УДК 514.765

*Д.Н. Оскорбин*

# О спектре оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

*D.N. Oskorbin*

# On One Dimensional Curvature Eigenvalues of Left Invariant Riemannian Metrics on Three Dimensional Lie Groups

В статье устанавливаются критерии существования трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой с заданными главными значениями оператора одномерной кривизны.

***Ключевые слова:*** алгебры Ли и группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, оператор одномерной кривизны.

Necessary and sufficient conditions for three real numbers to be the principal values of one dimensional curvature operator on three dimensional Lie groups with left invariant Riemannian metric is given in this paper.

***Key words:*** Lie algebras and Lie groups, left invariant Riemannian metrics, one dimensional curvature operator.

Классификация трехмерных римановых многообразий с заданными собственными значениями операторов кривизн рассматривается в [1], где установлены критерии существования трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой с наперед заданными собственными значениями тензора Риччи. При исследовании римановых многообразий важную роль играет также тензор одномерной кривизны $A_{ij}$. Он представляет собой целую часть от деления риманова тензора кривизны на метрический тензор относительно произведения Кулкарни-Номидзу [2] и определяется формулой

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)}\right), \tag{1}$$

где $R_{ij}$ – тензор Риччи; $R$ – скалярная кривизна метрики $ds^2$; $g_{ij}$ – метрический тензор.

Пусть $G$ — трехмерная унимодулярная группа Ли с алгеброй Ли $LG$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на $LG$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли $G$, то в $LG$ существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что (см., например: [3])

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \lambda_3 e_3, \\ [e_2, e_3] &= \lambda_1 e_1, \\ [e_3, e_1] &= \lambda_2 e_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\lambda_i \in R$ — структурные константы алгебры Ли $LG$, $i = 1, 2, 3$.

Пусть теперь $G$ — трехмерная неунимодулярная группа Ли, $LG$ — алгебра Ли группы $G$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на $LG$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли $G$. Тогда в $LG$ существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что (см., например: [3])

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \alpha e_2 + \beta e_3, \\ [e_1, e_3] &= \gamma e_2 + \delta e_3, \\ [e_2, e_3] &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha + \delta \neq 0$ и $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — структурные константы алгебры Ли $LG$.

**Замечание.** *В случае $\alpha + \delta = 2$ инвариант*

$$D = \alpha\delta - \gamma\beta \tag{4}$$

*определяет алгебру $LG$ с точностью до изоморфизма* (см. подробнее: [3]).

В ортонормированном базисе (2) одномерная кривизна диагонализируема, и ее главные значения равны [4]:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{8}(5\lambda_1^2 - 3(\lambda_2 - \lambda_3)^2 - 2\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_2)); \\ a_2 &= \tfrac{1}{8}(5\lambda_2^2 - 3(\lambda_3 - \lambda_1)^2 - 2\lambda_2(\lambda_2 + \lambda_3)); \\ a_3 &= \tfrac{1}{8}(5\lambda_3^2 - 3(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)). \end{aligned} \tag{5}$$

**Теорема 1.** *Пусть $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ — вещественные числа. Унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и главными значениями оператора одномерной кривизны $a_1$, $a_2$, $a_3$ существует в том и только в том случае, если либо $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, либо двое из чисел $a_1$,$a_2$,$a_3$ равны между собой и равны $-(a_1+a_2+a_3)$, либо $a_1 \leq a_2 < -(a_1+a_2+a_3) < a_3$, либо $-(a_1 + a_2 + a_3) < a_1 \leq a_2 \leq a_3$.*

**Доказательство.** Пусть

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i, i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим систему соотношений (5) и заметим, что

$$\begin{aligned} 2a_1 + a_2 + a_3 &= 2\mu_2\mu_3; \\ a_1 + 2a_2 + a_3 &= 2\mu_1\mu_3; \\ a_1 + a_2 + 2a_3 &= 2\mu_1\mu_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Полученные соотношения разрешимы относительно $\mu_i, i = 1, 2, 3$ и, следовательно, относительно $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, тогда и только тогда, когда либо все выражения в левых частях равенств равны 0, что означает $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, либо выражения в левых частях двух равенств из трех равны 0, то есть двое из чисел $a_1$,$a_2$,$a_3$ равны между собой и равны $-(a_1 + a_2 + a_3)$. Если же левые части рассматриваемых равенств отличны от нуля, то из равенств

$$2\mu_i^2 = \frac{P}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_i)^2}, i = 1, 2, 3,$$

$$P = (2a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + 2a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + 2a_3),$$

вытекает, что условием разрешимости системы (6) является положительность выражения

$$(2a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + 2a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + 2a_3).$$

Учитывая предположение $a_1 \le a_2 \le a_3$, получаем: $a_1 \le a_2 < -(a_1 + a_2 + a_3) < a_3$, либо $-(a_1 + a_2 + a_3) < a_1 \le a_2 \le a_3$.

**Замечание.** Равенство главных значений

$$a_1 = a_2 = a_3$$

в теореме 1 реализуется в двух случаях:

а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, риманова метрика на $G$ имеет постоянную секционную кривизну, равную $\mu_1^2 \ge 0$.

Условие равенства нулю главных значений одномерной кривизны означает, как следует из формулы (1), равенство нулю главных значений кривизны Риччи. Тогда из теоремы Д.Б. Алексеевского-Б.Н. Кимельфельда (см., например: [2]), вытекает, что многообразие $G$ — плоское, а универсальная накрывающая группы $G$ изометрична евклидову пространству $R^3$;

б) с точностью до перенумерации $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$; $\mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 = \lambda_1 > 0$, алгебра имеет тип $e(2)$, ассоцированная группа $G$ есть $E(2)$.

Пусть теперь $G$ — трехмерная неунимодулярная группа Ли. Произведем замену переменных согласно работе [3]:

$$\begin{gathered} \alpha = 1 + \xi, \beta = (1 + \xi)\eta, \\ \gamma = -(1 - \xi)\eta, \delta = 1 - \xi, \end{gathered}$$

где $\xi \ge 0$, $\eta \ge 0$, в базисе (3) имеем:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\xi^2 - \tfrac{3}{2}\eta^2\xi^2 < 0; \\ a_2 &= -\tfrac{1}{2} - 2\xi - 2\eta^2\xi + \tfrac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \tfrac{1}{2}\xi^2; \\ a_3 &= -\tfrac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{2}\eta^2\xi^2. \end{aligned} \tag{7}$$

**Теорема 2.** *Неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и главными значениями оператора одномерной кривизны $a_1$, $a_2$, $a_3$ существует тогда и только тогда, когда (с точностью до перенумерации) для некоторой константы $\lambda$ выполнены условия:*

$$\lambda^2(2a_1 + 3a_2 + 3a_3) = -4, \tag{8}$$

$$\lambda^4(a_3 - a_2)^2 \ge 16(\lambda^2(a_3 + a_2) + 1) > 0, \tag{9}$$

*либо $a_1 = a_2 = a_3 < 0$.*

**Доказательство.** Перенумеруем числа $a_1$, $a_2$, $a_3$ так, чтобы $a_1 \le a_2 \le a_3$. Разрешимость соотношений (7) относительно $\xi, \eta$ эквивалентна разрешимости соотношений:

$$\lambda^2(a_1 + 3a_2 + 3a_3) = -4, \tag{10}$$

$$\lambda^2(a_2 + a_3) = -1 + \xi^2(1 + \eta^2), \tag{11}$$

$$\lambda^2(a_3 - a_2) = 4\xi(1 + \eta^2). \tag{12}$$

Из последнего равенства выражаем $\xi$, подстановка в предыдущее равенство дает условия разрешимости системы соотношений относительно $\xi \ge 0, \eta \ge 0$:

$$\begin{gathered} \lambda^2(a_1 + 3a_2 + 3a_3) = -4, \\ \lambda^2(a_2 + a_3) + 1 > 0, \\ \tfrac{(\lambda^2(a_3 - a_2))^2}{16(\lambda^2(a_2 + a_3) + 1)} \ge 1. \end{gathered}$$

Отсюда следует требуемое.

Используя инвариант $D$, результаты работ [3], [5], получаем, что, вообще говоря, один и тот же набор главных значений оператора одномерной кривизны $a_1$,$a_2$,$a_3$ могут иметь неизоморфные группы.

**Теорема 3.** *Пусть дана односвязная трехмерная неунимодулярная группа Ли $G$. Группа $G$ обладает левоинвариантной римановой метрикой, главные значения оператора одномерной кривизны на которой равны $-0,5$, тогда и только тогда, когда либо $G$ — гиперболическое пространство $H^3$, либо инвариант $D$ группы Ли $G$ больше 1.*

**Доказательство.** Пусть $a_1 = a_2 = a_3 = -0,5$. Из соотношения (6) получаем, что $\xi = 0$. Тогда, следуя [5], получаем, что $G$ изоморфна и изометрична полупрямому произведению $R^2 \otimes_A R$ с канонической метрикой, при этом возможны два случая:

1. $\eta = 0$, т.е. матрица $A = I$, тогда $G$ изоморфна $H^3$;

2. $\eta \neq 0$, тогда $D > 1$. Обратно, пусть $G$ и $H^3$ не изоморфны и $D > 1$. Рассмотрим полупрямое произведение $G_1 = R^2 \otimes_A R$, где матрица $A$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1+\xi & -(1-\xi)\eta \\ (1+\xi)\eta & 1-\xi \end{pmatrix}$$

и зададим левоинвариантную метрику $<,>$ на $G$, полагая $\xi = 0, \eta = \sqrt{D-1}$. Тогда $det(A) = D$, т.е. группы $G, G_1$ изоморфны и главные значения оператора одномерной кривизны на $G_1$ равны $-0,5$.

## Библиографический список


1. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. — 1996. — № 1.

2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М., 1990. — Т. 1, 2.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — V. 21.

4. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Proceeding of the $7^{th}$ International Conference. Brno, August 10–14, 1998. – Masaryk University, Brno, Czech Republic, 1999.

5. Meeks W., Perez J. Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups [Electronic resource]. URL: http://www.ugr.es/ jperez/.