармоник возмущений электронной концентрации. Далее определено значение всех параметров ионосферы и волн, которые входят в полученную систему уравнений. Эта система уравнений решается численным методом. Далее исследуется зависимость установившегося уровня возмущений электронной концентрации и динамики определения стационарного состояния от параметров ионосферной плазмы и волн. Рассчитанные значения установившегося уровня возмущений электронной концентрации наблюдаются в экспериментах.

**Расчеты нелинейной стадии градиентно-дрейфовой неустойчивости во внешней ионосфере.** Одна из основных причин возникновения неоднородностей концентрации электронов в ионосфере, вызывающих F-рассеяние радиоволн, – градиентно-дрейфовая неустойчивость плазмы ионосферы [1–5]. Рассмотрим основные уравнения градиентно-дрейфовой неустойчивости с учетом нелинейных эффектов.

Скорости нулевого приближения для электронов и ионов принимаем в следующем виде:

$$\vec{v}_{e0} = \frac{c}{B} [\vec{E}_0 \times \vec{b}], \quad (1)$$

$$\vec{v}_{i0} = \frac{1}{\omega_{Bi}} [\vec{g} \times \vec{b}] + \frac{c}{B} [\vec{E}_0 \times \vec{b}] + \frac{\delta_{in}}{\omega_{Bi}} \vec{g} + \delta_{in} \frac{c}{B} \vec{E}_0. \quad (2)$$

Nonlinear gradient-drift instability in the outer ionosphere is considered. The dependence of stationary level of perturbations of electron density and establishment of stationary state on plasma parameters is investigated. The values of stationary electron density perturbations are observed in experiments.

**Key word:** the outer ionosphere, the nonlinear gradient-drift instability, numerical methods, ionospheric irregularities.

Для потенциального электрического поля выражения для возмущений скоростей заряженных частиц принимают такой вид:

$$\vec{v}_e = -[\nabla \tilde{\varphi} \times \vec{b}], \quad (3)$$

$$\vec{v}_i = -[\nabla \tilde{\varphi} \times \vec{b}] - \delta_{in} \nabla \tilde{\varphi}. \quad (4)$$

При учете нелинейного члена уравнение непрерывности для электронов выглядит следующим образом:

$$\dot{N} + (\vec{v}_{e0} \nabla) N + (\vec{v}_e \nabla) N_0 + v_r N = -(\vec{v}_e \nabla) N. \quad (5)$$

Здесь нелинейный член находится в правой части, принято во внимание, что  $\text{div} \vec{v}_e = 0$ ;  $\vec{v}_{e0}$  – дрейфовая скорость плазмы  $\vec{v}_d$ , которая направлена по оси  $x$ .

С учетом выражений для компонент скорости  $\vec{v}_e$  уравнение непрерывности для электронов запишем в виде:

$$\dot{N} + v_d N'_x - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} N'_0 + v_r N = -\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial z}. \quad (6)$$

В этом случае нелинейные члены находятся в правой части уравнения. Электронную концентрацию  $N$  и потенциал  $\tilde{\varphi}$  будем искать в таком виде:

$$N = A_1 \sin(k_x x - \omega t) \cos k_z z + A_2 \sin 2k_z z, \quad (7)$$

$$\tilde{\varphi} = D_1 \sin(k_x x - \omega t + \theta) \cos k_z z + D_2 \sin 2k_z z, \quad (8)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды первой и второй гармоник концентрации;  $D_1$  и  $D_2$  – аналогичные амплитуды гармоник потенциала;  $\theta$  – сдвиг по фазе между колебаниями электронной концентрации и потенциала.

Физически такой вид решения означает, что мы задаем волну вдоль оси  $x$  и колебание по координате  $z$ . Кроме этого, учитываем, что за счет нелинейных эффектов генерируется вторая гармоника по координате  $z$ . Сдвиг по фазе между колебаниями потенциала и электронной концентрации составляет  $\theta = -\pi/2$ .

Разность уравнений непрерывности запишем в следующем виде:

$$N_0 \operatorname{div} \vec{v}_i + N \operatorname{div} \vec{v}_i - N \operatorname{div} \vec{v}_e + ((\vec{v}_{i0} - \vec{v}_{e0}) \nabla) N + ((\vec{v}_i - \vec{v}_{e0}) \nabla) N_0 + ((\vec{v}_i - \vec{v}_e) \nabla) N = 0. \quad (9)$$

В этом уравнении второй и шестой члены в левой части – нелинейные, что отличает его от рассмотренных нами ранее уравнений. Теперь необходимо вычислить значения всех производных от  $N$  и  $\tilde{\varphi}$ , которые присутствуют в уравнениях непрерывности (6) и (9). Для дальнейших расчетов упростим эту систему уравнений и учтем в ней диффузионное затухание. После несложных расчетов можно показать, что отношение нелинейных членов в уравнении (9) к нелинейному члену в уравнении непрерывности для электронов (6) является величиной порядка  $\delta_{in}$ . В условиях внешней ионосферы эта величина мала,  $\delta_{in} \approx 10^{-5}$ , поэтому обоими нелинейными членами в разности уравнений непрерывности для ионов и электронов (9) пренебрегаем.

Далее, из механизмов затухания дрейфовых волн мы учли только затухание волн за счет рекомбинации заряженных частиц. Однако затухание за счет рекомбинации может быть мало по сравнению с диффузионным затуханием дрейфовых волн для достаточно больших значений волновых векторов. Для того чтобы учесть диффузионное затухание волн, нам надо учесть соответствующие члены в выражениях для скоростей заряженных частиц (1) и (2). Однако мы уже делали такие расчеты ранее, и результат расчетов известен: нужно вместо инкремента неустойчивости  $\gamma_g$  ввести в уравнения непрерывности разность инкремента неустойчивости  $\gamma_g$  и коэффициента диффузионного поглощения волн  $\gamma_d$ , где  $\gamma_d = 2\delta_{ei} D_e k^2$ . Здесь  $\delta_{ei} = v_{ei} / \omega_{Be}$ ;  $D_e = c_e^2 / \omega_{Be}$ ;  $c_e^2 = \kappa T_e / m_e$ ;  $\kappa$  – постоянная Больцмана;  $T_e$  – температура электронов;  $m_e$  – их масса;  $\omega_{Be}$  – гирочастота электронов. Мы учли в этом выражении, что в условиях внешней ионосферы частота столкновений электронов с нейтралами много меньше частоты столкновений электронов с ионами  $v_{en} \ll v_{ei}$ . С учетом сказанного выше разность уравнений непрерывности принимает следующий простой вид:

$$\Delta \tilde{\varphi} = \frac{v_d}{N_0} \frac{\partial N}{\partial z}. \quad (10)$$

Подставим теперь значения производных  $N$  и  $\tilde{\varphi}$  в уравнения непрерывности. Теперь из уравнений (6) и (10), приравнявая друг другу члены с одинаковыми пространственно-временными зависимостями,

получим уравнения для амплитуд первой и второй гармоник возмущений электронной концентрации  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = (\gamma_g - \gamma_d - \nu_r) A_1 - k_x L \gamma_g A_1 A_2, \quad (11)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} = -\nu_r A_2 + \frac{1}{2} k_x L \gamma_g A_1^2. \quad (12)$$

Физический смысл уравнения (11) состоит в том, что нарастание амплитуды первой гармоники определяется разностью инкремента градиентно-дрейфовой неустойчивости и суммы коэффициентов поглощения за счет рекомбинации и диффузии. Кроме этого, нарастание амплитуды первой гармоники регулируется нелинейным членом в правой части уравнения (11). Нарастание амплитуды второй гармоники обусловлено нелинейным членом в правой части (12), кроме того, эта гармоника затухает за счет рекомбинации заряженных частиц. Здесь мы также учли диффузионное затухание дрейфовых волн по описанной выше схеме. Из решения линейной задачи [6] следует, что частота дрейфовых волн подчиняется дисперсионному уравнению:

$$\omega = k_x v_d. \quad (13)$$

Инкремент градиентно-дрейфовой неустойчивости

$$\gamma_g = \frac{v_d k_z^2}{L k^2}. \quad (14)$$

Далее при расчетах будем считать, что  $k_z \gg k$ . При этом инкремент неустойчивости будет максимальным. В этом случае волновой вектор  $\vec{k}$  направлен почти по оси  $z$ . Заметим, что считать  $k_x = 0$  нельзя, поскольку компонента волнового вектора  $k_x$  как множитель входит в систему уравнений (11) и (12) в члены, описывающие нелинейное взаимодействие первой и второй гармоник возмущений электронной концентрации. Таким образом, градиентно-дрейфовая неустойчивость существенно двумерная.

Оценим возможные значения инкремента неустойчивости при выполнении условия  $k_x = k$ . Берем  $v_d = 20$  м/с,  $v_{in} = 1$  с<sup>-1</sup>, тогда для характерного размера неоднородности плазмы ионосферы  $L = 20$  км получим  $\gamma_g = 10^{-3}$  с<sup>-1</sup>. Частоту рекомбинации возьмем  $\nu_r = 5 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup> [7, 8]. На высотах внешней ионосферы порядка 550 км берем  $\delta_{ei} = 10^{-7}$ . Заметим, что величина  $D_e$  – это не настоящий коэффициент диффузии, а величина, пропорциональная настоящему коэффициенту диффузии и удобная для расчетов. Для краткости будем называть  $D_e$  коэффициентом диффузии. Из книги [7] на высоте 550 км электронная температура  $T_e \cong 1,5 \cdot 10^3$  К. Отсюда рассчитываем квадрат скорости  $c_e$ :

$$c_e^2 = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ м}^2/\text{с}^2. \quad (15)$$

Поскольку  $\omega_{Be} = 9 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>, определяем коэффициент диффузии  $D_e$ :

$$D_e = \frac{c_e^2}{\omega_{Be}} = 2,6 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с} \quad (16)$$

Теперь с помощью критерия развития градиентно-дрейфовой неустойчивости  $\gamma_g > \gamma_d$  можно определить область неустойчивости: длина волны  $\lambda > 100$  м. Параметр  $k_z L$  сначала принимаем такой:  $k_z L = 100$ . Здесь  $L$  – характерный размер неоднородности фоновой концентрации электронов.

Теперь мы определили все параметры, необходимые для численных расчетов эволюции амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  со временем. Для численных расчетов системы уравнений (11) и (12) использовалась подпрограмма `dogr18` из [9].

На рисунке 1 приведена зависимость амплитуды первой гармоники возмущения электронной концентрации от времени. Здесь приняты следующие значения параметров системы уравнений: характерный размер неоднородности фоновой электронной концентрации  $L = 70$  км, частота рекомбинации  $\nu_r = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , декремент диффузионного затухания  $\gamma_d = 0,2\gamma_g$ , инкремент градиентно-дрейфовой неустойчивости  $\gamma_g = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Скорость дрейфа плазмы ионосферы  $v_d = 20$  м/с. Начальные амплитуды гармоник  $A_1 = 10^{-4}$ ,  $A_2 = 10^{-5}$ .

Из рисунка 1 видно, что амплитуда  $A_1$  сначала быстро нарастает, а затем колеблется около постоянного значения 0,45% фоновой концентрации электронов. Ограничение амплитуды волн происходит за счет нелинейных эффектов. Стационарное состояние достигается примерно за 27 часов. Как показывают расчеты, с уменьшением характерного

размера неоднородности фоновой плотности электронов  $L$  (при этом увеличивается инкремент) время достижения стационарного состояния уменьшается.

При увеличении диффузионного затухания колебаний амплитуда первого максимума уменьшилась, возросло время достижения стационарного состояния. В этом случае установившийся уровень колебаний для первой и второй гармоник примерно одинаков и составляет 0,3%.

При повышении частоты рекомбинации происходит снижение размаха колебаний, при этом время достижения стационарного состояния уменьшается.

На рисунке 2 показано влияние сокращения параметра  $k_z L$  на эволюцию гармоники  $A_1$  со временем в процессе развития градиентно-дрейфовой неустойчивости. Из графиков видно, что при уменьшении параметра  $k_z L$ , ( $k_z L = 10$ ) происходит существенное увеличение размаха колебаний амплитуд. Кроме этого, установившийся уровень возмущений электронной концентрации здесь получается 10%. Дальнейшее снижение этого параметра приведет к еще большему возрастанию амплитуды колебаний, однако мы при этом выходим за рамки используемого приближения слабой (квадратичной) нелинейности. В этом случае надо решать полную систему нелинейных уравнений. Малые  $k_z L$  соответствуют очень длинным волнам. Наши расчеты показывают, что для длинных волн возможна большая амплитуда возмущений электронной концентрации.

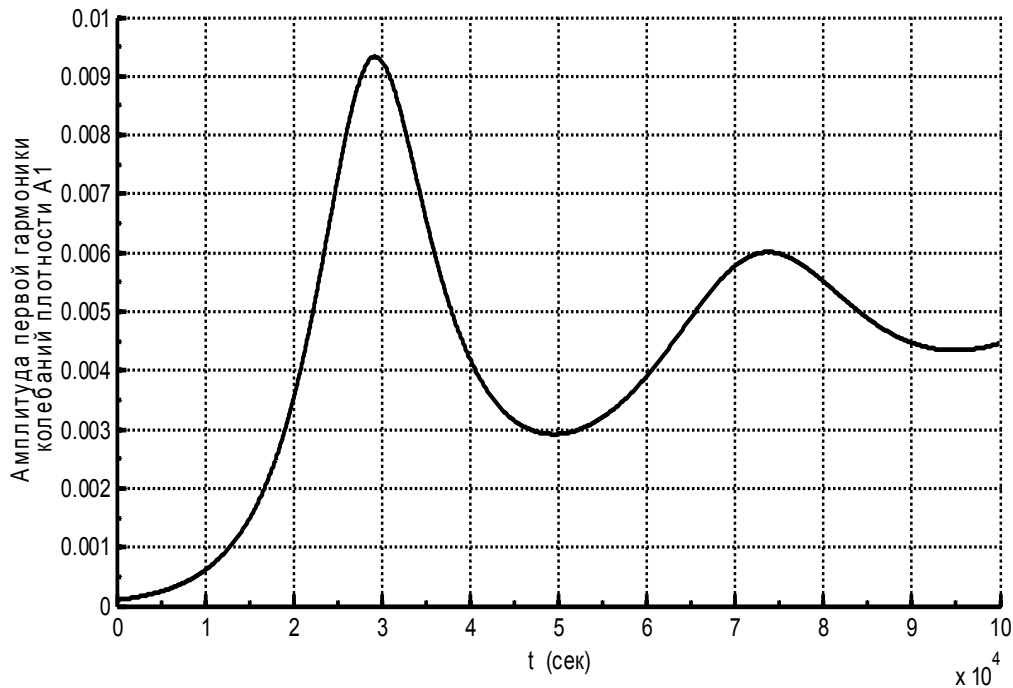


Рис. 1. Зависимость амплитуды первой гармоники возмущения электронной концентрации  $A_1$  (в единицах  $N/N_0$ ) от времени (сек.) при развитии градиентно-дрейфовой неустойчивости во внешней ионосфере. Характерный размер неоднородности фоновой концентрации электронов  $L = 70$  км ( $k_z L = 100$ )

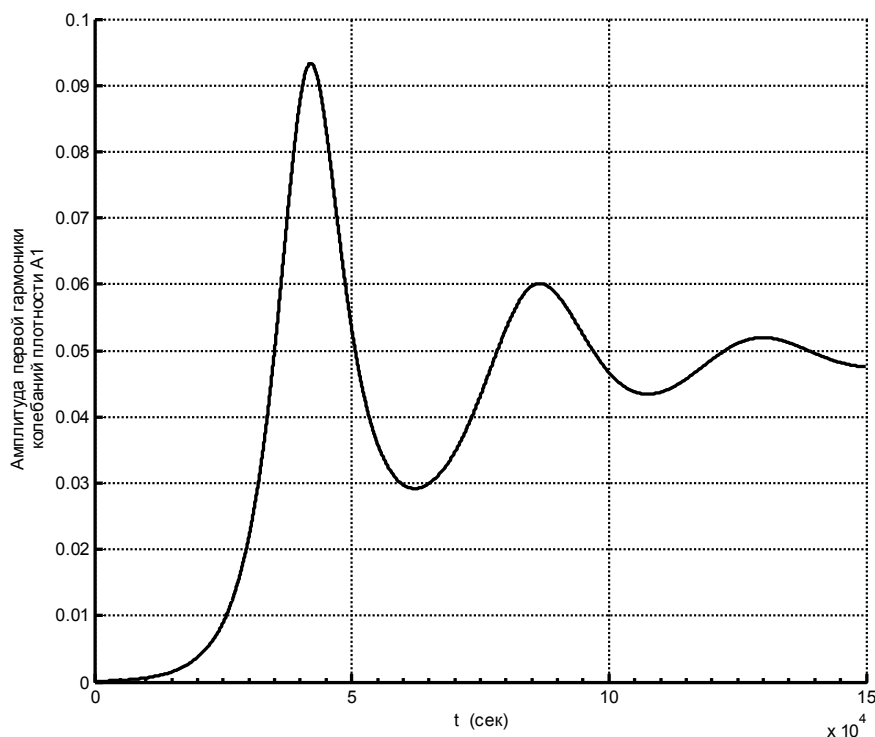


Рис. 2. Влияние изменения параметра  $k_z L$  на эволюцию со временем гармоники  $A_1$  при развитии градиентно-дрейфовой неустойчивости во внешней ионосфере ( $k_z L = 10$ )

Измерения в ионосфере [1, 3, 4] показывают типичный установившийся уровень мелкомасштабных возмущений электронной концентрации порядка единиц процентов, что хорошо сходится с нашими расчетами. В то же время редко наблюдаются очень сильные (100%) возрастания и уменьшения электронной концентрации для больших пространственных масштабов [6], что также согласуется качественно с нашими расчетами.

Таким образом, в настоящей работе мы провели теоретическое исследование нелинейной стадии раз-

вития градиентно-дрейфовой неустойчивости во внешней ионосфере. Исследована зависимость особенностей достижения стационарного состояния от параметров ионосферы и волны. Рассчитанные значения установившегося уровня возмущений электронной концентрации наблюдаются в экспериментах. По сравнению с другими аналогичными работами учтено диффузионное затухание дрейфовых волн, исследовано влияние параметра  $k_z L$  на динамику установления стационарного состояния и на установившийся уровень возмущений электронной концентрации.

## Библиографический список

1. Гершман Б.Н., Казимировский Э.С., Кокоуров В.Д., Чернобровкина Н.А. Явление F-рассеяния в ионосфере. – М., 1984.
2. Keskinen M.J., Ossakow S.L. Nonlinear Evolution of Plasma Enhancements in the Auroral Ionosphere 1. Long Wavelength Irregularities // J. Geophys. Res. – 1982. – V. 87.
3. Keskinen M.J., Ossakow S.L. Nonlinear Evolution of Convecting Plasma Enhancements in the Auroral Ionosphere 2. Small Scale Irregularities // J. Geophys. Res. – 1983. – V. 88.
4. Hyssel et al. Onset Conditions for Equatorial Spread F Determined During EQUIS II // Geophys. Res Letters. – 2005. – V. 32 (L24104, doi:10.1029/2005GL024743, 2005).
5. Chaturvedi P.K., Ossakow S.L. Nonlinear Stabilization of the ExB Gradient Drift Instability in Ionospheric Plasma Clouds // J. Geophys. Res. – 1979. – V. 84.
6. Суковатов Ю.А., Карпачев А.Т., Телегин В.А. Градиентно-дрейфовая неустойчивость как источник F-рассеяния в области крупномасштабных неоднородностей низкоширотной внешней ионосферы // Геомагнетизм и аэронавигация. – 2010. – Т. 50, №3.
7. Фаткулин М.И., Зеленова Т.И., Козлов В.К., Легенька А.Д., Соболева Т.Н. Эмпирические модели среднелинейной ионосферы. – М., 1981.
8. Hudson M.K. Spread F bubbles: Nonlinear Rayleigh-Taylor Mode in Two Dimensions // J. Geophys. Res. – 1978. – V. 83. (NA7).
9. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1990.