

А.Е. Медведев

Уравнение состояния крови при течении в мелких сосудах

А.Е. Medvedev

The Equation of the State of a Blood Flow in Small Vessels

Предложена двухфазная модель крови для описания течения как в крупных, так и в мелких кровеносных сосудах. На основе данной модели дано объяснение давно известным особенностям (эффектам) течения крови в сосудах: зависимости показателя гематокрита от диаметра сосуда; существованию бесклеточного слоя плазмы вблизи стенки сосуда; тупому (по сравнению с профилем течения Пуазейля) профилю скорости крови; зависимости вязкости крови от диаметра сосуда. Получены зависимости скорости и вязкости крови от диаметра кровеносного сосуда.

Ключевые слова: показатель гематокрита, течение Пуазейля, математическая модель, двухфазное течение, относительная вязкость.

При течении крови в мелких сосудах (менее 200 мкм) наблюдается зависимость реологических свойств крови от размера сосуда – кажущаяся вязкость крови падает с уменьшением диаметра кровеносного сосуда. Для описания течения крови в мелких сосудах необходимо создание уравнения состояния, зависящее (кроме остальных параметров) от диаметра сосуда.

Особенности течения крови. Кровь представляет собой суспензию, состоящую из плазмы (вязкая несжимаемая жидкость) и эритроцитов (двояковогнутые деформируемые диски размером $8 \times 2,5$ мкм). Одной из основных характеристик крови является показатель гематокрита H – объемное содержание эритроцитов. Течение крови в сосудах отличается особенностями (эффектами): I) зависимость показателя гематокрита от диаметра сосуда (эффект Фареуса); II) существование пристеночного слоя плазмы без эритроцитов; III) тупой (по сравнению с профилем течения Пуазейля) профиль скорости крови; IV) вязкость крови падает с уменьшением размера сосуда (эффект Фареуса-Линдквиста).

Модель течения крови. Рассмотрим кровь как суспензию, состоящую из двух несжимаемых фаз. Первая фаза – плазма крови, вторая – эритроциты. Относительная вязкость суспензии зависит от концентрации и, согласно формуле Эйнштейна, имеет вид

$$\eta = \mu/\mu_1 = 1 + n(m_2)m_2, \quad (1)$$

The paper presents the two-phase model to describe blood flow in large and in small blood vessels. Based on this model the study give an explanation for long-known features (effects) of blood flow in the vessels: dependence of the hematocrit (packed cell volume) on the diameter of the vessel, existence of cell-free plasma layer near the vessel wall, obtuse (as compared with the profile of Poiseuille flow) velocity profile of a blood; dependence of the blood viscosity on the diameter of the vessel. The researcher determines dependences of the blood rate and viscosity on the diameter of a blood vessel.

Key words: hematocrit, Poiseuille flow, mathematical model, two-phase flow, relative viscosity.

где $m_2 \equiv H$ – объемная доля эритроцитов (локальный показатель гематокрита); μ, μ_1 – динамическая вязкость крови и плазмы соответственно. Для крови зависимость n от m_2 зададим в виде $n(m_2) = 3 + 5m_2$.

Известно [2], что эритроциты неравномерно распределены по сечению сосуда – объемная доля эритроцитов m_2 монотонно убывает от максимума m_{20} на оси сосуда до нуля на стенке. Решение уравнений, аналогичных уравнениям Пуазейля, но с переменной вязкостью, дает формулы для скорости крови

$$w(\xi) = w_{\max} [M(1) - M(\xi)], \quad M(\xi) = \int_0^\xi 2\xi/\eta(\xi) d\xi, \quad (2)$$

где $\xi = r/r_0$ – безразмерный радиус, w_{\max} – максимальная скорость течения Пуазейля.

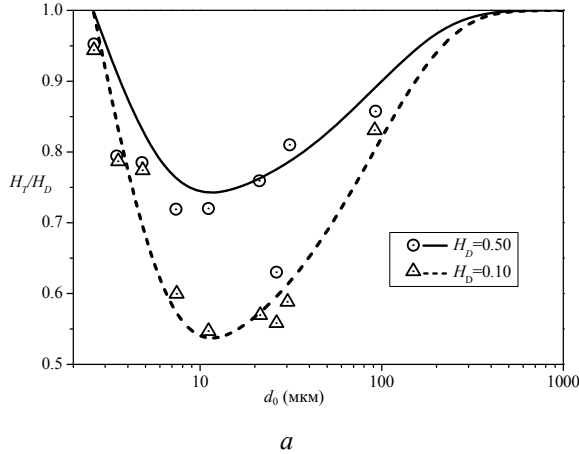
Скорость крови $w(\xi)$ имеет более тупой профиль, по сравнению с параболическим решением Пуазейля $w_p(\xi) = w_{\max} (1 - \xi^2)$. Это связано с тем, что концентрация эритроцитов m_2 и относительная вязкость η имеют максимум на оси сосуда и минимум – на стенке. В силу этого $w(\xi) < w_p(\xi)$ по всему сечению сосуда, лишь на стенке – $w(1) = w_p(1) = 0$.

Для простоты примем, что распределение объемной доли эритроцитов m_2 по сечению сосуда задается ступенчатой функцией:

$$m_2(\xi) = \begin{cases} m_{20} & \text{при } 0 \leq \xi \leq 1-h, \\ 0 & \text{при } 1-h < \xi \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

где h – относительная толщина пристеночного слоя плазмы.

Эффект образования пристеночного слоя связан с поперечной миграцией эритроцитов при движении по сосуду. Для нахождения уравнения состояния крови были взяты экспериментальные данные по зависимости показателя гематокрита от диаметра сосуда (рис. 1а).



Задача нахождения уравнения состояния крови сводится к решению алгебраического уравнения на толщину пристеночного слоя $h = h(d_0)$ и объемной доли эритроцитов $m_{20} = m_{20}(d_0)$:

$$1 - [1 - 1/\eta(m_{20})]x^2 = 2\Phi(d_0, H_D) \{1 - [1 - 1/2\eta(m_{20})]x\}, \quad (4)$$

где $x = (1-h)^2 = H_D \Phi(d_0, H_D)/m_{20}$; $\Phi(d_0, H_D)$ – функция, аппроксимирующая экспериментальные данные на рисунке 1а.

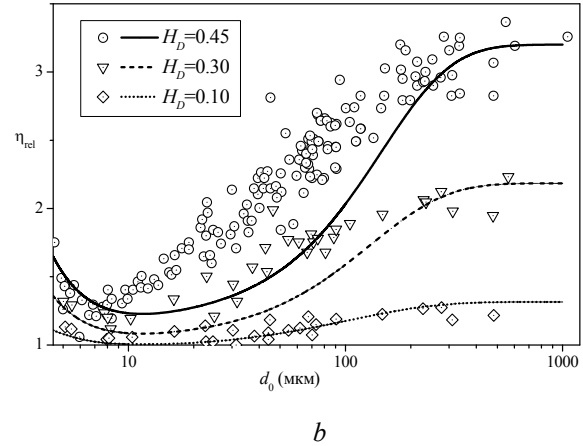


Рис. 1. Зависимость отношения показателей гематокрита H_T/H_D (а) и относительной наблюдаемой вязкости η_{rel} (б) от диаметра сосуда d_0 . Значки – экспериментальные данные [1]. Линии (а) – аппроксимация экспериментальных точек [1], линии (б) – результаты расчета вязкости η_{rel} по формуле (5)

После определения $h(d_0)$ и $m_{20}(d_0)$ находим зависимость относительной вязкости η и скорости w крови от диаметра кровеносного сосуда d_0 .

Относительная наблюдаемая вязкость (вязкость, наблюдаемая в капиллярных вискозиметрах) определяется как отношение пуазейлевского расхода воды Q_p к расходу крови Q :

$$\eta_{rel} = Q_p / Q. \quad (5)$$

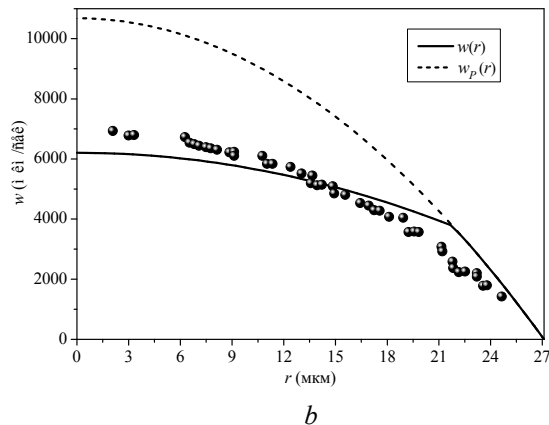
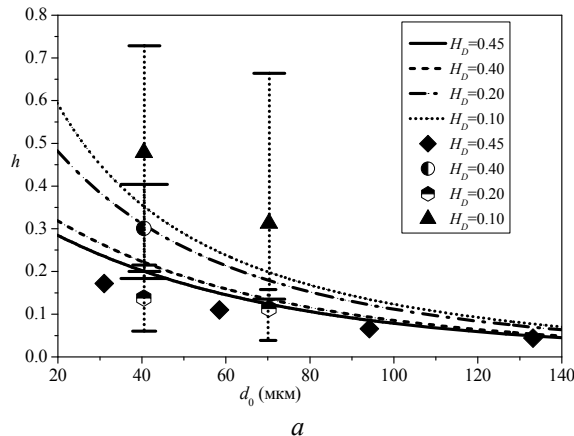


Рис. 2. а – зависимость относительной толщины пристеночного слоя плазмы h от диаметра сосуда d_0 . Точки – эксперименты из [2]. Сплошные линии – расчет по предложенной модели; б – сравнение экспериментального (точки из [3]) и расчетного по формуле (2) (сплошная красная кривая) распределения скорости крови в стеклянной трубке диаметром 54,2 мкм ($H_D = 0,335$, градиент давления – $dp/dz = 38090$ Па/м³). Пунктирная кривая – скорость течения Пуазейля

Выводы. Получено уравнение состояние крови – зависимость вязкости крови, показателя гематокрита и толщины пристеночного слоя от диаметра

сосуда. Данные зависимости имеют единый вид для сосудов всех размеров и переходят в формулы течения Пуазейля при больших диаметрах сосудов.

Библиографический список

1. Pries A.R., Secomb T.W. Blood flow in microvascular networks // Handbook of Physiology: Microcirculation / ed. R.F. Tuma, W.N. Dura, K. Ley. – Academ Press, 2008.

2. Sharan M., Popel A.S. A two-phase model for flow of blood in narrow tubes with increased effective viscosity near the wall // Biorheology. – 2001. – Vol. 38.

3. Long D.S., Smith M.L., Pries A.R. et al. Microviscometry reveals reduced blood viscosity and altered shear rate and shear stress profiles in microvessels after hemodilution // Proc. Natl. – Acad. Sci. USA. 2004. – Vol. 101, №27.