УДК 517.946

А.Г. Петрова

О начально-краевой задаче для одномерного движения эмульсии с условием проницаемости границы для одной из фаз

A.G. Petrova

On the Initial-Boundary Problem for the One-Dimensional Emulsion Motion with the Boundary Permeable for One of the Phases

Для уравнений одномерного движения эмульсии в поле микроускорений и термокапиллярных сил формулируется начально-краевая задача, соответствующая случаю, когда граница области непроницаема для дисперсной фазы. Доказывается локальная по времени разрешимость задачи в гельдеровских классах функций и единственность классического решения на всем промежутке времени его существования.

Ключевые слова: термокапиллярное движение, начально-краевая задача, характеристики.

For the system of governing equations for one-dimensional motion of an emulsion under the action of thermocapillary forcers and microacceleration the initial-boundary value problem, corresponding the case when the boundary of domain is impermeable for the disperse phase and permeable for carrying phase is formulated. The local in time solvability in Holder classes and the uniqueness of a classical solution on the time interval of its existence are proved.

Key words: thermocapillary motion, initial-boundary value problem, characteristics.

Постановка задачи. Исследуется модель термокапиллярного движения эмульсии, предложенная в [1]. Простейшая начально-краевая задача, в которой область течения эмульсии имеет непроницаемые для обеих компонент стенки (назовем эту задачу основной), исследовалась в [2]. Отметим, что подобная начально-краевая задача для газожидкостной смеси в случае отсутствия силы тяжести и независимости коэффициента теплопроводности от концентрации рассмотрена в работе [3].

В случае одномерного движения с плоскими волнами задача движения эмульсии в поле микроускорений и термокапиллярных сил [1] сводится к системе двух уравнений для определения температуры θ и концентрации c:

$$\partial c/\partial t + \partial/\partial x(c(Kg + L\partial\theta/\partial x)(1 - c) + c \cdot f(t)) = 0; \quad (1)$$

$$(\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1 - c))\partial\theta/\partial t +$$
$$+\partial\theta/\partial x((\rho_d\lambda_d - \rho_m\lambda_m)c(1 - c)(Kg + L\partial\theta/\partial x) +$$
$$+ (\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1 - c))f(t)) = \partial/\partial x(k(c)\partial\theta/\partial x), \quad (2)$$

где $g = |g|$, $f = f(t)$.

Скорости восстанавливаются по формулам

$$u = f(t) + (1 - c)(Kg + L\partial\theta/\partial x),$$
$$v = f(t) - c\cdot(Kg + L\partial\theta/\partial x). \quad (3)$$

Пусть граница области является непроницаемой для одной из фаз, например, дисперсной. Тогда, вследствие (3),

$$u(x, t) = f(t) + (1 - c)(L\theta x + Kg) = 0, \; x = 0, \; x = 1. \quad (4)$$

Зададим значения скорости несущей фазы на границе области:

$$v(0, t) = -(L\theta x(0, t) + Kg) = w_0(t),$$
$$v(1, t) = -(L\theta x(1, t) + Kg) = w_1(t).$$

Кроме того, как и в рассмотренной в [2] задаче с непроницаемыми для обеих фаз границами области, следует задавать условие для c_x на левой границе $x = 0$ в случае $Kg \cdot k'(c) > 0$ и на правой границе в случае $Kg \cdot k'(c) < 0$. Заметим, что среднеобъемная скорость уже не равна нулю, а является неизвестной функцией, подлежащей определению из условия равенства нулю скорости дисперсной фазы:

$$f(t) = w_0(t)(1 - c(0, t)). \quad (5)$$

Сформулируем одномерную начально-краевую задачу в терминах функций $c(x, t)$, $\theta(x, t)$, $f(t)$. Она состоит из уравнений (1) и (2),
начальных условий

$$c(x, 0) = c_0(x), \; \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad (6)$$

краевых условий для температуры

$$-L\theta_x(0, t) - Kg = w_0(t), \; -L\theta_x(1, t) - Kg = w_1(t), \quad (7)$$

для концентрации

$$c_x(0, t) = 0 \quad (8)$$

и алгебраического соотношения (5).

Об однозначной разрешимости задачи. Найдем условия, при которых поставленная начально-краевая задача однозначно разрешима в малом по времени, используя схему введения вспомогательных функций, аналогичную той, что применялась ранее в [2].

Здесь удобно ввести вспомогательные функции следующим образом:

$$U(x, t) = L\theta_x,\ R(x, t) = c_x + (U + Kg + w_0(t)) \cdot F(c);$$
$$F(c) = c(1 - c)(\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1 - c))/k(c).$$

Для новых функций получим систему уравнений

$$\partial c/\partial t + (R - (U + Kg + w0) \cdot F(c))(f(t) +$$
$$+(1 - 2c)(U + Kg)) + c(1 - c)\partial U/\partial x = 0;$$
$$\partial R/\partial t + (f(t) + (1 - 2c)(U + Kg) -$$
$$- c(1 - c)k'(c)U/k(c))\partial R/\partial x = \varphi,$$

где φ является суммой произведений функций U, U_x, R, w_0, w'_0, а также некоторых алгебраических функций переменной c, которые ограничены вместе со своими производными;

$$\partial U/\partial = k(c)\rho_d\lambda_d \cdot c + \rho_m\lambda_m(1 - c)\partial^2 U/\partial x^2 -$$
$$- \partial R/\partial x\, k'(c)U/(\rho_d\lambda_d \cdot c + \rho_m\lambda_m(1 - c)) +$$
$$+ \partial U/\partial x\cdot \psi(c, R, U, U_x, k(c), k'(c), 1/k(c),$$
$$1/(\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1 - c), w_0, w'_0) +$$
$$+ \psi_1(c, R, U, U_x, k(c), k'(c), k''(c), 1/k(c),$$
$$1/(\rho_d\lambda_d c + \rho_m\lambda_m(1 - c), w_0, w'_0),$$

где ψ, ψ_1 – алгебраические функции, содержащие лишь суммы и произведения своих аргументов. Система трех дифференциальных уравнений дополняется соотношением (5) для неизвестной функции $f(t)$.

Краевые и начальные условия для новых функций примут вид:

$$U(0, t) = -w_0(t) - Kg,\ U(1, t) = -w_1(t) - Kg,\ R(0, t) = 0;$$
$$U(x, 0) = U_0(t) = L\,\theta_0'(x),\ R(x, 0) =$$
$$= c'_0(x) + (U_0(x) + Kg + w_0(0)) \cdot F(c_0(x));$$
$$f(0) = w_0(0)(1 - c_0(0)).$$

Оператор

$$\Phi(U, R, c, f) = (\tilde{U}, \tilde{R}, \tilde{c}, \tilde{f})$$

определен для $U(x, t)$ из $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}([0, 1] \times [0, T])$, $c(x, t)$ из $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}([0, 1] \times [0, T])$, $R(x, t)$ из $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/}2([0, 1] \times [0, T])$ и $f(t)$ из $H(1 + \alpha/2)([0, 1] \times [0, T])$. При этом функции $\tilde{U}, \tilde{R}, \tilde{c}$ определяются из решения задач, аналогичных рассмотренным в [2], а

$$\tilde{f} = w_0(t)(1 - \tilde{c}(0, t)).$$

Поскольку речь идет о локальной по времени разрешимости, для неотрицательности наклона характеристик на левой границе в уравнении для $R(x, t)$ достаточно потребовать, чтобы начальные данные удовлетворяли условию

$$w_0(0) + (Kg + w_0(0))k'(c_0(0))(1 - c_0(0))/k(c_0(0)) \geq$$
$$\geq \Delta > 0. \qquad (9)$$

Следующая теорема существования доказывается полностью аналогично случаю краевой задачи с нулевыми граничными скоростями. Отличие состоит в наличии четвертой компоненты оператора, являющейся функцией только времени. При этом не вызывает сомнений, что оператор повышает гладкость этой четвертой компоненты и для нее нетрудно получить нужные оценки.

Теорема 1. Предположим, что выполнено условие (1.9). Пусть $\theta_0 \in H^{3+\alpha}([0, 1])$, $c_0 \in H^{2+\alpha}([0, 1])$, $w_i(t) \in H^{1+\alpha/2}([0, T])$ $(i = 0, 1)$ такие, что $0 < 2\delta \leq c_0 \leq 1 - 2\delta$, и выполнены необходимые условия согласования, в частности,

$$w_0(0)(1 - c_0(0)) = w_1(0)(1 - c_0(1)).$$

Тогда существует такое t^*, $0 < t^* < T$, что задача (1.1), (1.2), (1.5–1.8) имеет решение

$$c \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}([0, 1] \times [0, t^*]),$$
$$\theta \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}([0, 1] \times [0, t^*]), f \in H^{1+\alpha/2}([0, t^*]).$$

При этом $\theta_x(x, t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}([0, 1] \times [0, t^*])$, $c \in [\delta, 1 - \delta]$.

Доказательства единственности классического решения проведем для случая, когда скорости несущей фазы на границах области различны во все моменты времени существования классического решения:

$$w_0(t) \neq w_1(t),\ t \in [0, T].$$

Следуя той же схеме, что и в предыдущем пункте, введем

$$Z(t) = \| U(t) \|^2 + \|R(t)\|^2 + \|c(t)\|^2.$$

Для U, R, c, f, где $U = U^{(1)} - U^{(2)}$; $R = R^{(1)} - R^{(2)}$; $c = c^{(1)} - c^{(2)}$, $f(t) = f^{(1)}(t) - f^{(2)}(t)$ имеем систему вида

$$U_t + a_0U_{xx} + a_1U_x + a_2U + a_3c + a_4R_x + a_5R = 0;$$
$$R_t + b_1R_x + b_2R + b_3U_x + b_4U + b_5c + b_6f(t) = 0;$$
$$c_t + d_1c + d_2R + d_3U_x + d_4U + d_5f(t) = 0;$$
$$f(t) = -w_0c(0, t).$$

Все коэффициенты a_i, b_i, d_i непрерывны и ограничены вместе с производными первого порядка, причем $-a_0(x, t) \geq \alpha_0 > 0$.

Для оценки $f^2(t)$ заметим, что в силу условий согласования, выполненных для классического решения, имеет место равенство

$$f(t) = w_0(0, t)c(0, t) = w_1(1, t)c(1, t),$$

из которого следует, что

$$f^2(t) = w_0^2 w_1^2 / \left|w_1^2 - w_0^2\right| \left|\int_0^1 2c(x,t)c_x(x,t)dx\right|. \qquad (10)$$

Слагаемые вида

$$\int_0^1 b_6 f(t)R(x,t)dx$$

оцениваются с использованием неравенства Коши и последней формулы, поскольку значение знаменателя в формуле (10) отделено от нуля в силу условий на граничные функции.

При выбранном способе доказательства единственности коэффициент $b_1(x, t)$ должен быть положительным на правой границе $x = 1$, т.е. должно выполняться неравенство

$$w_1 + (1 - c(1, t))(w_1 + Kg)k'(c(1, t))/k(c(1, t))) > 0. \quad (11)$$

Выполнение неравенства

$$w_0 + (1 - c(0, t))(w + Kg)k'(c(0, t))/k(c(0, t))) > 0 \quad (12)$$

гарантирует нужный наклон характеристик.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Задача (1), (2), (5–8) при различных скоростях несущей фазы на границах области не может иметь двух различных классических решений, удовлетворяющих условиям (11), (12) на промежутке $[0, T]$.

Замечание. Совершенно аналогично рассматривается начально-краевая задача в случае, когда вместо условия непротекания дисперсной фазы задается условие непротекания несущей фазы.

Библиографический список

1. Pukhnachov V.V., Voinov O.V. Thermocapillary motion in an emulsion // In: Proceedings of the Third Conference on Fluid Physics in Microgravity. – Cleveland, Ohio, 1996.

2. Петрова А.Г. О начально-краевой задаче для одномерного движения эмульсии в поле микроускорений и термокапиллярных сил // СибЖим. – 2009. – Т. XII, №2(38).

3. Пухначев В.В. Две обратные задачи механики сплошной среды // Некорректные задачи математической физики и анализа. – Новосибирск, 1984.