УДК 539.3

А.Д. Матвеев

Построение погрешностей для перемещений дискретных моделей двумерных композитов регулярной структуры с применением функций верхних и нижних оценок

A.D. Matveev

Error Constructing to Move the Discrete Models of Elastic Composites Using Upper and Lower Bound Functions

Предложена процедура построения относительных погрешностей для максимальных узловых перемещений конечно-элементных моделей упругих композитов регулярной структуры, испытывающих плоское напряженное состояние. Для пространств: энергетического, Соболева, L_1 и L_2 – предложены модифицированные нормы, которые содержат размерные коэффициенты, равные единице.

Ключевые слова: относительная погрешность, функции верхних и нижних оценок, функция погрешностей, композиты, плоская задача теории упругости, метод конечных элементов, модифицированные нормы, размерные коэффициенты.

Numerical procedure to construct the relative errors for maximum movement of finite element models of elastic composites, experiencing the plane stress has been suggested. The standarts containing dimention factors for the known spaces (energetic, Sobolev, L_1 and L_2) have been proposed.

Key words: relative error, functions of the upper and lower bounds, error function, composites, plane elasticity problem, finite elements method, modified standarts, dimention factors.

Введение. В настоящее время при расчете упругих конструкций широко используют численные методы (например, метод конечных элементов (МКЭ) [1, 2] в форме метода Ритца). Процедура численного метода сводится к построению приближенного решения краевой задачи упругости. Для практики важно знать относительную погрешность приближенного решения в каждой точке тела. Построение относительных погрешностей для перемещений конечно-элементных моделей упругих тел связано с большими трудностями. Существующие оценки, построенные для норм, малоэффективны для практики. Это связано с тем, что с помощью этих оценок трудно определить погрешность приближенного решения в заданной точке тела. Кроме того, не всякая норма интересна для практики. Рассмотрим некоторые нормы с точки зрения их эффективности применения в расчетах. Пусть построена последовательность приближенных решений $\{u_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ для краевой задачи упругости. Например, для задачи изгиба тонкой пластины, $u_n(x, y)$ – прогиб пластины в декартовой системе координат xOy, $u_n \in \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n(x, y)$ – (кусочно) гладкая функция. В расчетах, согласно определению, для точки тела с координатами x, y значение погрешности $\delta_n^*(x,y)$ для приближенного решения $u_n(x, y)$ находят по формуле $\delta_n^*(x,y) = u(x,y) - u_n(x,y)$, где $u(x, y)$ – точное решение задачи.

Следует отметить, что в механике (сплошных сред) размерность величин играет важную роль [3, 4]. В задачах механики используются только размерные и безразмерные величины [3, 4]. Во всех уравнениях, формулах, применяемых в механике, размерности величин не нарушаются. Допустимо складывать (или вычитать), сравнивать между собой величины только одинаковой размерности. Размерность погрешности $\delta_n^*(x,y)$ перемещения $u_n(x, y)$ в СИ [3] – *м* (метр). В теоретических исследованиях задач теории упругости активно применяют пространства: L_2, энергетическое H_e [5] и Соболева W_2^1 [6]. Рассмотрим размерности этих норм. Величина $(\delta_e^n)^2 = \| u - u_n \|_e^2$ – значение потенциальной энергии деформаций тела, отвечающее его перемещениям $u - u_n$, где $\| \circ \|_e$ – норма энергетического пространства H_e, u, $u_n \in H_e$ [5]. Размерность величины $(\delta_e^n)^2$ в СИ есть *дж* (джоуль). Значение нормы $\| u \|_{L_2}$ пространства L_2 находят по формуле $\| u \|_{L_2} = \sqrt{\int_S u^2 ds}$, где S – область тела, $u \in L_2$. Значение $B_1 = \int_S u^2 ds$ приближенно представим в виде интегральной суммы $B_1 \approx B_1^N = \sum_{k=1}^{N} u_k^2 \Delta s_k$, где u_k – значение функции u в центре элементарной области Δs_k; $S = \bigcup_{k=1}^{N} \Delta s_k$. Отметим, что размерность координат x, y есть $м$, величин: u_k^2 – $м^2$, Δs_k – $м^2$. Используем обозначение: $B[\alpha]$, которое означает, что размерность числа B есть α. Учитывая размерности u_k, Δs_k в интегральной сумме, получаем равенство $B_1^N[м^4] = \sum_{k=1}^{N} u_k^2[м^2]\ \Delta s_k[м^2]$. Поскольку $B_1 = \lim B_1^N(\Delta s_k)$ при $\Delta s_k \to 0$ (при $N \to \infty$), то размерность B_1 есть $м^4$. Тогда $\| u \|_{L_2}\ [м^2] = \sqrt{B_1[м^4]}$. Значит, размерность величины $\delta_{L_2}^n = \| u - u_n \|_{L_2}$ – $м^2$. Как известно, величину $\delta_e^n\ [\sqrt{дж}]$ называют погрешностью решения $u_n(x, y)$ по норме, а величину $\delta_{L_2}^n [м^2]$ – среднеквадратичной погрешностью решения $u_n(x, y)$. Итак, для перемещения $u_n(x, y)$ (где x, y заданы), которое имеет в СИ размерность метр, предлагают погрешности δ_e^n, $\delta_{L_2}^n$, размерности которых выражаются в джоулях и в квадратных метрах. Формально запишем равенства: $u(x, y) = u_n(x, y) + \delta_e^n$, $u(x, y) = u_n(x, y) + \delta_{L_2}^n$, где x, y заданы. Найти точное решение $u(x, y)$ с помощью δ_e^n, $\delta_{L_2}^n$ невозможно, так как возникает необходимость складывать величины, размерности которых различны ($u_n(x, y)$[м] + $\delta_{L_2}^n\ [м^2]$, $u_n(x, y)$[м] + $+\delta_e^n\ [\sqrt{дж}]$), что недопустимо. Поэтому использование величин δ_e^n, $\delta_{L_2}^n$ в расчетах в качестве погрешностей решения $u_n(x, y)$ не представляется возможным. Значение нормы $\| u \|_w$ пространства W_2^1 для функции перемещений $u(x, y)$ определяют по формуле [6]

$$\| u \|_W = \sqrt{\int_S u^2 ds + \int_S (u_x^2 + u_y^2)\, ds}\ ,$$

где $u \in W_2^1$, $u_x = \partial u / \partial x$, $u_y = \partial u / \partial y$.

Размерность величины $B_1 = \int_S u^2 ds$ – $м^4$. Значение интеграла $B_2 = \int_S (u_x^2 + u_y^2) ds$ представим через интегральную сумму $B_2 \approx B_2^N = \sum_{k=1}^{N} (u_{xk}^2 + u_{yk}^2) \Delta s_k$, где u_{xk}, u_{yk} – значения частных производных u_x, u_y в центре элементарной области Δs_k. Считаем, что (в точке x_o, y_o) $u_x \approx \beta_1 = \Delta_x u / \Delta x$, $u_y \approx \beta_2 = \Delta_y u / \Delta y$, где $\Delta_x u$ ($\Delta_y u$) – приращение функции $u(x, y)$ по переменной x (по переменной y), Δx (Δy) – приращение переменной x (переменной x) в точке x_o, y_o. Размерности величин Δx, Δy, $\Delta_x u$, $\Delta_y u$ – $м$. Имеем $\beta_1 = \Delta_x u[м] / \Delta x[м]$, $\beta_2 = \Delta_y u[м] / \Delta y[м]$, т.е. величины β_1, β_2 являются безразмерными, а значит, и величины u_{xk}, u_{yk} также безразмерные. Учитывая размерность величины Δs_k в интегральной сумме, получаем $B_2^N[м^2] = \sum_{k=1}^{N} (u_{xk}^2 + u_{yk}^2) \Delta s_k [м^2]$. Так как $B_2 = \lim B_2^N(\Delta s_k)$ при $\Delta s_k \to 0$, то размерность величины B_2 – $м^2$. Имеем $\| u \|_w = \sqrt{B_1 + B_2}$. В данном случае возникает необходимость складывать величины $B_1[м^4]$, $B_2[м^2]$ различной размерности, что недопустимо, т.е. применение нормы $\| u \|_w$ пространства Соболева W_2^1 для функции перемещений u в такой форме не представляется возможным. В связи с этим в формуле нормы пространства W_2^1 предлагаем использовать размерные коэффициенты, которые устраняют существующее несоответствие между размерностями величин в формуле нормы $\| u \|_w$. Рассмотрим следующую теорему.

Теорема. Пусть гладкая функция $u(x, y)$, заданная в области S, и переменные x, y имеют размерность метр. Тогда существуют такие размерные коэффициенты α_o, α_1, α_2, α_3, равные единице, что модифицированная норма $\| u \|_w^*$ пространства Соболева W_2^1, где $\| u \|_w^* = \alpha_o \sqrt{\int_S (\alpha_1 u^2 + \alpha_2 u_x^2 + \alpha_3 u_y^2)\, ds}$, имеет размерность метр.

Доказательство. Введем безразмерные переменные $\overline{x} = x / x_o$, $\overline{y} = y / y_o$ и безразмерную функцию $\overline{u} = u / u_o$, где $u_o, x_o, y_o = const$; u_o, x_o, y_o заданы и имеют размерность $м$. Для практики удобно принять $u_o, x_o, y_o = 1$. Норму $\| \overline{u} \|_w^*$ запишем в виде $\| \overline{u} \|_w^* = \sqrt{\int_{\overline{S}} (\overline{u}^2 + \overline{u}_{\overline{x}}^2 + \overline{u}_{\overline{y}}^2)\, d\overline{s}}$. Заменяя в формуле нормы $\| \overline{u} \|_w^*$ переменные $\overline{x}$, $\overline{y}$ и функцию $\overline{u}$ соответственно соотношениями x / x_o, $y / y_o, u / u_o$, получим равенство

$$\| u \|_w^* = \alpha_o \sqrt{\int_S (\alpha_1 u^2 + \alpha_2 u_x^2 + \alpha_3 u_y^2)\, ds}\ ,$$

где $\alpha_o = u_o$, $\alpha_1 = 1 / (u_o^2 x_o y_o)$, $\alpha_2 = x_o / (u_o^2 y_o)$, $\alpha_3 = y_o / (u_o^2 x_o)$; коэффициент α_o имеет размерность $м$ (метр); α_1 – $м^{-4}$; α_2 – $м^{-2}$, α_3 – $м^{-2}$; поскольку $u_o, x_o, y_o = 1$, то $\alpha_i = 1$, $i = 0,...,3$; $u(x, y)$ – функция перемещений тела.

Нетрудно видеть, что величины $\alpha_1 (u(x, y))^2 ds$, $\alpha_2 (u_x(x, y))^2 ds$, $\alpha_3 (u_y(x, y))^2 ds$ (где x, y заданы) являются безразмерными. Значит, норма $\| u \|_w^*$ имеет такую же размерность, как и коэффициент α_o, т.е. размерность нормы $\| u \|_w^*$ – метр. Теорема доказана. Итак, модифицированная норма $\| u \|_w^*$ пространства Соболева W_2^1 корректна с точки зрения соблюдения размерностей ее величин и имеет размерность $м$. Пусть размерность значений функции u

(заданной в декартовой системе координат xOy) есть β. Тогда коэффициент α_o имеет размерность β, α_1 – $\beta^{-2}м^{-2}$, α_2 – β^{-2}, α_3 – β^{-2}. В трехмерном случае (когда $u = u(x, y, z)$) размерные коэффициенты для модифицированной нормы $\| u \|_w^*$ пространства Соболева W_2^1 (пространства W_p^l [6]) определяются аналогичным образом. Аналогичные теоремы можно доказать для норм $\| u \|_{L_1}$ (где u функция перемещений, $\| u \|_{L_1} = \int_S | u | ds$ – норма пространства L_1 [6], $u \in L_1$), $\| u \|_{L_2}$, $\| u \|_e$, т.е. показать, что существуют такие размерные коэффициенты c_o, c_1, c_2, c_3, c_i = 1, что модифицированные нормы $| u \|_{L_1}^* =$ $= c_o \int_S c_1 |u| ds$, $\| u \|_e^* = c_o \| c_3 u \|_e$, $\| u \|_{L_2}^* = c_o \sqrt{\int_S c_2 u^2 ds}$ имеют размерность метр. Для практики интересна только такая норма $\| \circ \|_H$ пространства H (функций возможных перемещений тела), размерность которой метр, и только такая оценка C_o для нормы $\| u - u_n \|_H \le C_o$, если $\forall n:$ $\| u - u_n \|_C \le \beta \| u - u_n \|_H$, где $\| \circ \|_C$ – норма пространства непрерывных функций [6], размерность которой есть $м$; $\delta_o^n =$ $= \| u - u_n \|_C = \max | u(x, y) - u_n(x, y) |$ на S; $\beta = const$, т.е. имеем $\forall n:$ $\delta_o^n \le C_o$.

В расчетах активно применяют относительную (по модулю) погрешность $\delta_n^o(x, y)$ для решения $u_n(x, y)$, т.е. $\delta_n^o(x, y) = | u(x, y) - u_n(x, y) | / | u(x, y) |$. В данной работе показана процедура построения относительных погрешностей для максимальных перемещений конечно-элементных моделей двумерных композитов регулярной структуры. В настоящее время при расчете упругих композитов с учетом структуры широко используют метод конечных элементов (МКЭ) [1,2] в форме метода Ритца. Пусть $w_n^* \in \{w_n^*\}_{n=0}^N$ есть сеточное решение плоской задачи упругости, построенное (в перемещениях) по микроподходу [1] с помощью МКЭ для регулярного разбиения $R_n \in \{R_n\}_{n=0}^N$ композита, который имеет регулярную структуру; обозначим: w_n – максимальное значение (по модулю) сеточной функции w_n^*; δ_n – относительная погрешность (по модулю) решения w_n, т.е. имеем δ_n = $= | w_0 - w_n | / | w_0 |$, где w_0 – точное решение для w_n; $0 < \delta_n < 1$; n = 1, …, N. Найти точное значение δ_n сложно и поэтому применяют (расчетную) погрешность δ_n^p, которая приближенно представляет истинную δ_n, т.е. имеем $\delta_n \approx \delta_n^p$. В связи с этим возникает проблема: для истинной погрешности δ_n определить такую расчетную погрешность δ_n^p, что

$$| \delta_n^p - \delta_n | \le \delta_0, \qquad (1)$$

где δ_0 – заданная малая величина; $\delta_n, \delta_0 < 1$.

Для практики целесообразно ввести следующие определения оценок [7].

Определение 1 (2). Вещественное $C_1^n > 0$ ($C_2^n > 0$) будем называть нижней (верхней) оценкой погрешности δ_n узлового перемещения w_n дискретной модели R_n упругого тела, где $\delta_n = | w_0 - w_n | / | w_0 |$, w_0 – точное решение; если $C_1^n \le \delta_n$ ($\delta_n \le C_2^n$) и для заданного малого числа δ_0 выполняется неравенство $| \delta_n - C_1^n | \le \delta_0$ ($| \delta_n - C_2^n | \le \delta_0$).

Определение 3. Вещественные $C_1^n, C_2^n > 0$ будем называть двусторонними оценками погрешности δ_n для узлового перемещения w_n дискретной модели R_n упругого тела ($\delta_n = | w_0 - w_n | / | w_0 |$, w_0 – точное решение), если $C_1^n \le \delta_n \le C_2^n$ и для заданного малого числа δ_0 справедливо неравенство $| C_2^n - C_1^n | \le 2\delta_0$.

Аналогичные определения верхних (нижних) оценок можно сформулировать для относительных погрешностей максимальных эквивалентных напряжений дискретных моделей упругих тел.

В силу малости δ_0 для нижней оценки принимаем $\delta_n^p = C_1^n + \delta_0$, для верхней – $\delta_n^p = C_2^n$, а для двусторонних оценок – $\delta_n^p = (C_1^n + C_2^n)/2$. Во всех случаях расчетная погрешность δ_n^p удовлетворяет условию (1). Из определений 1–3 вытекают следующие три задачи, связанные с построением оценок.

Задача 1 (2). Для относительной погрешности δ_n узлового перемещения w дискретной модели R_n тела требуется построить такую нижнюю (верхнюю) оценку C_1^n (C_2^n), что $| \delta_n - C_1^n | \le \delta_0$ ($| \delta_n - C_2^n | \le \delta_0$), где δ_0 – мало, задано.

Задача 3. Для относительной погрешности δ_n узлового перемещения w_n дискретной модели R_n упругого тела требуется построить такие верхнюю C_2^n и нижнюю C_1^n оценки, что $C_1^n \le \delta_n \le C_2^n$ и $| C_2^n - C_1^n | \le 2\delta_0$, где δ_0 – мало, задано.

Итак, для расчетов интересна только такая оценка C_n, построенная для относительной (по модулю) погрешности δ_n узлового перемещения w_n, которая удовлетворяет условию $\delta_n - \delta_0 \le C_n \le \delta_n + \delta_0$, где δ_0 – малая величина.

1. Процедура построения относительных погрешностей для узловых перемещений дискретных моделей двумерных композитов. Рассмотрим систему упругих двумерных композитов регулярной структуры $\{S^k\}_{k=1}^\infty$, которые имеют различные форму и размеры, а также нагружения (заданного типа) и закрепления. Пусть для данной системы композитов выполняются следующие положения.

Положение 1. Двумерный композит $S^k \in \{S^k\}_{k=1}^\infty$ (который расположен в декартовой системе координат xOy) имеет гладкую границу, испытывает плоское напряженное состояние. Между компонентами композита связи идеальны и при этом функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши [8].

Положение 2. Область композита $S^k \in \{S^k\}_{k=1}^{\infty}$ в расчетах приближенно представляем квадратными непересекающимися подобластями S_e^k со стороной a_k так, что система областей $\{S_e^k\}_{e=1}^{N^k}$ включает область композита S^k, N^k – общее число подобластей S_e^k. Для композита S^k используем регулярные разбиения $\{R_n^k\}_{n=0}^{\infty}$, которые состоят из лагранжевых квадратных конечных элементов первого порядка [2]. Шаг h_n^k квадратной узловой сетки разбиения $R_n^k \in \{R_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ композита S^k определяется по формуле (т.е. по i-му закону измельчения)

$$h_n^k = \frac{h_r^k}{i(n+1)},\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $h_r^k = a_k / r$; r, i – целые; $i \geq 1$; $r > 1$; r, i – заданы.

Положение 3. Композит $S^k \in \{S^k\}_{k=1}^{\infty}$ нагружен силами $\mathbf{p}_k = \{p_x^k, p_y^k\}^T$ в области и силами $\mathbf{q}_k = \{q_x^k, q_y^k\}^T$ на границе, где $p_x^k, p_y^k, q_x^k, q_y^k$ – кусочно гладкие функции. Сосредоточенная сила $\mathbf{P}_k$ ($\mathbf{Q}_k$) в области (на границе) композита заменяется статически эквивалентным равномерным нагружением $\mathbf{P}_k^0$ ($\mathbf{Q}_k^0$) в R_k – окрестности точки приложения силы $\mathbf{P}_k$ ($\mathbf{Q}_k$). Принимаем: $|\mathbf{P}_k| = |\mathbf{P}_k^0| \Delta S_k$; $\Delta S_k = l_k \times l_k$, $|\mathbf{Q}_k| = |\mathbf{Q}_k^0| \Delta l_k$; $\Delta l_k = l_k$, где $l_k = 2R_k$. Считаем: $l_k = h_r^k \beta$, где β – целое, задано; $\beta > 1$; причем $l_k < a_k$. В расчетах композит S^k минимальных размеров – квадрат со стороной a_k (со стороной ma_k, m – целое).

Обозначим: $u_n^k \in \{u_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ максимальное значение (по модулю) сеточной функции перемещений u (перемещений v), которая отвечает решению плоской задачи теории упругости, построенного по МКЭ для разбиения $R_n^k \in \{R_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ и заданных сил $\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ композита $S^k \in \{S^k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть выполняются неравенства

$$|u_n^k - u_{n-1}^k| \leq |u_k^0 - u_n^k| \leq |u_k^0 - u_{n-1}^k|,\quad n, k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

где u_k^0 – точное решение.

Покажем, что существуют такие функции $\delta = f_i^1(\varepsilon)$, $\delta = f_i^2(\varepsilon)$, что для относительной погрешности δ_n^k (по модулю) всякого решения $u_n^k \in \{u_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ любого композита $S^k \in \{S^k\}_{k=1}^{\infty}$ при $\varepsilon = \varepsilon_n^k$ имеем

$$f_i^1(\varepsilon_n^k) \leq \delta_n^k \leq f_i^2(\varepsilon_n^k),\ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

где $f_i^1(\varepsilon)$ ($f_i^2(\varepsilon)$) – функция нижних (верхних) оценок, отвечающая заданным параметрам r, i, β (i-му закону измельчения),

$$\delta_n^k = |u_k^0 - u_n^k| / |u_k^0|,\ \varepsilon_n^k = |u_n^k - u_{n-1}^k| / |u_n^k|,\quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{5}$$

1.1. Рассмотрим вначале мелкие разбиения $\{R_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ композита S^k.

Согласно расчетам и теории МКЭ имеем

$$|u_n^k - u_k^0| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{6}$$

Из (6) вытекает, что [6] $|u_n^k| \to |u_k^0|$ при $n \to \infty$ (при $h_n^k \to 0$), пусть

$$|u_k^0| < \infty. \tag{7}$$

Из неравенства $|u_n^k - u_{n-1}^k| \leq |u_n^k - u_k^0| + |u_k^0 - u_{n-1}^k|$ в силу (7) и, что $|u_{n-1}^k - u_k^0| \to 0$ при $n \to \infty$, следует

$$|u_n^k - u_{n-1}^k| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{8}$$

Используя (7), (8) в (5), получаем

$$\varepsilon_n^k \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ т.е. при } h_n^k \to 0. \tag{9}$$

Для малых значений h_n^k (для мелких разбиений) в силу (7) можно принять

$$\frac{u_k^0}{u_n^k} = 1. \tag{10}$$

Обозначим

$$\delta_{nk}^* = |u_k^0 - u_n^k|,\ \varepsilon_{nk}^* = |u_n^k - u_{n-1}^k|. \tag{11}$$

Тогда в силу (8) имеем

$$\frac{\delta_{nk}^*}{\varepsilon_{nk}^*} \geq 1. \tag{12}$$

Используя обозначения (11) и неравенства [6]

$$|u_k^0 - u_n^k| \leq |u_k^0 - u_{n-1}^k| + |u_{n-1}^k - u_n^k|,$$

$$\big|\, |u_k^0 - u_{n-1}^k| - |u_k^0 - u_n^k| \,\big| \leq |u_n^k - u_{n-1}^k|,$$

получаем

$$\frac{\delta_{nk}^*}{\varepsilon_{nk}^*} = \frac{|u_k^0 - u_n^k|}{|u_n^k - u_{n-1}^k|} \leq \frac{|u_k^0 - u_{n-1}^k| + |u_n^k - u_{n-1}^k|}{\big|\, |u_k^0 - u_{n-1}^k| - |u_k^0 - u_n^k| \,\big|} = \frac{1 + \beta_n^k}{|1 - \alpha_n^k|}, \tag{13}$$

где $\beta_n^k = |u_n^k - u_{n-1}^k| / |u_k^0 - u_{n-1}^k|$, $\alpha_n^k = |u_k^0 - u_n^k| / |u_k^0 - u_{n-1}^k|$, пусть

$$\alpha_n^k \neq 1. \tag{14}$$

Применяя (3) в (14), имеем:

$$\alpha_n^k \leq 1,\ \beta_n^k = \frac{|u_n^k - u_{n-1}^k|}{|u_k^0 - u_{n-1}^k|} \leq \frac{|u_n^k - u_{n-1}^k|}{|u_k^0 - u_n^k|} \leq 1, \text{ т.е.}$$

$$\alpha_n^k, \beta_n^k \leq 1. \tag{15}$$

Правую часть неравенства (13) представим в виде

$$\frac{1 + \beta_n^k}{|1 - \alpha_n^k|} = \frac{(1 + \beta_n^k)(1 + \alpha_n^k)\Pi_{\alpha=1}^m (1 + (\alpha_n^k)^{p_\alpha})}{1 - (\alpha_n^k)^p}, \tag{16}$$

где $p_\alpha = 2^\alpha$, $p = 2^{m+1}$; α, m – целые; $m, \alpha \geq 1$; $m < \infty$; $\alpha_n^k < 1$.

Пусть величина α_n^k такая малая и пусть целое m такое, что можно принять $(\alpha_n^k)^p = 0$. Заметим, что при $m \geq 1$ имеем $p \geq 4$. Из (16) при $(\alpha_n^k)^p = 0$ следует

$$\frac{1+\beta_n^k}{|1-\alpha_n^k|} = (1+\beta_n^k)(1+\alpha_n^k)\Pi_{\alpha=1}^m(1+(\alpha_n^k)^{p_\alpha}). \quad (17)$$

Полагая α_n^k, $\beta_n^k = 1$ в правой части равенства (17), получаем оценку

$$\frac{1+\beta_n^k}{|1-\alpha_n^k|} \leq 2^{m+2}, \ m \geq 1. \quad (18)$$

Применяя (18) в (13), получаем неравенство

$$\frac{\delta_{nk}^*}{\varepsilon_{nk}^*} \leq 2^{m+2}. \quad (19)$$

Объединяя (12) и (19), имеем

$$1 \leq \frac{\delta_{nk}^*}{\varepsilon_{nk}^*} \leq 2^{m+2}, \ 1 \leq m \leq \infty. \quad (20)$$

Используя (5) и обозначения (11), составим равенство

$$\frac{\delta_{nk}^*}{\varepsilon_{nk}^*} = \frac{\delta_n^k}{\varepsilon_n^k}\frac{|u_k^0|}{|u_n^k|}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20) с учетом (10) и, что $\varepsilon_n^k > 0$, для относительной погрешности δ_n^k решения u_n^k (для мелких регулярных разбиений $\{R_n^k\}_{n=0}^\infty$) получаем следующие двусторонние оценки

$$\varepsilon_n^k \leq \delta_n^k \leq 2^{m+2}\varepsilon_n^k, \quad (22)$$

где ε_n^k – мало, т. е. h_n^k – мало, см. (9).

Из сравнения (22) и (4) следует, что $f_i^1(\varepsilon_n^k) = \varepsilon_n^k$, $f_i^2(\varepsilon_n^k) = C_m\varepsilon_n^k$; где $C_m = 2^{m+2}$, величина C_m (при $\varepsilon_n^k \to 0$) не зависит от n, k. Заметим, что поскольку $C_m < \infty$ (m < ∞) и согласно (9) $\varepsilon_n^k \to 0$ при $n \to \infty$, то $f_i^1(\varepsilon_n^k)$, $f_i^2(\varepsilon_n^k) \to 0$ при $n \to \infty$. Итак, показано, что для малых значений ε (для мелких регулярных разбиений $\{R_n^k\}_{n=0}^\infty$) функции $f_i^1(\varepsilon)$, $f_i^2(\varepsilon)$ можно представить в виде $f_i^1(\varepsilon) = \varepsilon$, $f_i^2(\varepsilon) = C_0\varepsilon$, т.е. имеем

$$\varepsilon_n^k \leq \delta_n^k \leq C_0\varepsilon_n^k, \quad (23)$$

где $C_0 = const$; $C_0 > 0$, причем величина C_0 не зависит от n, k (ε_n^k – мало).

Постоянная C_0 определяется с помощью расчетов, которые показывают, что значение C_0 зависит от заданных параметров: r, i, β (см. положения 2, 3). Расчеты показывают [7], что значение верхней (нижней) оценки вида (23) при $\varepsilon_n^k \geq 0,01$ ($\varepsilon_n^k \geq 1\%$) может быть существенно больше (меньше) погрешности δ_n^k и поэтому в этих случаях применение оценок (23) в расчетах затруднительно.

1.2. Для крупных разбиений $\{R_n^k\}_{n=0}^\infty$ композитов $\{S^k\}_{k=1}^\infty$ (в случае $\varepsilon_n^k \geq 1\%$) предлагаемая процедура сводится к построению в декартовой системе координат $\varepsilon O\delta$ графиков функций $f_i^1(\varepsilon)$, $f_i^2(\varepsilon)$ нижних и верхних оценок. Краткая суть построения графиков функций $f_i^1(\varepsilon)$, $f_i^2(\varepsilon)$ состоит в следующем. Выбираем конечное множество композитов S^1, …, S^m (испытывающих плоское напряженное состояние), нагружения, форма и размеры областей которых различны и удовлетворяют положениям 1–3. Пусть известны точные решения для данных композитов. Для композита $S^k \in \{S^k\}_{k=1}^m$, используя закон измельчения (2) при заданном i, строим разбиения $\{R_n^k\}_{n=0}^N$, состоящие из лагранжевых квадратных конечных элементов первого порядка. Пусть u_n^k – максимальное значение (по модулю) сеточной функции перемещения u композита S^k, которая построена по МКЭ для разбиения R_n^k. Для разбиений R_0^k, R_1^k,..., R_N^k композита S^k находим величины δ_n^k, ε_n^k по формулам (5), k = 1, …, m. В декартовой системе координат $\varepsilon O\delta$ для композита S^k (k = 1, …, m) отмечаем N точек с координатами $\varepsilon = \varepsilon_n^k$, $\delta = \delta_n^k$ (n = 1, …, N). В результате на плоскости $\varepsilon O\delta$ для композитов S^1, …, S^m получаем множество точек G_i (mN точек), которое отвечает i-му закону измельчения (2). Считаем, что кривая между прямыми $\varepsilon = \varepsilon_1^o$, $\varepsilon = \varepsilon_2^o$ ($\varepsilon_1^o, \varepsilon_2^o > 0; \varepsilon_1^o, \varepsilon_2^o$ заданы), огибающая множество точек G_i сверху (т.е. верхняя граница множества G_i), является графиком функции $f_i^2(\varepsilon)$. Кривая, огибающая множество точек G_i снизу (т.е. нижняя граница множества точек G_i между прямыми $\varepsilon = \varepsilon_1^o$, $\varepsilon = \varepsilon_2^o$), будет графиком функции $f_i^1(\varepsilon)$. Отметим, что чем больше используем композитов различной формы и размеров (для которых выполняются положения 1–3), имеющих различные закрепления и нагружения, тем точнее будут построены верхняя и нижняя границы множества точек G_i (тем точнее будут построены графики функций $f_i^1(\varepsilon)$, $f_i^2(\varepsilon)$). Применение графиков функций $f_i^1(\varepsilon)$, $f_i^2(\varepsilon)$ в расчетах состоит в следующем. Пусть для композита, имеющего структуру заданного типа (с гладкой границей), построены по МКЭ решения $\{w_n\}_{n=0}^N$ плоской задачи упругости при использовании выбранного закона измельчения регулярных разбиений и заданного вида нагружений (для которых были построены функции $f_i^1(\varepsilon)$, $f_i^2(\varepsilon)$). Для выбранного n $(1 \leq n \leq N)$ определяем параметр ε_n по формуле $\varepsilon_n = |w_n - w_{n-1}|/|w_n|$. Затем на плоскости $\varepsilon O\delta$ из точки с координатами $\varepsilon = \varepsilon_n$, $\delta = 0$ восстанавливаем перпендикуляр к оси

$O\varepsilon$ до пересечения с графиками функций $f_i^1(\varepsilon_n)$, $f_i^2(\varepsilon_n)$ и графически определяем значения функций $f_i^1(\varepsilon_n)$, $f_i^2(\varepsilon_n)$. Тогда для погрешности δ_n решения w_n имеем двусторонние оценки вида $f_i^1(\varepsilon_n) \le \delta_n \le f_i^2(\varepsilon_n)$. Расчеты показывают, что увеличение числа i в формуле (2) приводит к уменьшению диапазона $\Delta f_i(\varepsilon) = | f_i^2(\varepsilon) - f_i^1(\varepsilon) |$. Пусть $\forall \varepsilon \in [\varepsilon_1^o; \varepsilon_2^o]$: $| f_i^2(\varepsilon) - f_i^1(\varepsilon) | \le \delta_o$, где δ_o заданная малая величина. Тогда на отрезке $[\varepsilon_1^o; \varepsilon_2^o]$ функцию погрешностей $f_\delta(\varepsilon)$ для сеточных решений можно представить в виде $f_\delta(\varepsilon) = (f_i^1(\varepsilon) + f_i^2(\varepsilon)) / 2$.

Библиографический список

1. Фудзии Т., Драко М. Механика разрушения композиционных материалов. – М., 1982. – 232 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М., 1975.
3. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. – М., 1990.
4. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М., 1967.
5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М., 1970.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М., 1980.
7. Матвеев А. Д. Построение погрешностей для перемещений дискретных моделей упругих тел с применением функций верхних и нижних оценок // Вестник КрасГАУ – 2011.– №3.
8. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М., 1970.