

УДК 539.3

Ю.В. Немировский, А.П. Янковский

Численное моделирование нелинейно-наследственного поведения пространственно-армированных композитных сред

Yu.V. Nemirovsky, A.P. Yankovsky

Numerical Simulation of Behaviour of the Three-Dimensional Reinforcement Composite Materials with Nonlinear Memory

Разработана численно-аналитическая методика моделирования нелинейно-наследственного поведения пространственно-армированных композитов, позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать такую композицию, как нелинейно-упругая с начальным напряженным состоянием.

Ключевые слова: армирование пространственное, структурная теория, наследственность нелинейная, ползучесть.

The numerical-analytical technique of modeling the behavior of the three-dimensional reinforcement composites with nonlinear memory is developed. It allows us to consider such composition as a nonlinear-elastic with an initial stress during the discrete moments.

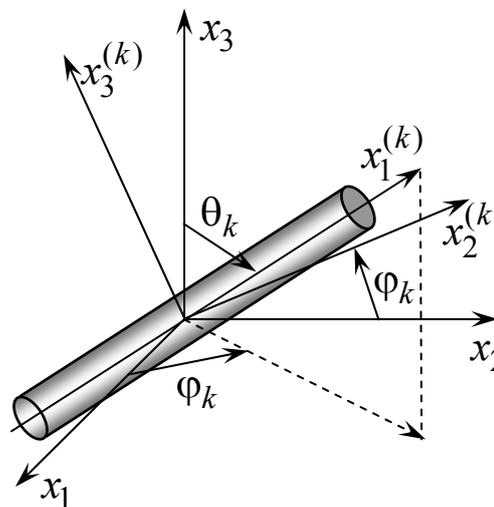
Key words: three-dimensional reinforcement, structural theory, material with nonlinear memory, creep.

В самолето- и ракетостроении в настоящее время особое внимание к себе привлекают композиционные материалы с пространственным расположением арматуры [1; и др.]. Так как полимерные материалы, как правило, используемые при создании таких композитов, обладают ярко выраженными наследственными свойствами, то актуальной является проблема моделирования механического поведения пространственно-армированных композитных сред из нелинейно-наследственных материалов.

В глобальной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим гибридный композит, армированный в произвольных направлениях N семействами волокон с интенсивностями ω_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Направление армирования k -м семейством волокон задается направляющими косинусами $l_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3$); если направление армирования задано с помощью двух углов сферической системы координат (см. рис.) – полярного расстояния θ_k и долготы φ_k , то

$$l_1^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_2^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \\ l_3^{(k)} = \cos \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Обобщая на пространственный случай армирования модель Ю.В. Немировского с одномерным напряженным состоянием в волокнах, впервые предложенную в [2] для случая плоского армирования, получим следующие выражения для средних напряжений в композиции:



Локальная система координат $x_i^{(k)}$, связанная с волокном k -го семейства

$$\sigma_{ij} = (1 - \delta \Omega) \sigma_{ij}^m + \sum_{k=1}^N [\sigma_k - (1 - \delta) \sigma_k^m] \omega_k l_i^{(k)} l_j^{(k)}, \\ i, j = 1, 2, 3, \quad \Omega = \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad (1)$$

где δ – функция переключения, позволяющая выбрать вариант модели [3, с. 242] (жесткий при $\delta = 0$ и мягкий при $\delta = 1$); σ_{ij}^m – напряжения в связующей

матрице; σ_k – продольное напряжение в арматуре k -го семейства; σ_k^m – одномерное напряженное состояние в фиктивных волокнах из материала связующей матрицы, направленных по траекториям армирования k -го семейства [3].

Так как в волокнах k -го семейства реализуется одномерное напряженное состояние, то при нелинейно-наследственном поведении фазовых материалов можем записать определяющие соотношения в виде [4; 5]

$$\begin{aligned} & g_k(\varepsilon_k) \varepsilon_k = \\ & = \sigma_k(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \exp(-(t-\tau)/\theta_l^{(k)}) \sigma_k(\tau) d\tau, \\ & g_m(\varepsilon_k) \varepsilon_k = \\ & = \sigma_k^m(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^L M_l \exp(-(t-\tau)/\theta_l^m) \sigma_k^m(\tau) d\tau \\ & \quad (1 \leq k \leq N), \\ & g(\varepsilon_*, \varepsilon_0)(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0) = \\ & = s_{ij}^m(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^{L_0} K_l^s \exp(-(t-\tau)/\theta_l^s) s_{ij}^m(\tau) d\tau \\ & \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ & g_0(\varepsilon_*, \varepsilon_0) \varepsilon_0 = \\ & = \sigma_0^m(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \exp(-(t-\tau)/\theta_l^0) \sigma_0^m(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad \sigma_0^m = \frac{1}{3}(\sigma_{11}^m + \sigma_{22}^m + \sigma_{33}^m), \\ \varepsilon_k &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} l_i^{(k)} l_j^{(k)}, \\ g(\varepsilon_*, \varepsilon_0) &= \frac{2\sigma_*^m(\varepsilon_*, \varepsilon_0)}{3\varepsilon_*}, \quad s_{ij}^m = \sigma_{ij}^m - \delta_{ij} \sigma_0^m \\ & \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq k \leq N), \\ \varepsilon_* &= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)}; \end{aligned} \quad (3)$$

t – время; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; ε_* – интенсивность деформаций; ε_k – продольная деформация в арматуре k -го семейства; σ_*^m – интенсивность напряжений в материале матрицы, связанная известным соотношением с ε_* , ε_0 ; $g_0(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ – известная зависимость объемного модуля от ε_* , ε_0 (функции $g_0(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$, $g(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ или $\sigma_*^m(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ известны из диаграмм мгновенного деформирования материала связующего; зависимость этих функций от обоих аргументов позволяет учитывать свойство разносопротивляемости материала связующей матрицы); $g_k(\varepsilon)$, $g_m(\varepsilon)$ – заданные функции, характеризующие диаграмму мгновенного деформирования материалов арматуры k -го семейства ($\sigma = g_k(\varepsilon)\varepsilon$) и связую-

щей матрицы ($\sigma = g_m(\varepsilon)\varepsilon$) и известные из опытов на растяжение–сжатие; δ_{ij} – символ Кронекера; $A_l^{(k)}$, M_l , K_l^0 , K_l^s – известные из экспериментов постоянные, характеризующие ядра ползучести; $\theta_l^{(k)}$, θ_l^m , θ_l^0 , θ_l^s – известные из экспериментов константы фазовых материалов, имеющие смысл характерного времени ползучести.

Представление в (2) разностных ядер ползучести в виде линейных комбинаций экспоненциальных функций (с числом слагаемых L_k, L, L_0, L_s) позволяет аппроксимировать ядра более сложной структуры, в том числе и некоторые виды слабосингулярных ядер [6, с. 192].

Определяющими соотношениями (2), (3) описывается механическое поведение не только полимеров, но и некоторых металлов на стадии их активного нагружения [4, с. 217].

Так как даже простейшие задачи неустановившейся ползучести для изотропных элементов конструкций требуют привлечения численных методов интегрирования по времени [7], то тем более это касается сложно армированных композитных сред. Поэтому в настоящем исследовании разработаем численно-аналитическую модель нелинейно-наследственного поведения пространственно-армированного композита. С этой целью дискретизируем задачу по времени t , т.е. будем рассматривать ее решения в моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots, t_0$), Предполагаем, что в момент времени t_n (и во все предыдущие моменты) решение задачи уже известно. Построим определяющие соотношения (2) для момента времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где τ_n – шаг по времени (возможно, переменный).

Введем в рассмотрение дискретные по времени функции:

$$\begin{aligned} \sigma_k^n &\equiv \sigma_k(t_n), \quad \sigma_k^m \equiv \sigma_k^m(t_n), \quad s_{ij}^m \equiv s_{ij}^m(t_n), \\ \sigma_0^n &\equiv \sigma_0^m(t_n), \quad \varepsilon_{ij}^n \equiv \varepsilon_{ij}(t_n), \\ \varepsilon_k^n &\equiv \varepsilon_k(t_n), \quad S_l^{(k)} \equiv \int_0^{t_n} \sigma_k(\tau) \exp(\tau/\theta_l^{(k)}) d\tau \\ & \quad (1 \leq l \leq L_k), \\ S_l^{m(k)} &\equiv \int_0^{t_n} \sigma_k^m(\tau) \exp(\tau/\theta_l^m) d\tau \quad (1 \leq l \leq L), \\ S_{ij}^{(l)} &\equiv \int_0^{t_n} s_{ij}^m(\tau) \exp(\tau/\theta_l^s) d\tau \\ & \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq l \leq L_s), \\ S_l^0 &\equiv \int_0^{t_n} \sigma_0^m(\tau) \exp(\tau/\theta_l^0) d\tau \quad (1 \leq l \leq L_0), \end{aligned} \quad (5)$$

которые, по предположению, в момент времени t_n уже известны.

Записывая соотношения (2) для момента времени (4) с учетом обозначений типа (5) и вычисляя интегралы, входящие в (2), на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ по формуле трапеций, а также используя вырожденность экспоненциальных разностных ядер [6, с. 192], окончательно получим

$$\begin{aligned} g_k \left(\varepsilon_k \right) \varepsilon_k &= \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \right) \sigma_k^{n+1} + \\ &+ \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^{(k)}} \right) S_l^{n(k)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^{(k)}} \right) \sigma_k^n \right\}, \\ g_m \left(\varepsilon_k \right) \varepsilon_k &= \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_m} M_l \right) \sigma_k^{n+1} + \\ &+ \sum_{l=1}^{L_m} M_l \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^m} \right) S_l^{m(k)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^m} \right) \sigma_k^m \right\}, \\ g \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \right) &= \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \right) s_{ij}^{n+1} + \\ &+ \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^s} \right) S_{ij}^{(l)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^s} \right) s_{ij}^m \right\}, \\ g_0 \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \varepsilon_0 &= \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \right) \sigma_0^{n+1} + \\ &+ \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^0} \right) S_l^0 + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^0} \right) \sigma_0^m \right\}. \end{aligned}$$

Эти соотношения можно записать так

$$\begin{aligned} g_k \left(\varepsilon_k \right) \varepsilon_k &= \sigma_k^{n+1} - \sigma_k^n, \quad g_m \left(\varepsilon_k \right) \varepsilon_k = \sigma_k^{m+1} - \sigma_k^m \\ &(1 \leq k \leq K), \\ g \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \right) &= s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{m0} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ g_0 \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \varepsilon_0 &= \sigma_0^{n+1} - \sigma_0^{m0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} g_k \left(\varepsilon_k \right) &\equiv \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \right)^{-1} g_k \left(\varepsilon_k \right), \\ g_m \left(\varepsilon_k \right) &\equiv \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_m} M_l \right)^{-1} g_m \left(\varepsilon_k \right), \\ g \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) &\equiv \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \right)^{-1} g \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right), \\ g_0 \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) &\equiv \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \right)^{-1} g_0 \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right); \\ \sigma_k^n &\equiv - \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^{(k)}} \right) S_l^{n(k)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^{(k)}} \right) \sigma_k^n \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k^{m0} &\equiv - \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_k} M_l \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{L_k} M_l \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^m} \right) S_l^{m(k)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^m} \right) \sigma_k^m \right\}, \\ s_{ij}^n &\equiv - \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^s} \right) S_{ij}^{(l)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^s} \right) s_{ij}^m \right\}, \\ \sigma_0^n &\equiv - \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^0} \right) S_l^0 + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^0} \right) \sigma_0^m \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Умножим последнее равенство (6) на δ_{ij} и результат сложим с третьим равенством, тогда с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n+1} &= g \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \right) + \\ &+ \delta_{ij} g_0 \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \varepsilon_0 + \sigma_{ij}^{m0} \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\sigma_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{n+1} + \delta_{ij} \sigma_0^{n+1}, \quad \sigma_{ij}^{m0} = s_{ij}^{m0} + \delta_{ij} \sigma_0^{m0}. \quad (10)$$

Функции пространственных переменных σ_k^0 , σ_k^{m0} , s_{ij}^{m0} , определенные по формулам (8), (10), можно трактовать как начальные напряжения в соответствующих фазовых материалах в момент времени t_{n+1} , которые, согласно (5), (8), в этот момент времени известны в каждой точке x_i композитного тела.

Таким образом, соотношения (9) и два первых равенства (6) в момент времени t_{n+1} можно трактовать как определяющие соотношения для фазовых материалов, поведение которых характеризуется зависимостями нелинейно-упругого тела с начальным напряженным состоянием.

Подставим напряжения s_{ij}^{n+1} , σ_k^{n+1} , σ_{ij}^{m0} , определенные в (6), (9), в равенства (1) при $t = t_{n+1}$, тогда с учетом обозначений типа (5) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n+1} &= \\ &= (1 - \delta\Omega) \left[g \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \right) + \delta_{ij} g_0 \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \varepsilon_0 \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^N \omega_k I_i^{(k)} I_j^{(k)} \left[g_k \left(\varepsilon_k \right) \varepsilon_k - (1 - \delta) g_m \left(\varepsilon_k \right) \varepsilon_k \right] + \sigma_{ij}^0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$i, j = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{ij}^0 \equiv (1 - \delta\Omega) \sigma_{ij}^{m0} + \sum_{k=1}^K \omega_k I_i^{(k)} I_j^{(k)} \left(\sigma_k^0 - (1 - \delta) \sigma_k^{m0} \right). \quad (12)$$

Деформации ε_0^{n+1} , ε_*^{n+1} , ε_k^{n+1} , ε_{ij}^{n+1} в (11) связаны зависимостями типа (3).

Равенства (11) с учетом (3) можно рассматривать как определяющие соотношения для исследуемого композита в момент времени t_{n+1} . Напряжения σ_{ij}^0 при этом можно трактовать как начальные напряжения в композиции, известные в момент времени t_{n+1} (см. (12), (10), (8)). В общем случае соотношения (11) с учетом (3) являются нелинейными относительно деформаций ε_{ij}^{n+1} .

Линеаризуем соотношения (11), предполагая, что функции $g(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$, $g_0(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$, $g_k(\varepsilon_k)$, $g_m(\varepsilon_k)$ (см. (2), (3)) удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода итераций [5, с. 199], аналогичного методу переменных параметров упругости. Если на некоторой m -й итерации известны m -е приближения $\varepsilon_{ij}^{[m]}$ деформаций в момент времени t_{n+1} , то согласно

(3) будут известны m -е приближения функций $\varepsilon_0^{[m]}$, $\varepsilon_*^{[m]}$, $\varepsilon_k^{[m]}$. Для следующего же $(m+1)$ -го приближения деформаций $\varepsilon_{ij}^{[m+1]}$ и напряжений $\sigma_{ij}^{[m+1]}$ будут справедливы линейные соотношения (см. (11), (3)):

$$\sigma_{ij}^{[m+1]} = (1 - \delta\Omega) \left[g \left(\varepsilon_*^{[m]}, \varepsilon_0^{[m]} \right) \left(\varepsilon_{ij}^{[m+1]} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^{[m+1]} \right) + \frac{\delta_{ij}}{3} g_0 \left(\varepsilon_*^{[m]}, \varepsilon_0^{[m]} \right) \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^{[m+1]} \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \omega_k \left[g_k \left(\varepsilon_k^{[m]} \right) - (1 - \delta) g_m \left(\varepsilon_k^{[m]} \right) \right] \times \times \sum_{l=1}^3 \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{lp}^{[m+1]} I_l^{(k)} I_p^{(k)} I_i^{(k)} I_j^{(k)} + \sigma_{ij}^0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где «начальные» напряжения σ_{ij}^0 изменяются в зависимости от номера n (от момента времени t_n) и не зависят от номера итерации m .

При решении соответствующей нелинейно-вязкоупругой краевой задачи для пространственно-армированного композита в квазистатической постановке осредненные напряжения в композиции σ_{ij}^{n+1} или их приближения $\sigma_{ij}^{[m+1]}$ (см. (11), (13)) в момент времени t_{n+1} должны удовлетворять общеизвестным уравнениям равновесия и статическим граничным условиям, а деформации ε_{ij}^{n+1} (или их приближения $\varepsilon_{ij}^{[m+1]}$) должны быть связаны с перемещениями u_i^{n+1} ($i, j = 1, 2, 3$) дифференциальными соотношениями Коши [4]. В случае же решения задачи динамического деформирования рассматриваемого композита из полимерных материалов необходимо соответствующим образом дискретизировать по времени уравнения движения. По мнению авторов, наиболее целесообразный метод такой дискретизации изложен в [8], поэтому не будем останавливаться на обсуждении этого вопроса более подробно. Отметим лишь, что все неизвестные функции при этом, как обычно и предполагается в наследственных задачах механики, принадлежат классу Хевисайда [4, с. 33].

Библиографический список

1. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: учеб. пособие / под ред. А.А. Берлина. – СПб., 2009.
2. Немировский Ю.В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя // ПМТФ. – 1969. – №6.
3. Немировский Ю.В. Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязкоупругого материала // Динамика сплошной среды / Ин-т гидродинамики СО РАН СССР. – 1970. – Вып. 4.
4. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М., 1977.
5. Ильюшин А.А. Теория термовязкоупругости // Труды / сост. Е.А. Ильюшина, В.Г. Тунгускова. – М., 2007. – Т. 3.
6. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород, 2002.
7. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М., 1966.
8. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Интегрирование динамических задач механики деформируемого твердого тела обобщенными методами Рунге-Кутты // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1, №1.