УДК 550.388.2, 551.510.535

Ю.А. Суковатов

Теоретическое исследование неустойчивости Кельвина-Гельмгольца во внешней ионосфере*

Yu.A. Sukovatov

The Theoretical Study on the Kelvin-Helmholtz Instability in the Outer Ionosphere

В результате численных расчетов в работе показано, что инкремент неустойчивости Кельвина-Гельмгольца может быть на порядок больше инкрементов неустойчивости Рэлея-Тейлора и градиентно-дрейфовой неустойчивости в условиях ионосферы.

Ключевые слова: внешняя ионосфера, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, численные методы, ионосферные неоднородности.

Based on numerical calculations this paper shows that the growth rate of the Kelvin-Helmholtz instability is an order of magnitude larger, than the growth rates of the Rayleigh-Taylor instability and the gradient-drift instability in the ionosphere plasma.

Key words: outer ionosphere, Kelvin-Helmholtz Instability, numerical methods, ionospheric irregularities.

Введение. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца возникает в течениях обычной жидкости со слоисто-неоднородной скоростью и в плазме в случае, когда скорость дрейфа обладает широм, т.е. меняется в направлении, поперечном к направлению дрейфа [1–4]. Более того, профиль дрейфовой скорости для возможности развития неустойчивости должен иметь точку перегиба. Система уравнений, которая описывает неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в плазме, должна учитывать ионную инерцию. Эта неустойчивость считается одним из основных источников турбулентности нейтральной атмосферы. В ионосферной плазме также возможно развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В этом разделе мы получим дифференциальное уравнение, которое описывает эту неустойчивость в условиях ионосферы. В отличие от неустойчивости Рэлея-Тейлора и градиентно-дрейфовой неустойчивости для неустойчивости Кельвина-Гельмгольца нельзя получить аналитическое выражение для инкремента. Возможно, однако, численными методами сосчитать инкременты неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для заданных параметров ионосферы и волны. Инкремент неустойчивости Кельвина-Гельмгольца может быть больше инкрементов названных выше неустойчивостей.

Вывод уравнений для неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Мы выбираем следующую геометрию: магнитное поле $\vec{B}$ направлено на север вдоль оси z. Фоновое электрическое поле направлено на запад вдоль оси x и зависит от координаты x. Фоновая концентрация заряженных частиц $N_0(x)$ также зависит от координаты x. В этом случае скорость дрейфа плазмы направлена вниз по оси y и зависит от координаты x.

Уравнения движения электронов и ионов возьмем в следующем виде:

$$\vec{E}+\frac{1}{e}\left[\vec{\upsilon}_e\times\vec{B}\right]=0\,; \tag{1}$$

$$m_i\dot{\vec{\upsilon}}_i+m_i\left(\vec{\upsilon}_i\cdot\nabla\right)\vec{\upsilon}_i=e\vec{E}+\frac{e}{e}\left[\vec{\upsilon}_i\times\vec{B}\right]-m_i\nu_{in}\vec{\upsilon}_i\,. \tag{2}$$

Вычислим малый параметр $\dfrac{\upsilon_d'}{\omega_{Bi}}$, который входит в это уравнение. На низких широтах во внешней ионосфере может быть $\upsilon_d\approx 20$ м/с. Характерный размер неоднородности дрейфовой скорости примем 100 км [6]. Этот малый параметр оценивается как:

$$\frac{1}{\omega_{Bi}}\frac{\upsilon_d}{L}\approx 10^{-6}\,.$$

С учетом малости этого параметра из уравнения (2) получаем следующее выражение для фоновой скорости ионов:

$$\vec{\upsilon}_{i0}=\vec{\upsilon}_d\left(x\right). \tag{3}$$

Заметим, что в работе [4] приводится другое выражение для фоновой скорости ионов. Очевидно, в этом месте у них допущена ошибка. Рассмотрим теперь уравнения для возмущенных скоростей электронов и ионов. Считаем электрическое поле по-

* Работа выполнена по проекту №2.1.1/653 «К нелинейной теории эволюции ионосферных неоднородностей» аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)».

тенциальным $\vec{\varepsilon} = -\nabla\tilde{\varphi}$. Из (1) получим следующее выражение для скорости электронов:

$$\vec{\upsilon}_e = -\left[\nabla\varphi \times \vec{b}\right]. \qquad (4)$$

Здесь $\varphi = e\tilde{\varphi} / B$ – нормированный потенциал.

Уравнение для возмущенной скорости ионов имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\omega_{Bi}}\dot{\vec{\upsilon}}_i + \frac{1}{\omega_{Bi}}\left(\vec{\upsilon}_{i0}\cdot\nabla\right)\vec{\upsilon}_i + \frac{1}{\omega_{Bi}}\left(\vec{\upsilon}_i\cdot\nabla\right)\vec{\upsilon}_{i0} = = -\nabla\varphi + \left[\vec{\upsilon}_i \times \vec{b}\right]. \qquad (5)$$

Все возмущенные величины ищем в виде: $\varphi \sim \overline{\varphi}\left(x\right)\exp\left(-i\omega t + ik_y y\right)$, для простоты считаем $k_z = 0$ (условие сильной вытянутости возмущений вдоль магнитного поля [1]).

Выражения для возмущенных скоростей ионов имеют следующий вид:

$$\upsilon_{ix} = -ik_y\varphi - \frac{i\varepsilon}{\omega_{Bi}}\varphi' + \frac{\upsilon_d'}{\omega_{Bi}}ik_y\varphi, \qquad (6)$$

$$\upsilon_{iy} = \varphi' - \frac{i\varepsilon}{\omega_{Bi}}ik_y\varphi. \qquad (7)$$

Разность уравнений непрерывности для ионов и электронов в линеаризованном виде имеет следующий вид:

$$N_0 div\,\vec{\upsilon}_i + N div\,\vec{\upsilon}_{i0} - \left(\left(\vec{\upsilon}_{i0} - \vec{\upsilon}_{e0}\right)\cdot\nabla\right)N + +\left(\upsilon_{ix} - \upsilon_{ex}\right)\cdot N_0' = 0. \qquad (8)$$

Подставляя в это уравнение фоновые и возмущенные скорости ионов, получим следующее уравнение, описывающее неустойчивость Кельвина-Гельмгольца:

$$\varphi'' + \frac{N_0'}{N_0}\varphi' - k_y^2\varphi - k_y\frac{\upsilon_d'' + \upsilon_d' N_0' / N_0}{\varepsilon} = 0. \qquad (9)$$

Здесь $\varepsilon = k_y\upsilon_d\left(x\right) - \omega$. Если неоднородность фоновой концентрации заряженных частиц несущественна $N_0' = 0$, то уравнение (49) упростится:

$$\varphi'' - k_y^2\varphi - k_y\frac{\upsilon_d''}{k_y\upsilon_d\left(x\right) - \omega}\varphi = 0. \qquad (10)$$

Уравнения (9) и (10) представляют собой искомые уравнения, описывающие неустойчивость Кельвина-Гельмгольца.

Уравнение непрерывности для электронов в линеаризованном виде имеет следующий вид:

$$\dot{N} + N_0 div\vec{\upsilon}_e + \left(\vec{\upsilon}_{e0}\cdot\nabla\right)N + \left(\vec{\upsilon}_e\cdot\nabla\right)N_0 = 0. \qquad (11)$$

С учетом определений фоновой (4) и возмущенной (20) скоростей электронов получим следующее уравнение:

$$\left(-i\omega + ik_y\upsilon_d\left(x\right)\right)N = ik_y N_0'\varphi. \qquad (12)$$

Если развивается неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в ионосфере и согласно уравнениям (9) и (10) потенциал φ нарастает со временем, то по уравнению непрерывности (12) концентрация заряженных частиц также будет нарастать со временем с таким же инкрементом неустойчивости:

$$\varphi \sim \exp\left(\gamma_{kg}t\right),\ N \sim \exp\left(\gamma_{kg}t\right). \qquad (13)$$

Здесь мы выбрали зависимость всех возмущений от координаты x в виде $\exp\left(ik_x x\right)$.

Численные расчеты инкремента неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В этом разделе мы получим решение уравнения для неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (10).

$$\varphi'' - k_y^2\varphi - k_y\frac{\upsilon_d''}{k_y\upsilon_d\left(x\right) - \omega}\varphi = 0. \qquad (14)$$

При развитии неустойчивости частота ω приобретает мнимую часть: $\omega = \omega_r + \gamma_{kg}$. Удобно разделить числитель и знаменатель дроби в третьем члене в (14) на компоненту волнового вектора k_y:

$$\varphi'' - k_y^2\varphi - \frac{\upsilon_d''}{\upsilon_d\left(x\right) - c_r - ic_i}\varphi = 0, \qquad (15)$$

где $c_r = \dfrac{\omega_r}{k_y}$; $c_i = \dfrac{\gamma_{kg}}{k_y}$ – действительная и мнимая части фазовой скорости.

После этого уравнение (3) можно записать в следующем виде:

$$\varphi'' - k_y^2\varphi - \frac{\upsilon_d''(\upsilon_d - c_r)}{d}\varphi - \frac{\upsilon_d'' ic_i}{d}\varphi = 0, \qquad (16)$$

где $d = (\upsilon_d - c_r)^2 + c_i^2$. Потенциал φ величина комплексная в нашем случае: $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$. После подстановки потенциала в уравнение (16) удобно преобразовать его к системе уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_3, \\ \varphi_2' &= \varphi_4, \\ \varphi_3' &= k_y^2\varphi_1 + \frac{v_d''(v_d - c_r)}{d}\varphi_1 - \frac{v_d'' c_i}{d}\varphi_2, \\ \varphi_4' &= k_y^2\varphi_2 + \frac{v_d''(v_d - c_r)}{d}\varphi_2 + \frac{v_d'' c_i}{d}\varphi_1. \end{aligned} \qquad (17)$$

Для этой системы уравнений надо решить краевую задачу на собственные значения (c_γ и c_i). Сформулируем краевые условия для системы уравнений (17). При больших значениях координаты x почти все коэффициенты в уравнении (16) стремятся к нулю. Поэтому при $x \to \pm\infty$ основное уравнение (16) принимает следующий вид:

$$\varphi'' - k_y^2\varphi = 0. \qquad (18)$$

Таким образом, можно сформулировать граничные условия:

$$\begin{aligned} &x \to -\infty \\ &\varphi_1 = \exp(k_y x), \\ &\varphi_2 = 0, \\ &\varphi_3 = k_y\exp(k_y x), \\ &\varphi_4 = 0. \end{aligned} \qquad (19)$$

А также:

$$x \to \infty$$
$$\varphi_1 = \exp(-k_y x),$$
$$\varphi_2 = 0, \qquad (20)$$
$$\varphi_3 = -k_y \exp(-k_y x),$$
$$\varphi_4 = 0.$$

Граничные условия на левой стороне интервала x используются как начальные условия для системы уравнений (17). Дисперсионное уравнение для расчета собственных значений c_y и c_i формулируется на правом конце интервала x:

$$x \to +\infty$$
$$f = \varphi_1 - \exp(-k_y x) = 0\,. \qquad (21)$$

В работе использован следующий профиль скорости $\upsilon_d(x)$ с точкой перегиба:

$$\upsilon_d(x) = \frac{\tanh(x)+1}{2}. \qquad (22)$$

Для расчетов комплексной фазовой скорости применялся метод стрельбы. Чтобы рассчитывать дифференциальные уравнения системы (17), мы использовали подпрограмму dopri8 [6]. Для расчетов дисперсионного уравнения (21) применен метод секущих для комплексных переменных.

Результаты наших расчетов инкремента неустойчивости Кельвина-Гельмгольца приведены в таблице.

Инкремент неустойчивости Кельвина-Гельмгольца γ_{kg} (с$^{-1}$) в зависимости от компоненты волнового вектора k_y (м$^{-1}$)

k_y	0,01	0,05	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
γ_{kg}	0,005	0,02	0,04	0,07	0,1	0,1	0,08	0,07	0,06	0,03

Мы видим из этой таблицы, что инкремент неустойчивости Кельвина-Гельмгольца может достигать значений 0,1 с$^{-1}$, в то время как инкременты неустойчивостей Рэлея-Тейлора и градиентно-дрейфовой не бывают больше 10^{-2} с$^{-1}$ в условиях ионосферы [1]. Таким образом, в результате численных расчетов в работе показано, что инкремент этой неустойчивости может быть на порядок больше инкрементов неустойчивости Рэлея-Тейлора и градиентно-дрейфовой неустойчивости в условиях ионосферы.

Библиографический список

1. Гершман Б.Н., Казимировский Э.С., Кокоуров В.Д., Чернобровкина Н.А. Явление F-рассеяния в ионосфере. – М., 1984.

2. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей Т. 2: Неустойчивости неоднородностей плазмы. – М., 1971.

3. Michalke A. On the Inviscid Instability of the Hyperbolic-Tangent Velocity Profile // J. Fliud Mech. – 1964. – V. 19.

4. Satyanarayana P., Guzdar P.N., Huba J.D., Ossakow S.L. Rayleigh-Taylor Instability in the Presence of a Stratified Shear Layer // Geophys. Res. – 1984. – V.89, NA5.

5. Фаткулин М.И., Зеленова Т.И., Козлов В.К., Легенька А.Д., Соболева Т.Н. Эмпирические модели среднеширотной ионосферы. – М., 1981.

6. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1990.