УДК 532.546 + 536.425

А.А. Папин, А.А. Коробкин, В.А. Гоман

Движение воды и воздуха в тающем снеге*

A.A. Papin, A.A. Korobkin, V.A. Goman

Movement of Air and Water in Melting Snow

Тающий снег рассматривается как трехфазная среда, состоящая из воды, воздуха, льда. Математическая модель, учитывающая фазовые переходы и движение льда, строится на основе уравнений сохранения энергии и законов Дарси и Лапласа. Проведено аналитическое исследование задачи.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, автомодельные решения, тепломассоперенос.

Melting snow is considered as a three-phase medium consisting of water, air and ice. The mathematical model takes into account phase transitions and movement of ice. The model is based on the equations of energy conservation and Darcy's law and the law of Laplace. Analytical study of the problem was conducted.

Key words: two-phase filtration, self-similar solutions, heat and mass transfer.

1. Постановка задачи. Снег рассматривается как пористая среда, твердый каркас которой составляют частички льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды, воздуха и льда. Тающий снег является трехфазной средой, состоящей из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$). Для описания процесса используются уравнения сохранения массы для каждой фазы [1]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{3} I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} = 0, \qquad (1)$$

система уравнений двухфазной фильтрации Маскета-Леверетта для воды и воздуха [1]

$$\vec{v}_i - \vec{v}_3 = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2,$$

$$p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad \sum_{i=1}^{2} s_i = 1, \qquad (2)$$

уравнение сохранения энергии для тающего снега (в пренебрежении сублимацией и обменом массами между водой и воздухом)[2]

$$(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 c_i \alpha_i)\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 c_i \vec{v}_i)\nabla\theta =$$

$$= div(\lambda_c \nabla\theta) + \nu \frac{\partial \rho_3^0 \alpha_3}{\partial t}, \quad (3)$$

а также уравнение движения льда [3]

$$\alpha_3 \rho_3^0 (\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} + (\vec{u}_3 \cdot \nabla)\vec{u}_3) = -g\rho_3^0 \alpha_3 - \nabla p_3 +$$

$$+ \mu_3 \triangle \vec{u}_3 - \frac{2}{k} \sum_j \frac{\mu_3 \mu_j \beta_{j3}}{\mu_3 \frac{\alpha_j}{\beta_j} + \mu_j \frac{\alpha_3}{\beta_3}} (\vec{u}_3 - \vec{u}_j). \quad (4)$$

Для сжатия ледяных кристаллов в снеге принимается реологическое соотношение [3, с. 319]

$$-\frac{\partial u_3}{\partial z} = \lambda^* \frac{1 - \alpha_3}{\alpha_3} p_3,$$

где λ^* – коэффициент пропорциональности.

В системе уравнений (1)–(4) приняты следующие обозначения: $\vec{u}_i$ – скорость i-й фазы; ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} – интенсивность перехода массы из j-й в i-ю составляющую в единице объема в единицу времени; $\vec{v}_i = m s_i \vec{u}_i$ – скорости фильтрации воды и воздуха; m – пористость снега; s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = m s_1$, $\alpha_2 = m s_2$, $\alpha_3 = 1 - m$), $\vec{v}_3 = (1 - m)\vec{u}_3$; K_0 – тензор фильтрации; k_{0i} – фазовые проницаемости ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$, $k_{0i}\big|_{s_i=0} = 0$); μ_i – динамическая вязкость; p_i – давления фаз; p_c – капиллярное давление, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta$, $i = 1, 2, 3$,

*Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» (проект №2.2.2.4/4278), а также при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственные контракты №14.740.11.0355, №14.740.11.0878).

$c_i = const > 0$ – теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; $\nu = const > 0$ – удельная теплота плавления льда; λ_c – теплопроводность снега ($\lambda_c = a_c + b_c\rho_c^2$, $\rho_c = \sum_{i=1}^{3}\rho_i^0\alpha_i$, $a_c = const > 0$, $b_c = const > 0$).

Следует отметить, что в работе [4] задача о движении воды в тающем снеге рассматривалась при постоянной температуре, без фазовых переходов и учета движения льда. В [5] лед предполагался неподвижным ($\vec{u}_3 = 0$), а температура была специальным образом связана с насыщенностью воды (отдельно уравнение для температуры не вводилось). В настоящей заметке учитывается движение льда, что является обобщением соответствующего результата из [6].

2. Простое решение. Введем конечные значения температуры θ^-, θ_1 и θ^+. Пусть $0 < \theta^- < \theta_1 < \theta^+$. Считаем, что для всех $\theta \in (0,\infty)$ имеют место соотношения

$$\alpha_3(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \geq \theta^+, \\ 1 - m^- - m_1(\theta - \theta_1), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta^+, \\ 1 - m^-, & \theta \leq \theta_1. \end{cases}$$

Здесь $m^- = m(\theta^-) \in (0,1)$, $m_1 = (1 - m^-)/(\theta^+ - \theta_1)$ – заданные параметры. Кроме того, предполагается, что пористая среда однородна ($K_0 = const > 0$); $\rho_i^0 = const > 0$, в системе координат xyz вектор $\vec{g} = (0,0,-g)$; входящие в систему (1)–(4) функции зависят от z, t. Вместо уравнения (4) рассмотрим модельное уравнение следующего вида:

$$Au_{3zz} - k_{03}u_3 = 0,$$

где $A = const > 0$ и $k_{03} = const > 0$.

После этих предположений приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_1\rho_1^0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_1^0 v_1) = I_{31}; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_2\rho_2^0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_2^0 v_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_2^0 v_2) = 0; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-m)\rho_3^0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_3^0 v_3) = I_{13}; \qquad (7)$$

$$v_i - v_3 = -K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial z} - \rho_i^0 g), \quad i = 1,2,$$
$$p_2 - p_1 = p_c(s_1,\theta), \quad s_1 + s_2 = 1; \qquad (8)$$

$$A\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - k_{03}u_3 = 0; \qquad (9)$$

$$(\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0 c_i\alpha_i)\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0 c_i v_i)\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_c\frac{\partial\theta}{\partial z}) - \nu\rho_3^0\frac{\partial m}{\partial t}. \qquad (10)$$

Для системы (5)–(10) рассмотрим задачу: снег занимает область $(-\infty, ct)$, $t > 0$. При $z = -\infty$ вода отсутствует ($s_1 = 0$, $v_1 = 0$, $u_3 = 0$), воздух и лёд неподвижны ($v_2 = 0$, $u_3 = 0$), и задана температура $\theta = \theta^-$ (ниже температуры плавления льда), при $z = ct$ известны скорости воды ($v_1 = v_1^+$), воздуха ($v_2 = v_2^+$), давление воздуха ($p_2 = p^+$), задано движение льда ($u_3 = u_3^+$), и задана температура $\theta = \theta^+$ (равная температуре плавления льда). Полагая, что все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = z - ct$ (c – неизвестная постоянная), из (5)–(10) получаем

$$-c\frac{d}{d\xi}(ms_1\rho_1^0) + \frac{d}{d\xi}(\rho_1^0 v_1) = I_{31}; \qquad (11)$$

$$-c\frac{d}{d\xi}(ms_2\rho_2^0) + \frac{d}{d\xi}(\rho_2^0 v_2) = 0; \qquad (12)$$

$$-c\frac{d}{d\xi}(\rho_3^0(1-m)) + \frac{d}{d\xi}(\rho_3^0 v_3) = I_{13}; \qquad (13)$$

$$v_i - v_3 = -K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\frac{dp_i}{d\xi} - \rho_i^0 g),$$
$$p_2 - p_1 = p_c(s_1,\theta), \quad s_1 + s_2 = 1; \qquad (14)$$

$$A\frac{d^2u_3}{d\xi^2} - k_{03}u_3 = 0; \qquad (15)$$

$$(\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0 c_i(v_i - c\alpha_i))\frac{d\theta}{d\xi} - c\nu\rho_3^0\frac{dm}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\lambda_c\frac{d\theta}{d\xi}); \qquad (16)$$

$$s_1\big|_{\xi\to-\infty} = 0, \quad \theta\big|_{\xi\to-\infty} = \theta^-, \quad u_3\big|_{\xi\to-\infty} = 0,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\big|_{\xi\to-\infty} = 0, \quad v_i\big|_{\xi\to-\infty} = 0; \qquad (17)$$

$$p_2(0) = p^+, \quad \theta(0) = \theta^+,$$
$$u_3(0) = u_3^+ \quad v_i(0) = v_i^+, \quad i = 1,2,3. \qquad (18)$$

Искомыми являются функции $s_1(\xi)$, $v_i(\xi)$, $p_i(\xi)$, $\theta(\xi)$ и постоянная c. Решение задачи (11)–(18) строится следующим образом. Интегрируя уравнения (11)–(13) и (16), находим постоянную c и получаем представления для скоростей фильтрации и температуры. Используя эти представления и (14), приходим к уравнению для насыщенности $s_1(\xi)$. Исследование разрешимости задачи для $s_1(\xi)$ завершает построение решения задачи (11)–(18).

Положим

$$s_1 \equiv s, \quad s_2 \equiv 1 - s; \quad p_c(s,\theta) = p_0(\theta)\gamma(s),$$
$$\frac{d\gamma}{ds} \equiv \gamma' < 0.$$

При $s \in (-\infty, +\infty)$ фазовые проницаемости k_{0i} определим следующим образом:

$$k_{0i} = \begin{cases} 0, & s_i \leq 0, \\ \overline{k}_{0i}(s_i,\theta)s_i^{n_i}, & 0 \leq s_i \leq 1, \\ \overline{k}_{0i}(1,\theta), & s_i \geq 1. \end{cases}$$

Здесь постоянные $n_i > 1$. Предполагается, что функция $a(s) = -\gamma' k_{01} k_{02} > 0$ при $s \in (0,1)$ и $a(s) = 0$ при $s \le 0$ и $s \ge 1$.

Введем также следующие обозначения:

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & s_i \le 0, \\ s_i^{n_i}, & 0 \le s_i \le 1, \\ 1, & s_i \ge 1, \end{cases}$$

$$a_0 = -\varphi_1 \varphi_2 \gamma', \quad \overline{g} = g(\rho_1^0 - \rho_2^0),$$

$$A = \overline{\mu}_1 \varphi_2 + \overline{\mu}_2 \varphi_1, \quad B = \overline{\mu}_1 \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} \varphi_2 + \overline{\mu}_2 \varphi_1,$$

$$p_0' = \frac{dp_0}{d\theta}, \quad \overline{\mu}_i = \frac{\mu_i}{K_0 \overline{k}_{0i}}, \quad i = 1, 2.$$

3. Определение скоростей фильтрации. Из (11)–(13) следует, что

$$\rho_1^0 v_1 + \rho_3^0 (1-m) u_3 - \\ - c(m s_1 \rho_1^0 + (1-m)\rho_3^0) = A_1 = const, \quad (19)$$

$$\rho_2^0 v_2 - c m s_2 \rho_2^0 = A_2 = const. \quad (20)$$

Из (19) и (20) с учетом условий при $z = -\infty$: вода отсутствует ($s_1 = 0, s_2 = 1, v_1 = 0$), воздух и лёд неподвижны ($v_2 = 0,\ u_3 = 0$) $\theta = \theta^-$ выводим

$$A_1 = -c\rho_3^0 (1 - m^-), \quad A_2 = -c m^- \rho_2^0.$$

При $z = 0$ имеем: $v_1 = v_1^+, v_2 = v_2^+, \theta = \theta^+, u_3 = u_3^+$

$$m = \begin{cases} 1, & \theta \ge \theta^+, \\ m^- + m_1(\theta - \theta_1), & \theta_1 \le \theta \le \theta^+, \\ m^-, & \theta \le \theta_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$A_1 = \rho_1^0 v_1^+ - c m^+ s^+ \rho_1^0,$$
$$A_2 = \rho_2^0 v_2^+ - c m^+ (1 - s^+) \rho_2^0.$$

Исключая A_1 и A_2, получим систему для неизвестных параметров $c, s^+ (s_1 \equiv s, s_2 \equiv 1 - s)$:

$$v_1^+ = c\left(s^+ - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}(1 - m^-)\right), \quad v_2^+ = c(1 - s^+ - m^-),$$

где $m(\theta^+) = 1$, $\rho_3^0 < \rho_1^0$.

Решение этой системы имеет вид:

(a) $s^+ = 1 - m^-$, $c = \frac{v_1^+}{(1-m^-)(1-\rho_3^0/\rho_1^0)} < 0$ при $v_2^+ = 0$, $v_1^+ < 0$;

(b) $s^+ = (1-m^-)\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}$, $c = \frac{v_2^+}{(1-m^-)(1-\rho_3^0/\rho_1^0)} < 0$ при $v_1^+ = 0$, $v_2^+ < 0$;

(c) $s^+(\lambda) = \frac{1-m^-}{1+\lambda}(\lambda + \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0})$, $c = \frac{(1+\lambda)v_2^+}{(1-m^-)(1-\rho_3^0/\rho_1^0)} < 0$ при $v_1^+ < 0$, $v_2^+ < 0$, где $\lambda \equiv v_1^+/v_2^+ > 0$.

Условия (a)–(c) будем называть условием I.

Возвращаясь к (19), (20), получим представления для скоростей фильтрации:

$$v_1 = cms + c\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}(m^- - m) - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} v_3,$$
$$v_2 = cm(1-s) - cm^-. \quad (21)$$

4. Представления для температуры. Из (21) имеем

$$G_1 \equiv \sum_{i=1}^{3} c_i \rho_i^0 (v_i - c\alpha_i) = \\ = c\rho_3^0(1-m)(c_1 - c_3) + A_1 c_1 + A_2 c_2 + c_3 \rho_3^0 (1-m) u_3,$$

В дальнейшем используется предположение о малом влиянии движения льда на изменение температуры. Тогда для G принимается зависимость

$$G_1 = c\rho_3^0(1-m)(c_1 - c_3) + A_1 c_1 + A_2 c_2,$$

поэтому из (16) следует

$$c\rho_3^0(c_1 - c_3)\int_0^\theta (1 - m(\zeta))d\zeta + (A_1 c_1 + \\ + A_2 c_2)\theta - \nu \rho_3^0 cm - \lambda_c \frac{d\theta}{d\xi} = const.$$

Из условия (17), получаем

$$\lambda_c \frac{d\theta}{d\xi} = c\rho_3^0(c_1 - c_3)M(\theta) + (A_1 c_1 + \\ + A_2 c_2)(\theta - \theta^-) - \nu \rho_3^0 c(m - m^-) \equiv f_1(\theta), \quad (22)$$

где $M(\theta)$ равна $(1-m^-)(\frac{1}{2}\theta^+ - \theta^- + \frac{1}{2}\theta_1)$, при $\theta \ge \theta^+$; $(1-m^-)(\theta-\theta^-) - \frac{m_1}{2}(\theta - \theta_1)^2$, при $\theta_1 \le \theta \le \theta^+$; $(1-m^-)(\theta - \theta^-)$, при $\theta \le \theta_1$.

Для решения уравнения (22) справедлива оценка $\theta(\xi) \ge \theta^-$ для всех $\xi \in (-\infty, 0)$ [6]. Поэтому при $\theta \in [\theta^-, \infty)$ функции $m(\theta)$, $M(\theta)$ можно считать заданными, причем

$$f_1(\theta) = c\rho_3^0(c_1 - c_3)M_1 + (A_1 c_1 + \\ + A_2 c_2)(\theta - \theta^-) - \nu c \rho_3^0 (1 - m^-), \quad \theta(\xi) \ge \theta^+;$$

$$f_1(\theta) = c\rho_3^0(c_1 - c_3)[(1-m^-)(\theta - \theta^-) - \\ - \frac{1}{2}m_1(\theta - \theta_1)^2] + (A_1 c_1 + A_2 c_2)(\theta - \theta^-) - \\ - \nu c \rho_3^0 m_1 (\theta - \theta_1), \quad \theta_1 \le \theta(\xi) \le \theta^+;$$

$$f_1(\theta) = (c\rho_3^0(c_1 - c_3)(1-m^-) + A_1 c_1 + A_2 c_2)(\theta - \theta^-), \\ \theta^- \le \theta(\xi) \le \theta_1.$$

Эта функция непрерывна в точках $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta^+$ и $f_1(\theta^-) = 0$. Положим

$$\overline{a} = c\rho_3^0(c_1 - c_3)M_1 - \nu c \rho_3^0 (1-m^-) - \theta^-(A_1 c_1 + A_2 c_2),$$

$$\overline{b} = A_1 c_1 + A_2 c_2 = -c(\rho_3^0(1-m^-)c_1 + \rho_2^0 m^- c_2),$$

$$b_1 = -\frac{1}{2} c m_1 \rho_3^0 (c_1 - c_3),$$

$$d_1 = c\rho_3^0(c_1 - c_3)(1 - m^-) + A_1 c_1 + A_2 c_2 - \nu c \rho_3^0 m_1,$$

$$a_1 = (\theta_1 - \theta^-)(c\rho_3^0(c_1 - c_3)(1 - m^-) + A_1c_1 + A_2c_2),$$
$$b_2 = c\rho_3^0(c_1 - c_3)(1 - m^-) + A_1c_1 + A_2c_2.$$

Тогда

$$f_1(\theta) = \begin{cases} \overline{a} + \overline{b}\theta, \quad \theta \geq \theta^+, \\ (\theta - \theta_1)^2(b_1 + \frac{d_1}{(\theta-\theta_1)}) + a_1, \; \theta_1 \leq \theta \leq \theta^+, \\ b_2(\theta - \theta^-), \quad \theta^- \leq \theta \leq \theta_1. \end{cases}$$

Пусть данные задачи удовлетворяют условиям

$$0 < \rho_2^0 < \rho_3^0 < \rho_1^0 < \infty, \quad 0 < c_3 < c_1 < c_2 < \infty.$$

Из определения A_1, A_2, c, m_1 следует

$$b_2 = -c\rho_3^0 c_1((1 - m^-)c_3/c_1 + m^- c_3\rho_2^0/c_1\rho_1^0) > 0,$$
$$a_1 = b_2(\theta_1 - \theta^-) > 0, \quad b_1 > 0, \quad \overline{b} > 0,$$
$$d_1 = b_2 - \nu c\rho_3^0 m_1 > b_2 > 0,$$

поэтому при $\theta \in [\theta^-, \infty)$ функция $f_1(\theta)$ неотрицательна, монотонно возрастает и, в частности, $\theta(\xi) \in [\theta^-, \theta^+]$.

Решение задачи (17), (18), (22) можно представить в виде

$$I(\theta) \equiv \int\limits_{\theta}^{\theta^+} \frac{d\zeta}{f_1(\zeta)} = \int\limits_{\xi}^{0} \frac{d\zeta}{\lambda_c(\zeta)} \equiv \psi(\lambda_c(\xi)),$$
$$\theta(\xi) = I^{-1}(\psi(\lambda_c(\xi))). \qquad (23)$$

При $\theta \in [\theta_1, \theta^+]$ из (23) получаем

$$I(\theta) = \int\limits_{\theta}^{\theta^+} \frac{d\zeta}{b_1(\zeta - \theta_1)^2 + d_1(\zeta - \theta_1) + a_1} = \psi(\lambda_c(\xi)).$$

Отметим, что условие

$$\frac{\nu}{c_1} \geq (1 - \frac{c_3}{c_1})(\theta_1 - \theta^-) \qquad (24)$$

является достаточным для приведения функции f_1 на отрезке $\theta \in [\theta_1, \theta^+]$ к виду $b_1[(\theta - \theta_1 + \alpha)^2 - \beta^2]$, $\alpha = d_1/2b_1$, $\beta^2 = (d_1^2 - 4a_1b_1)/4b_1^2$. Из [6] следует, что $\nu/c_1 > 60K$, $c_3/c_1 < 1/2$ и для реальных процессов $\theta_1 - \theta^- < 2\nu/c_1$, т.е. выполняется условие (24), с учетом которого имеем

$$I(\theta) = \frac{1}{b_1}\int\limits_{\theta}^{\theta^+} \frac{d\zeta}{(\zeta - \theta_1 + \alpha)^2 - \beta^2} = \psi(\lambda_c(\xi)),$$
$$\theta \in [\theta_1, \theta^+]. \qquad (25)$$

Вследствие монотонности $\theta(\xi)$ существует такая точка ξ_1, что $\theta(\xi_1) = \theta_1$. Из (25) вытекает условие для определения ξ_1: $I(\theta_1) = \psi(\lambda_c(\xi_1))$.

При $\theta \in [\theta^-, \theta_1]$ из (23) получаем

$$\theta(\xi) = \theta^- + (\theta_1 - \theta^-)\exp(-b_2 \int\limits_{\xi}^{\xi_1} \frac{d\zeta}{\lambda_c(\zeta)}). \qquad (26)$$

Таким образом, при заданной функции $\lambda_c(s, \theta)$ представление (23) и его частные случаи (24), (25) определяют температуру для всех $\xi \in (-\infty, 0)$.

5. Определение насыщенности воды. Из (14) и (21) имеем

$$v_1 - v_3 = cms + c\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}(m^- - m) -$$
$$-\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}(1-m)u_3 - (1-m)u_3 = -K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}(\frac{dp_1}{d\xi} - \rho_1^0 g),$$

$$v_2 - v_3 = cm(1 - s) - cm^- - (1 - m)u_3 =$$
$$= -K_0\frac{k_{02}}{\mu_2}(\frac{dp_2}{d\xi} - \rho_2^0 g).$$

Исключая из этих соотношений p_1 и p_2 с помощью второго уравнения в (14), получаем

$$-k_{01}k_{02}K_0\frac{dp_c}{d\xi} = -\mu_1k_{02}v_1 + \mu_2k_{01}v_2 + \mu_1k_{02}v_3 -$$
$$-\mu_2k_{01}v_3 + K_0k_{01}k_{02}g(\rho_1^0 - \rho_2^0).$$

Используя введенные ранее обозначения, уравнение для насыщенности представим в виде

$$a_0(s)\frac{ds}{d\xi} = \frac{\varphi_1\varphi_2}{p_0}\left(\overline{g} + p_0'\gamma\frac{f_1}{\lambda_c}\right) +$$
$$+ \frac{1}{p_0}|c|msA - \frac{1}{p_0}|c|(m - m^-)B -$$
$$- \frac{(1-m)|u_3^+|e^{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}\xi}}{p_0}\left(\overline{\mu}_1\varphi_2 - \overline{\mu}_2\varphi_1 + \overline{\mu}_1\varphi_2\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right),$$
$$s(0) = s^+. \qquad (27)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, $a_\varepsilon(s) \equiv a_0(s) + \varepsilon > 0$. При $\xi < 0$ вместо (27) рассмотрим задачу

$$a_\varepsilon(s^\varepsilon)\frac{ds^\varepsilon}{d\xi} = f_2(s^\varepsilon, \theta^\varepsilon), \quad \frac{d\theta^\varepsilon}{d\xi} = \frac{f_1(\theta^\varepsilon)}{\lambda_c(s^\varepsilon, \theta^\varepsilon)},$$
$$s^\varepsilon(0) = s^+, \quad \theta^\varepsilon(0) = \theta^+. \qquad (28)$$

Функция $s(\xi)$ непрерывна на отрезке $[\xi_1, 0]$, и, следовательно, существует значение $s^1 \equiv s(\xi_1) \in [0, 1]$. Поэтому можно рассмотреть задачу

$$a_0(s)\frac{ds}{d\xi} = f_2(s, \theta), \quad \xi < \xi_1, \quad s(\xi_1) = s^1,$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{f_1(\theta)}{\lambda_c(s, \theta)};, \quad \theta(\xi_1) = \theta_1, \qquad (29)$$

Лемма 1. Если $s^\varepsilon(\xi)$ – решение задачи (28) и $s^+ \in [0, 1]$, то $0 \leqslant s^\varepsilon(\xi) \leqslant 1$.

Доказательство. В (28) представим функцию $P_0 = p_0'\gamma\dfrac{f_1(\theta^\varepsilon)}{\lambda_c(s^\varepsilon, \theta^\varepsilon)}$ в виде $P_0 = (P_0)^+ - (P_0)^-$, где

$(P_0)^+ = \max(0, P_0)$, $(P_0)^- = \min(0, P_0)$, после чего уравнение примет вид

$$a_\varepsilon(s^\varepsilon)\frac{ds^\varepsilon}{d\xi} = \frac{\varphi_1\varphi_2}{p_0}\overline{g} + \frac{\varphi_1\varphi_2}{p_0}(P_0)^+ - \frac{\varphi_1\varphi_2}{p_0}(P_0)^- + \\ + \frac{1}{p_0}|c|ms^\varepsilon A - \frac{1}{p_0}|c|(m-m^-)B + \\ - \frac{\overline{\mu}_1\varphi_2}{p_0}(1-\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0})(1-m)|u_3^+|e^{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}\xi} + \\ + \frac{\overline{\mu}_2\varphi_1}{p_0}(1-m)|u_3^+|e^{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}\xi},$$

$$s^\varepsilon(0) = s^+, \quad \theta^\varepsilon(0) = \theta^+. \quad (30)$$

Из (30) получаем

$$\frac{ds^\varepsilon}{d\xi} - Rs^\varepsilon = -Q,$$

$$R = \frac{1}{p_0 a_\varepsilon}(|c|mA + \overline{g}\frac{\varphi_1(s^\varepsilon)}{s^\varepsilon}\varphi_2 + \frac{\varphi_1(s^\varepsilon)}{s^\varepsilon}\varphi_2(P_0)^+ + \\ + \frac{\varphi_1(s^\varepsilon)}{s^\varepsilon}\overline{\mu}_2(1-m)|u_3^+|e^{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}\xi})$$

$$Q = \frac{1}{p_0 a_\varepsilon}(|c|(m-m^-)B + \varphi_1\varphi_1(P_0)^- + \\ + \overline{\mu}_1\varphi_2(1-\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0})(1-m)|u_3^+|e^{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}\xi}).$$

Из того, что $A > 0$, $B > 0$, следует, что $R > 0$, $Q \geq 0$. Поэтому

$$s^\varepsilon(\xi) = (s^+ + \int\limits_\xi^0 Q(x)e^{-\int\limits_0^x R(\zeta)d\zeta}dx)e^{\int\limits_0^\xi R(\zeta)d\zeta} \geq 0.$$

Для функции $(1 - s^\varepsilon(\xi))$ из (27) находим

$$\frac{d(1-s^\varepsilon)}{d\xi} - R_1(1-s^\varepsilon) = -Q_1,$$

где

$$R_1 = \frac{1}{p_0 a_\varepsilon}(|c|mA + \frac{\varphi_2(s^\varepsilon)}{1-s^\varepsilon}\varphi_1(P_0)^- + \\ + \frac{\overline{\mu}_1\varphi_2(s^\varepsilon)}{1-s^\varepsilon}(1-\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0})(1-m)|u_3^+|e^{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}\xi}) > 0,$$

$$Q_1 = \frac{1}{p_0 a_\varepsilon}(|c|(m(A-B) + m^-B) + \overline{g}\varphi_1\varphi_2 + \\ + \varphi_1\varphi_2(P_0)^+ + \overline{\mu}_2\varphi_1(1-m)|u_3^+|e^{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}\xi}) > 0.$$

Тогда

$$1 - s^\varepsilon(\xi) = (1 - s^+ + \\ + \int\limits_\xi^0 Q_1(x)e^{-\int\limits_0^x R_1(\zeta)d\zeta}dx)e^{\int\limits_0^\xi R_1(\zeta)d\zeta} \geq 0,$$

что и завершает доказательство.

Лемма 1 позволяет доказать существование решения задачи (28) на любом конечном интервале, в том числе на $[\xi_1, 0]$. Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ проводится как и в работе [6].

Лемма 2. Пусть $s(\xi)$ – решение задачи (28), и выполнено условие $\frac{\varphi_1(s)}{s}\gamma(s) \leq \nu_0$, $s \in [0,1]$. Тогда существует точка $\xi_* \leq \xi_1$ такая, что $s(\xi) \equiv 0$ при всех $\xi \leq \xi_*$. Если $s^1 = 0$ и дополнительно $\frac{\varphi_1(s)}{s}\gamma(s)\big|_{s=0} = 0$, то $\xi_* = \xi_1$.

Доказательство. Из (28) следует

$$\frac{du}{d\xi} + D_1(s,\theta) = D_2(s,\theta), \quad u = \int\limits_0^s \frac{a_0(\zeta)}{\zeta}d\zeta. \quad (31)$$

Здесь

$$D_1(s,\theta) = \frac{\varphi_1(s)}{s}\varphi_2\gamma(p_0')^- \frac{f_1}{p_0\lambda_c} + \\ + \frac{(1-m)|u_3^+|e^{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}\xi}}{p_0}\left(\overline{\mu}_1\varphi_2 - \overline{\mu}_2\varphi_1 + \overline{\mu}_1\varphi_2\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right), \\ f_1 = b_2(\theta - \theta^-) \geq 0,$$

$$D_2(s,\theta) = \frac{1}{p_0}(|c|m^-A + \overline{g}\frac{\varphi_1}{s}\varphi_2 + \frac{\varphi_1(s)}{s}\varphi_2\gamma(p_0')^+ \frac{f_1}{\lambda_c}).$$

Согласно [6, с. 90]

$$D_2(s,\theta) \geq |c|m^-A\min_{s,\theta}\frac{\overline{\mu}_1}{p_0}\min(1,\alpha,\pi_\mu) \equiv D_2^0 > 0,$$

где $\alpha = \min\limits_{s,\theta}\frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\mu}_2} > 0$, $\theta \in [\theta^-, \theta^+]$, $s \in [0,1]$.

Используя представление (26) для $\theta(\xi) \in [\theta^-, \theta_1]$, получаем

$$|D_1| \leq D_1^0 e^{-\frac{1}{\lambda_c^+}(\xi_1 - \xi)} + |u_3^+|e^{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}\xi},$$

$$\int\limits_\xi^{\xi_1}|D_1(\zeta)|d\zeta \leq \frac{1}{\lambda_c^+}D_1^0 + \frac{|u_3^+|}{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}},$$

где

$$D_1^0 = \frac{1}{\lambda_c^-}b_2(\theta_1 - \theta^-)\max_{s,\theta}(\frac{1}{p_0}\frac{\varphi_1(s)}{s}\varphi_2\gamma(p_0')^-) \leq \\ \leq \frac{1}{\lambda_c^-}b_2(\theta_1 - \theta^-)\nu_0^3,$$

$$\lambda_c^- = a_c + b_c(\rho_2^0 m^-)^2,$$

$$\lambda_c^+ = a_c + b_c(\rho_1^0 m^- + \rho_3^0(1-m^-))^2.$$

Интегрируя уравнение (29) по ξ от произвольного значения ξ до ξ_1, получаем

$$u(s(\xi_1)) + \frac{1}{\lambda_c^+}D_1^0 + \frac{|u_3^+|}{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}} \geq D_2^0(\xi_1 - \xi) + u(s(\xi)). \tag{32}$$

Здесь $u(s(\xi_1)) = 0$ при $s(\xi_1) = 0$ и $u(s(\xi_1)) \leq \int\limits_0^1 \frac{a_0(\zeta)}{\zeta}d\zeta$ при $s(\xi_1) > 0$. Последний интеграл сходится в силу предположений леммы 2, поэтому $u(s(\xi)) \leq 0$ при всех $\xi \leq \xi_*$, где ξ_* удовлетворяет условию

$$D_2^0\xi_* = D_2^0\xi_1 - \frac{1}{\lambda_c^+}D_1^0 - \frac{|u_3^+|}{\sqrt{\frac{k_{03}}{A}}} - \int\limits_0^1 \frac{a_0(\zeta)}{\zeta}d\zeta.$$

Тогда из определения $u(s)$ следует, что $u(s(\xi)) \equiv 0$ при $\xi \leq \xi_*$.

Пусть $s(\xi_1) = 0$, $\frac{\varphi_1(s)}{s}\gamma(s)\big|_{s=0} = 0$ (в этом случае $s(\xi) = 0$ удовлетворяет первому уравнению в (28)). Если $s(\xi)$ – решение (28), то в силу леммы 1 функции $u(\xi), s(\xi)$ непрерывны по ξ. Рассмотрим малую окрестность точки ξ_1, предположив, что в точке $\xi = \xi_1 - \delta$, $\delta > 0$ имеет место неравенство $s(\xi) > 0$. При $\xi \in [\xi_1 - \delta, \xi_1]$ из уравнения (29) получаем

$$\frac{du}{d\xi} \geq D_2^0 - \min_{s,\theta}((p_0')^- \frac{f_1}{p_0\lambda_c})\frac{\varphi_1(s)}{s}\varphi_2\gamma \geq \frac{1}{2}D_2^0$$

за счет соответствующего выбора δ. Тогда $0 = u(s(\xi_1)) \geq \frac{1}{2}D_2^0\delta + u(s(\xi))$, т. е. $u(s(\xi)) < 0$ и, следовательно, $s(\xi) = 0$. Повторяя процесс, на k-м шаге получаем $s(\xi_k) = 0$, $\xi_k = \xi_1 - k\delta$, $k > 1$. При достижении значения k, при котором выполняется неравенство $D_1^0 \leq \lambda_c D_2^0 k\delta$, используя (31), получим $s(\xi_k) = 0$, $\xi \in (-\infty, \xi_1]$. Лемма доказана.

Таким образом, решение построено на всем интервале $(-\infty, 0]$.

Библиографический список

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. — М., 1971.

2. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. — М., 1983.

3. Трофимова Е.Б. Математическая модель снежного покрова как многофазной среды // Труды IV Всесоюзного гидрологического съезда. — М., 1976. — Т. 6.

4. Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold Regions Science and Technology. — 2000, N: 31.

5. Gray J.M.N.T. Water movement in wet snow // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. — 1996.

6. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. — Барнаул, 2009.