УДК 514.75

М.А. Чешкова

О бутылке Клейна

M.A. Cheshkova

About Klein Bottle

В евклидовом пространстве рассматривается бутылка Клейна. В процессе исследования используется система компьютерной математики.

Ключевые слова: бутылка Клейна, лист Мебиуса, лемниската Бернулли.

The Klein bottle is studied in the Euclidean space. Computer mathematics system is used in the study.

Key words: Klein bottle, Mobius band,lemniscate Bernoull.

Бутылку Клейна рассматриваем как склейку двух листов Мебиуса вдоль края.

В евклидовом пространстве E^3 зададим линейчатую поверхность M:

$$r(u,v) = \rho(u) + ve^*(u), \tag{1}$$

где $\rho(u) = ae(u) = a(cos(u); sin(u), 0)$ — направляющая окружность радиуса a; $e^*(u)$ — орт образующей прямой.

Будем предполагать, что прямые ортогонально пересекают окружность. Обозначим через $\varphi(u)$ — угол между плоскостью окружности и прямой. Тогда

$$e^*(u) = cos(\varphi(u))e(u) + sin(\varphi(u))k,$$

где $k = (0,0,1)$.

Если при этом $\varphi(u) = u/2$, то $e^*(0) = -e^*(2\pi)$, прямые $r(v,0), r(v,2\pi)$ «склеиваются». Имеем лист Мебиуса [1] $M \subset E^3$. Итак,

$$e^*(u) = cos(\frac{u}{2})e(u) + sin(\frac{u}{2})k, \tag{2}$$

$$r(u,v) = (a + vcos(\frac{u}{2}))e(u) + vsin(\frac{u}{2})k, \tag{3}$$

или

$$r(u,v) = ((a + vcos(\frac{u}{2}))cos(u), \tag{4}$$

$$(a + vcos(\frac{u}{2}))sin(u), vsin(\frac{u}{2})).$$

Пусть в переменной плоскости $(e(u), k)$ задана кривая типа восьмерки, осью которой является $e^*(u)$, причем кратная точка лежит на окружности.

Рассмотрим поверхность

$$r(u,v) = \rho(u) + f_1(v)e^*(u) + f_2(v)k^*(u), \tag{5}$$

$$k^*(u) = -sin(\frac{u}{2})e(u) + cos(\frac{u}{2})k, k = (0,0,1),$$

образованную кривыми типа восьмерки, кратные точки кривых расположены на окружности $\rho(u) = ae(u), e(u) = (cos(u), sin(u), 0)$, радиуса a, а оси $e^*(u)$ ортогонально секут окружность. Тогда при повороте на угол 2π кривые также «склеиваются».

Итак, уравнение поверхности запишется в виде

$$r(u,v) = ae(u) + f_1(v)(cos(u/2))e(u) + sin(u/2)k) + \tag{6}$$
$$f_2(v)(-sin(u/2))e(u) + cos(u/2))k).$$

Если v_0 есть решение уравнения $f_2(v) = 0$, и $f_1(v_0) \neq 0$, то кривая $r(u,v_0)$ есть край листа Мебиуса, где $v = f_1(v_0)$. Если $f_1(v_0) = 0, f_2(v_0) = 0$, то кривая $r(u,v_0)$ есть средняя окружность на листе Мебиуса

Будем называть эти линии на бутылке Клейна как среднюю линию и линию края соответственно.

Определим вектор нормали $N = [r_u, r_v]$ вдоль средней окружности.

Имеем

$$N(u,v_0) == a(-A(u,v_0)k + B(u,v_0)e(u)),$$

где v_0 есть решение системы

$$(f_1(v) = 0, f_2(v) = 0,$$

а

$$A(u,v) = f_1'(v)cos(u/2) - f_2'(v)sin(u/2),$$

$$B(u,v) = f_1'(v)sin(u/2) + f_2'(v)cos(u/2).$$

Так как

$$A(0,v) = f_1'(v), B(0,v) = f_2'(v),$$

$$A(2\pi,v) = -f_1'(v), B(2\pi,v) = -f_2'(v),$$

$$e(0) = e(2\pi) = (1,0,0),$$

получаем $N(0,v_0) = -N(2\pi,v_0)$. Откуда следует, что поверхность неориентируемая, односторонняя.

Зададим кривую в виде

$$f_1(v) = sin(v), f_2(v) = sin(2v).$$

Тогда уравнение (6) бутылки Клейна запишется в виде

$$r(u,v) = (a+sin(v)cos(u/2)-sin(u/2)sin(2v))cos(u), \quad (7)$$

$$(a + sin(v)cos(u/2) - sin(u/2)sin(2v))sin(u),$$

$$sin(v)sin(u/2) + sin(2v)cos(u/2).$$

Построим поверхность (4), полагая $a = 4, u = -\pi, ..., \pi, v = -\pi, ..\pi$(рис. 1, 2).

Найдем линию края. Решая $sin(2v) = 0, sin(v) \neq 0$, получим $v = \pi/2$.Разрежем бутылку Клейна вдоль линии $v = \pi/2$. Для этого полагаем $v = \pi/2, ..., 3\pi/2$ и $v = 3pi/2, ..., 3\pi/2+2\pi$, (рис. 3).

Если кривая лемнтската Бернулли [2, с. 155], то

$$f_1(v) = b\sqrt{2cos(2v)}cos(v), f_2(v) = b\sqrt{2cos(2v)}sin(v).$$

Получаем другое погружение бутылки Клейна.

$$r(u,v) = (a + b\sqrt{2cos(2v)}cos(v)cos(u/2)- \quad (8)$$

$$-b\sqrt{2cos(2v)}sin(u/2)sin(v))cos(u),$$

$$(a + b\sqrt{2cos(2v)}cos(v)cos(u/2)-$$

$$-b\sqrt{2cos(2v)}sin(u/2)sin(v))sin(u),$$

$$b\sqrt{2cos(2v)}cos(v)sin(u/2)+$$

$$b + \sqrt{2cos(2v)}sin(v)cos(u/2).$$

Используя математический пакет, построим поверхность (5) , полагая $a = 4, b = 1$. Так как $cos(2v) \geq 0$, то $v = -\pi/4, ..., \pi/4$ (рис. 3).

Найдем линию края. Решая $sin(v) = 0, cos(v) \neq 0$, получим $v = 0$.Разрежем бутылку Клейна вдоль линии $v = 0$. Для этого полагаем $v = -\pi/4, ..., 0$ и $v = 0, ..., \pi/4$ (рис. 4).

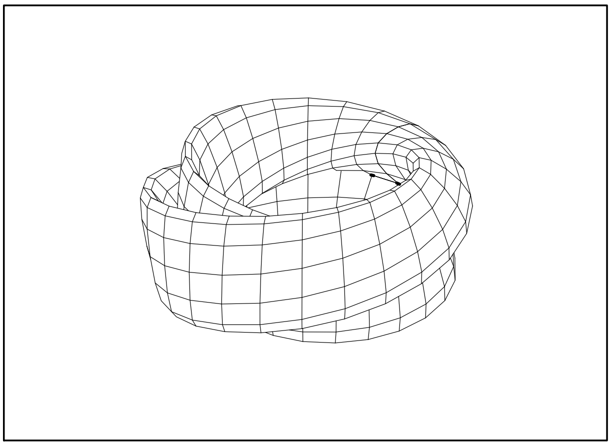

Рис. 1. Бутылка Клейна $f_1(v) = sin(v), f_2(v) = sin(2v)$

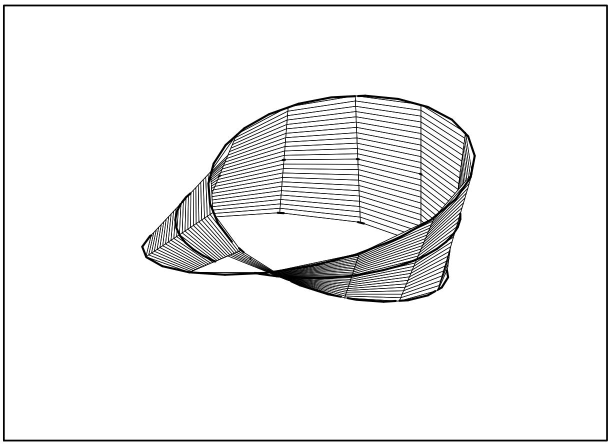

Рис. 2. Лист Мебиуса, $a = 4$

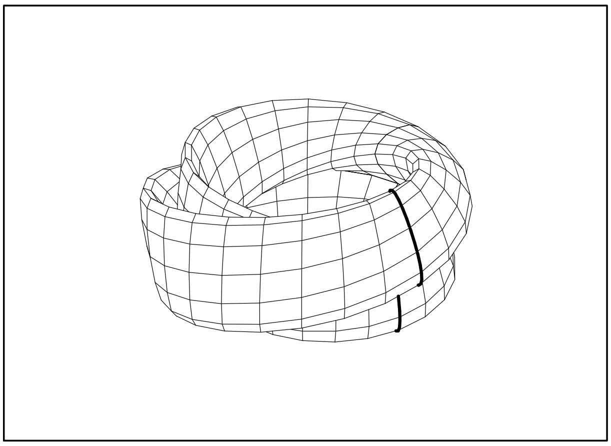

Рис. 3. Бутылка Клейна $f_1(v) = sin(v), f_2(v) = sin(2v) a = 4$, восьмерка

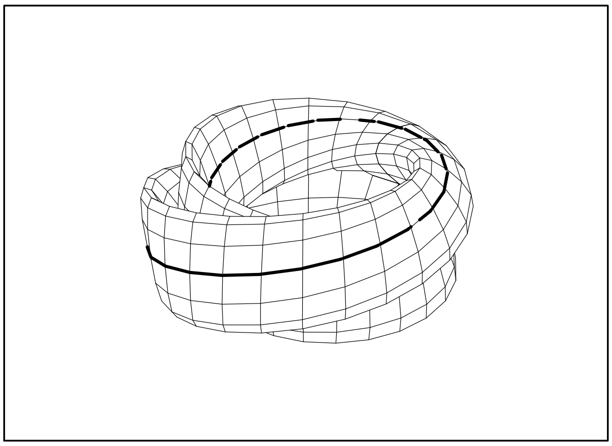

Рис. 4. Бутылка Клейна $f_1(v) = sin(v), f_2(v) = sin(2v) a = 4$, линия края

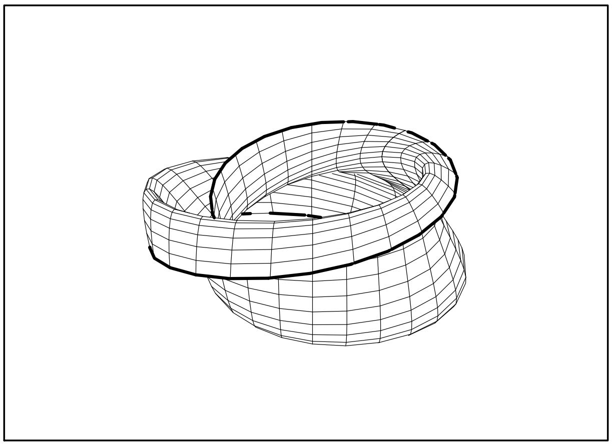

Рис. 5. Бутылка Клейна, разрезанная по краю, $f_1(v) = sin(v), f_2(v) = sin(2v), a = 4, u = -2\pi, .., 2\pi, v = 0, ..., \pi$

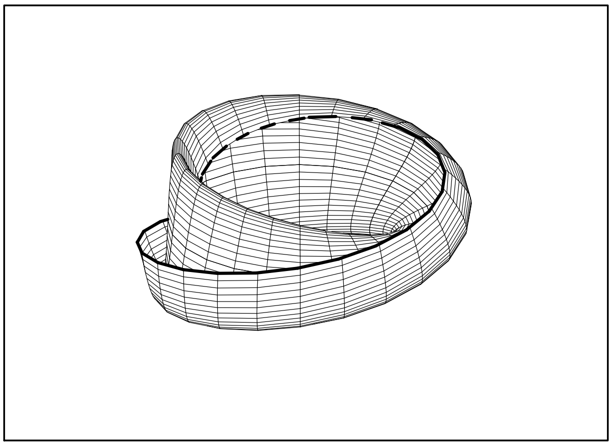

Рис. 6. Бутылка Клейна, разрезанная по краю, $f_1(v) = sin(v), f_2(v) = sin(2v), a = 4, u = -2\pi, ..., 2\pi, v = -\pi, .., \pi$

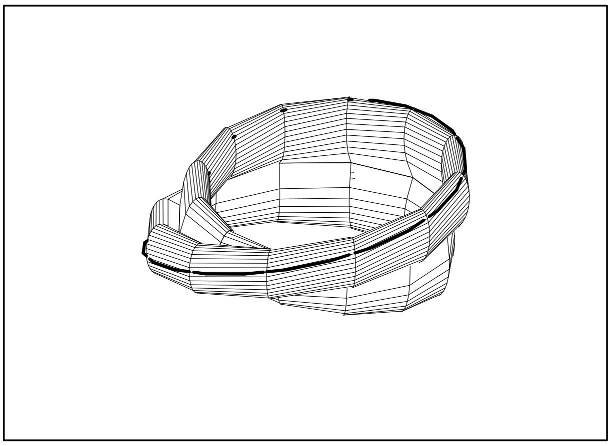

Рис. 7. Бутылка Клейна $f_1(v) = \sqrt{2cos(2v)}cos(v), f_2(v) = \sqrt{2cos(2v)}sin(v), a = 4$и край

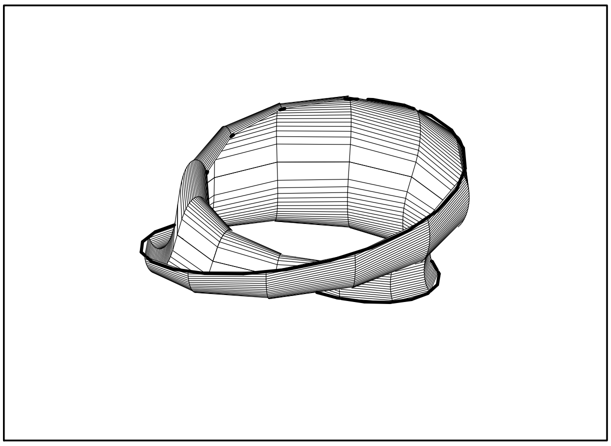

Рис. 8. Бутылка Клейна, разрезанная по краю, $f_1(v) = \sqrt{2cos(2v)}cos(v), f_2(v) = \sqrt{2cos(2v)}sin(v), a = 4, u = -2\pi, ..., 2\pi, v = -\pi, ..., \pi$

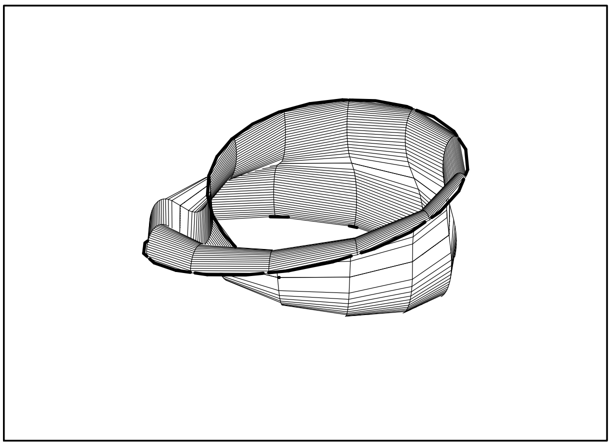

Рис. 9. Бутылка Клейна, разрезанная по краю, $f_1(v) = \sqrt{2cos(2v)}cos(v), f_2(v) = \sqrt{2cos(2v)}sin(v), a = 4, u = -2\pi, ..., 2\pi, v = 0, ..., \pi$

Библиографический список

1. Чешкова М.А. О листе Мебиуса. Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. Вып. 6. 2006.

2. Савелов А.А. Плоские кривые. – М., 1960.