

УДК 539.3

*А.Д. Матвеев***Анализ прочности с учетом характера распределения эквивалентных напряжений в конструкциях***A.D. Matveev***Strength Analysis Taking into Account the Distribution of Equivalent Stresses in Structures**

Для упругих конструкций, которые имеют статическое (циклическое) нагружение, изложены методы определения коэффициентов запаса прочности с учетом характера распределения эквивалентных напряжений и других факторов, влияющих на прочность (срок службы) конструкций. Предложена связь между коэффициентом запаса прочности и сроком службы конструкции. Показано, что равнонапряженные конструкции имеют меньший запас прочности (меньший срок службы), чем конструкции с концентраторами напряжений при прочих равных условиях.

**Ключевые слова:** коэффициент запаса прочности, функция вероятности возникновения разрушения конструкции, обобщенное эквивалентное напряжение, функция влияния, срок службы конструкции.

**Введение.** Как известно [1–3], коэффициент запаса прочности  $n$  для ряда конструкций, имеющих статическое (циклическое) нагружение, вычисляют по формуле вида  $n = \sigma_o / \sigma_m^3$ , где  $n \geq 1$ ;  $\sigma_o$  – опасное (предельное) напряжение;  $\sigma_m^3$  – максимальное эквивалентное напряжение конструкции (которое выражается через компоненты напряжений, определяемые лишь только в одной точке конструкции [1]). Известные подходы, формулы нахождения коэффициента  $n$  объединяет тот факт, что в этих подходах, формулах значение  $n$  отражает напряженное состояние конструкции лишь только в одной точке ее области. Однако опыт показывает, что прочность и срок службы конструкций зависят и от характера распределения напряжений в конструкциях, и условий их эксплуатации. Причинами, которые влияют на разрушение (срок службы) конструкций, также могут быть силовые воздействия технологического характера (монтажные усилия) и дефекты (микротрещины, царапины, сколы), возникающие при изготовлении и эксплуатации конструкций. Возникновение такого рода причин носит вероятностный характер и поэтому разрушение (срок службы) конструкции можно рассматривать как вероятностное событие. Значит, значение  $n$  (т.е. срок службы конструкции) зависит и от вероятности разрушения конструкции. Так как коэффициенты  $n$  используют в сравнительном анализе прочностных свойств кон-

Methods used to determine the safety factor in terms of the nature of the equivalent stresses distribution and other factors affecting the strength (service life) of structures have been shown for elastic structures that have a static loading. The study establishes relationship between safety factor and service life of construction. Equally stressed structures have smaller safety factor (service life) rather than structures with stress concentrators under otherwise equal conditions.

**Key words:** safety factor, failure probability function, generalized equivalent stress, influence function, service life of structures.

струкций, то значение  $n$  можно определять по формуле  $n = \sigma_o / \sigma_m^3 + C$ , где  $C = const$ ,  $C > 0$ . Это означает, что не существует точного значения  $n$ , поскольку диапазон  $[n_o, n_e]$ , заданный для значений  $n$  ( $n_o \leq n \leq n_e$ ,  $n_o \geq 1$ ), можно сместить (по оси  $n$ ) на величину  $C$  (вправо, влево). Время  $\Delta t$  эксплуатации (срок службы) конструкции является важнейшей ее характеристикой и основным результатом расчета конструкции на прочность. Практика показывает, что  $\Delta t$  зависит от множества факторов, влияющих на прочность (т.е. на срок службы) конструкции. Для ряда конструкций время  $\Delta t$  задается (согласно техническому проекту). В связи с этим возникает необходимость определять время  $\Delta t$  для проектируемой конструкции. Практика показывает, что коэффициент  $n$  и время  $\Delta t$  взаимосвязаны, т.е. чем больше  $n$ , тем больше  $\Delta t$  и наоборот. Следовательно, коэффициент  $n$  характеризует срок службы конструкции и при этом показывает, во сколько раз нужно увеличить нагружение конструкции, чтобы ее напряженное состояние стало предельным [1]. Из вышесказанного следует, что для анализа прочности конструкций необходимо определить такую гладкую функцию  $f = f(p_1, \dots, p_a)$ , что  $n = f(p_1, \dots, p_a)$ , где параметры  $p_1, \dots, p_a$  количественно оценивают действие всех факторов, влияющих на прочность (на срок службы конструкций).

В данной работе показана процедура нахождения времени  $\Delta t$  эксплуатации (срока службы) конструкции. В основе процедуры лежит предположение, что  $\Delta t = F(n)$ , где  $F(n)$  – гладкая возрастающая функция, причем  $F(0) = 0$ . Для определения коэффициентов запаса прочности упругих конструкций предложены вероятностный, энергетический и обобщенный методы, которые учитывают характер распределения напряжений в конструкциях и другие факторы. В основе вероятностного метода лежит предположение, что  $n = f(p)$ , где  $p$  – вероятность разрушения конструкции (вероятность возникновения пластического состояния хотя бы в одной точке конструкции);  $f(p)$  – гладкая функция, причем  $0 < p \leq 1$ ;  $f(1) = 0$ ,  $n \in [n_a, n_b]$ . Определив  $n$ , находим  $\Delta t = F(f(p))$ , где  $\Delta t = \Delta t(p_1, \dots, p_a)$ . Показано, что равнонапряженные конструкции обладают меньшим запасом прочности и меньшим сроком службы, чем конструкции с концентраторами напряжений при прочих равных условиях.

Пусть конструкция  $V^o$  состоит из пластичного однородного линейно-упругого материала, для которой заданы статическое (циклическое) нагружение, условия закрепления и построено решение задачи теории упругости. Отметим, что при эксплуатации ряда конструкций (состоящих из пластичных материалов) недопустимо возникновение пластического состояния в их областях. Будем считать, что конструкция  $V^o$  разрушилась, если возникло пластическое состояние хотя бы в одной точке ее области.

**1. Вероятностный метод.** Область данной конструкции  $V^o$  представляем непересекающимися подобластями  $V_1, \dots, V_q$ , которые имеют почти одинаковую форму и одинаковые размеры. Отметим, что чем больше используется областей  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , тем более точно данный метод оценивает прочность конструкции. Как известно [3], вероятность  $p$  разрушения конструкции возрастает при уменьшении ее коэффициента  $n$  запаса прочности и наоборот. В связи с этим вводим следующее положение, которое лежит в основе вероятностного метода.

*Положение 1.1.* Считаем, что вероятность  $p$  разрушения и коэффициент  $n$  запаса прочности конструкции  $V^o$  (при любом ее нагружении заданного вида) связаны равенством

$$n = f(p) \text{ или } p = f^{-1}(n), \quad (1)$$

где  $f(p)$  – гладкая функция, причем  $0 \leq f(p) < \infty$  при  $0 < p \leq 1$ ;  $f(1) = 0$ .

Остальные положения вероятностного метода заключаются в следующем [4].

*Положение 1.2.* Считаем, что разрушение конструкции  $V^o$  может быть в любой из областей:  $V_1, \dots, V_q$ . При этом полагаем, что возможные разрушения конструкции  $V^o$  в этих областях являются независимыми (по вероятности) событиями.

Следует отметить, что дефекты, вызывающие разрушение конструкции  $V^o$ , могут возникнуть

в областях  $V_1, \dots, V_q$  независимо друг от друга (например, возникновение микротрещин царапин при изготовлении и монтаже конструкции).

*Положение 1.3.* Считаем, что вероятность  $p_i$  разрушения и коэффициент  $n_i$  запаса прочности области  $V_i$  (при всяком ее нагружении заданного вида) связаны равенством

$$n_i = f(p_i), \quad i = 1, \dots, q. \quad (2)$$

*Положение 1.4.* Считаем, что  $\Delta t = F(n)$ , где  $\Delta t$  – время эксплуатации (т.е. срок службы) конструкции  $V^o$ ;  $n$  – коэффициент запаса прочности конструкции  $V^o$ ;  $F(n)$  – гладкая возрастающая функция,  $n \in [n_a, n_b]$ , причем  $F(0) = 0$ .

Рассмотрим реализацию вероятностного метода. Определяем коэффициент запаса прочности  $n_i$  области  $V_i$ , используя четвертую теории прочности [1]

$$n_i = \sigma_T / \sigma_s^i, \quad i = 1, \dots, q, \quad (3)$$

где  $\sigma_s^i$  – максимальное эквивалентное напряжение в области  $V_i$ , посчитанное по 4-й теории прочности;  $\sigma_T$  – предел текучести; при циклическом нагружении  $n_i = \sigma_{\Pi} / \sigma_s^i$ , где  $\sigma_{\Pi}$  – предельное напряжение [1–3].

В первом приближении функцию  $f(p)$  представим  $f(p) = \alpha_o(1 - p)$ , где  $\alpha_o = \text{const}$ ,  $\alpha_o > 0$ . В этом случае в силу (1) имеем

$$n = \alpha_o(1 - p). \quad (4)$$

При использовании представления (4) параметры  $n_i, p_i$  области  $V_i$  в силу положения 1.3 удовлетворяют равенству

$$n_i = \alpha_o(1 - p_i), \quad i = 1, \dots, q. \quad (5)$$

Коэффициент  $\alpha_o$  находим следующим образом. Определяем коэффициент запаса прочности  $n_o$  конструкции  $V^o$  по четвертой теории прочности [1]

$$n_o = \sigma_T / \sigma_m^o, \quad (6)$$

где  $\sigma_m^o$  – максимальное эквивалентное напряжение конструкции  $V^o$ , посчитанное по четвертой теории прочности.

Пусть коэффициенту запаса прочности  $n_o$  конструкции  $V^o$  отвечает вероятность  $p_o$  ее разрушения. Тогда согласно (4) для параметров  $n_o, p_o$  выполняется равенство  $n_o = \alpha_o(1 - p_o)$ . Вероятность  $p_o$  можно определить с помощью испытаний, проведенных для партии конструкций типа  $V^o$ . В приближенных расчетах значение  $p_o$  можно задать,  $0 < p_o < 1$ . Из равенства  $n_o = \alpha_o(1 - p_o)$  определяем

$$\alpha_o = n_o / (1 - p_o), \quad (7)$$

где значение  $n_o$  находим по формуле (6);  $p_o$  – известно или задано ( $0 < p_o < 1$ ).

С помощью (5), (7) вероятность  $p_i$  разрушения области  $V_i$  представим

$$p_i = 1 - n_i(1 - p_o) / n_o, \quad i = 1, \dots, q. \quad (8)$$

Из  $p_i > 0$  в силу (3), (6), (8) следует неравенство

$$\sigma_s^i > \sigma_m^o(1 - p_o). \quad (9)$$

Рассматриваем те области  $V_i$ , для которых выполняется неравенство (9). Пусть  $p_i > 0$  для  $i = 1, \dots, q$ . Учитывая положение 1.2, находим вероятность  $p$ ,

разрушения конструкции  $V^0$  хотя бы в одной из областей  $V_1, \dots, V_q$  по формуле [5]

$$p_r = 1 - \prod_{i=1}^q (1 - p_i). \quad (10)$$

Имеем  $p_r = \varphi(p_1, \dots, p_q)$ , где  $\varphi(p_1, \dots, p_q) = 1 - \prod_{i=1}^q (1 - p_i)$ ;  $\varphi$  – функция вероятности разрушения конструкции  $V^0$ . Подставляя (10) в (4) с учетом (7), находим коэффициент запаса прочности  $n_r$  конструкции  $V^0$

$$n_r = n_o(1 - p_r) / (1 - p_o), \quad (11)$$

где значения  $p_r, n_o$  находим по формулам (6), (10);  $p_o$  известно (задано).

Учитывая, что  $F(0) = 0$ , функцию  $F(n)$ , см. положение 1.4, приближенно представляем полиномом второго порядка вида  $F(n) = c_1 n + c_2 n^2$ , где  $c_1, c_2 = const$ , который строим на основе результатов  $n_1^*, t_1$  и  $n_2^*, t_2$  ( $n_a \leq n_1^* < n_2^* \leq n_e$ ) испытаний, проведенных для партии конструкций типа  $V^0$ . В первом приближении функцию  $F(n)$  представим линейной вида  $\Delta t = \beta n$ , где  $\beta = const, \beta > 0$ , значение  $\beta$  находим с помощью испытаний, проведенных для партии конструкций типа  $V^0$ . Тогда, используя положение 1.4 и (11), получаем  $\Delta t_r = \beta n_r$ , т.е.

$$\Delta t_r = \beta n_o(1 - p_r) / (1 - p_o).$$

Согласно (3), (8), (10), (11) значения  $p_r, p_r$  зависят от эквивалентных напряжений  $\sigma_1^q, \dots, \sigma_q^q$  областей  $V_1, \dots, V_q$  конструкции  $V^0$ . Значит, вероятность  $p_r$  разрушения, коэффициент запаса прочности  $n_r$  конструкции  $V^0$  и время  $\Delta t_r$  отражают характер распределения эквивалентных напряжений в  $V^0$ .

Вероятностный метод целесообразно применять для конструкций, которые имеют большое количество ярко выраженных концентраторов напряжений.

**Пример 1.** Пусть область конструкции  $V^0$  покрыта  $q$  непересекающимися почти одинаковыми подобластями  $V_1, \dots, V_q$ , в центрах которых расположены концентраторы напряжений. Пусть максимальные эквивалентные напряжения  $\sigma_1^q, \dots, \sigma_q^q$  концентраторов мало отличаются от максимального эквивалентного напряжения  $\sigma_m^q$  конструкции  $V^0$ ,  $\sigma_m^q = \max(\sigma_1^q, \dots, \sigma_q^q)$ . Поэтому принимаем, что  $\sigma_i^q = \sigma_m^q$ , и согласно (3), (6), (8) получаем:  $n_i = n_o = \sigma_t / \sigma_m^q, p_i = p_o, i = 1, \dots, q$ . Коэффициент  $n_r(q)$  и вероятность  $p_r(q)$  разрушения конструкции  $V^0$  согласно (10), (11) равны:  $p_r(q) = 1 - (1 - p_o)^q$ ,  $n_r(q) = n_o(1 - p_o)^{q-1}$ . Пусть  $q = 9, p_o = 0,01$ . Тогда  $p_r(9) = 0,0868, n_r(9) = 0,922n_o$ . Имеем  $n_r(9) < n_o$ , причем  $n_r(9)$  на 7,8% меньше  $n_o$ . Увеличение числа  $q$  (концентраторов напряжений) при  $\sigma_m^q = const$  приводит к возрастанию вероятности разрушения и уменьшению коэффициента запаса прочности конструкции  $V^0$ , что подтверждает практика. При увеличении  $q$  значение коэффициента  $n_o$  запаса не ме-

няется ( $n_o = \sigma_t / \sigma_m^q = const$ ). Значит, коэффициент  $n_r$  более точно оценивает запас прочности конструкции  $V^0$ , чем коэффициент  $n_o$ .

**2. Энергетический метод.** Пусть для мелкого разбиения конструкции  $V^0$  (см. введение) построено конечно-элементное решение. В центре тяжести конечного элемента  $V_e$  ( $e = 1, \dots, N$ ;  $N$  – общее количество конечного элемента) определяем эквивалентное напряжение  $\sigma_e^q$  по четвертой теории прочности. В силу мелкости разбиения считаем, что в области конечного элемента  $V_e$ :  $\sigma_e^q = const, e = 1, \dots, N$ . В этом случае удельную потенциальную энергию формоизменения  $\Pi_e^q$  конечный элемент  $V_e$  представим [1]

$$\Pi_e^q(\sigma_e^q) = (1 + \mu)(\sigma_e^q)^2 / (3E), e = 1, \dots, N, \quad (12)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Пусть в конечном элементе  $V_m$  ( $1 \leq m \leq N$ ) возникает максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_m^q$  конструкции  $V^0$ . В основе энергетического метода лежат следующие положения [4].

**Положение 2.1.** Считаем, что энергия  $\Pi_p^q$  опасного состояния конструкции  $V^0$  определяется обобщенной удельной потенциальной энергией формоизменения  $\Pi_m^0$  конечного элемента  $V_m$ , т.е. считаем, что  $\Pi_p^q = \Pi_m^0$ .

**Положение 2.2.** Энергию  $\Pi_m^0$  находим по формуле

$$\Pi_m^0 = \sum_{e=1}^N \Pi_e^m,$$

где  $\Pi_e^m$  – энергия, которую порождает конечный элемент  $V_e$  в конечном элементе  $V_m$  и которая представляется с помощью функции влияния  $F(r_m^m)$ ;  $F(r_m^m)$  – непрерывная убывающая функция;  $r_m^m$  – расстояние от центра тяжести конечного элемента  $V_m$  до точки  $M$  конструкции  $V^0$ ,  $F(0) = 1, F(\infty) = 0$ . Энергия  $\Pi_e^m$  имеет вид

$$\Pi_e^m = \Pi_e^q F(r_e^m),$$

где  $r_e^m$  – расстояние между центрами тяжести конечных элементов  $V_e$  и  $V_m$ .

**Положение 2.3.** Считаем, что прочность конструкции  $V^0$  эквивалентна прочности стержня  $L$  (образца), который состоит из такого же материала как и конструкция  $V^0$  и работает на растяжение, т.е. считаем, что

$$\Pi_m^0 = \Pi_c(\sigma_o^q) = (1 + \mu)(\sigma_o^q)^2 / (3E), \quad (13)$$

где  $\Pi_c$  – удельная энергия формоизменения;  $\sigma_o^q$  – напряжение стержня  $L$ .

**Положение 2.4.** Считаем, что конструкция  $V^0$  находится в опасном состоянии, если  $\Pi_m^0 = \Pi_c(\sigma_t)$ , т.е. согласно (13), если  $\sigma_o^q = \sigma_t$ , где  $\sigma_t$  – предел текучести; при циклическом нагружении  $\sigma_o^q = \sigma_n$  [1–3].

Принимаем  $F(r_m^m) = \exp(-r_m^m / r_o)$ , где  $2r_o$  – диаметр конечного элемента  $V_m$ . Тогда согласно положению 2.2 имеем

$$\Pi_e^m = \Pi_e^\Phi \exp(-r_e^m / r_o), \quad e = 1, \dots, N \quad (14)$$

Используя положение 2.2 и формулы (12), (14), энергию  $\Pi_m^0$  конечного элемента  $V_m$  представим

$$\Pi_m^0 = \frac{(1+\mu)}{3E} \sum_{e=1}^N (\sigma_e^3)^2 \exp(-r_e^m / r_o). \quad (15)$$

Сравнивая (13), (15), получаем

$$\sigma_o^3 = \sigma_m^3 \sqrt{1 + \sum_{e=1(e \neq m)}^N \alpha_e^2 \exp(-r_e^m / r_o)}, \quad (16)$$

где  $\alpha_e = \sigma_e^3 / \sigma_m^3$ ;  $\sigma_m^3 = \max(\sigma_1^3, \dots, \sigma_N^3)$ ;  $\alpha_e < 1$ , ибо  $\sigma_m^3 > \sigma_e^3$  при  $e = 1, \dots, N, e \neq m$ ;  $\sigma_o^3$  – обобщенное эквивалентное напряжение конструкции  $V^o$ .

Согласно энергетическому методу коэффициент запаса прочности  $n^3$  конструкции  $V^o$  (при статическом нагружении) определяем по формуле

$$n^3 = \sigma_T / \sigma_o^3. \quad (17)$$

В силу (16), (17) имеем зависимость  $n^3 = n^3(\sigma_1^3, \dots, \sigma_N^3)$ , т.е. коэффициент запаса  $n^3$  отражает характер распределения эквивалентных напряжений в конструкции  $V^o$ . Энергетический метод целесообразно применять для конструкций, которые имеют только один концентратор напряжений.

**Пример 2.** Пусть для конструкции  $V^o$  (см. п. 2) имеем  $\sigma_m^3 = \sigma_T$  и  $\sigma_e^3 = \sigma_T, e = 1, \dots, q, q \geq 2$  (в области  $S_p$ , состоящей из конечных элементов  $V_1, \dots, V_q$ , возникает пластическое состояние). Пусть конечный элемент  $V_1$  находится в центре области  $S_p$ . Используя (16), имеем

$$\sigma_o^3(q) = \sigma_T \sqrt{1 + \sum_{e=2}^q \exp(-r_e^m / r_o) + \sum_{e=q+1}^N \alpha_e^2 \exp(-r_e^m / r_o)},$$

где  $\alpha_e = \sigma_e^3 / \sigma_T$ ;  $\alpha_e < 1$ ;  $\alpha_e = 1$  для  $i = 1, \dots, q$ ;  $N$  – общее количество конечных элементов.

При увеличении  $q$  возрастает напряжение  $\sigma_o^3(q)$ , что в силу (17) приводит к уменьшению коэффициента  $n^3$  запаса прочности конструкции  $V^o$ , т.е. к уменьшению времени ее эксплуатации, что подтверждает практика. Коэффициент  $n_o$  при  $\sigma_m^3 = \sigma_T$  в силу (6) равен  $n_o = \sigma_T / \sigma_m^3 = 1$ , и с увеличением  $q$  значение коэффициента  $n_o$  не изменяется. Значит, в данном случае коэффициент  $n^3$  более достоверно оценивает прочность конструкции  $V^o$ , чем коэффициент  $n_o$ .

**Пример 3.** Пусть конструкция  $V^o$  (см. п. 2) имеет несколько концентраторов напряжений и в конечном элементе  $V_m, e = m (e = 1, \dots, N)$  возникает максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_m^3 (1 \leq m \leq N)$ . Равнонапряженная конструкция  $V^p$  имеет такое же разбиение, закрепление и нагружение, как и конструкция  $V^o$ . Эквивалентное напряжение конструкции

$V^p$  (посчитанное по четвертой теории прочности) равно  $\sigma_m^p (\sigma_m^p = \text{const}$  в области конструкции  $V^p)$ . Обобщенное эквивалентное напряжение  $\sigma_o^p$  для конструкции  $V^p$ :

$$\sigma_o^p = \sigma_m^p \sqrt{1 + \sum_{e=1(e \neq m)}^N \exp(-r_e^m / r_o)},$$

где  $\alpha_e < 1$ , при  $e = 1, \dots, N, e \neq m$ .

При  $\sigma_m^p = \sigma_m^3$ , используя представление (16), получаем неравенство

$$\sqrt{1 + \sum_{e=1(e \neq m)}^N \exp(-r_e^m / r_o)} > \sqrt{1 + \sum_{e=1(e \neq m)}^N \alpha_e^2 \exp(-r_e^m / r_o)},$$

$\alpha_e < 1, e \neq m$ , т.е.  $\sigma_o^p > \sigma_o^3$ .

Коэффициент запаса прочности (согласно энергетическому методу) для равнонапряженной конструкции  $V^p$  равен  $n_p^3 = \sigma_T / \sigma_o^p$ , для конструкции  $V^o - n^3 = \sigma_T / \sigma_o^3$ . Так как  $\sigma_o^p > \sigma_o^3$ , то  $n^3 > n_p^3$ . Это означает, что конструкция  $V^o$  более прочная, чем равнонапряженная  $V^p$  и срок службы конструкции  $V^o$  больше срока службы конструкции  $V^p$ . В связи с этим возникает вопрос об эффективности применения равнонапряженных конструкций. Использовать равнонапряженные конструкции вместо конструкций, для которых задан большой срок службы, нецелесообразно.

**3. Обобщенный метод.** В основе обобщенного метода лежат положения вероятностного и энергетического методов. Пусть конструкция  $V^o$  содержит  $q$  концентраторов напряжений,  $q \geq 2$ . Пусть для мелко-разбиения конструкции  $V^o$  построено конечно-элементное решение задачи упругости (см. п. 2). Пусть в конечных элементах  $V_1, \dots, V_q$  возникают максимальные эквивалентные напряжения концентраторов напряжений конструкции  $V^o$ . Области конечных элементов  $V_1, \dots, V_q$  обозначим через  $V^1, \dots, V^q$ , эквивалентные напряжения  $\sigma_1^3, \dots, \sigma_q^3$  – через  $\sigma_3^1, \dots, \sigma_3^q$ . Применяя в (16)  $\sigma_3^i, i = 1, \dots, q$  вместо  $\sigma_m^3$ , для области  $V^i$  вычисляем обобщенное эквивалентное напряжение  $\sigma_o^i$  по формуле

$$\sigma_o^i = \sigma_3^i \sqrt{1 + \sum_{e=1(e \neq i)}^N \alpha_e^2 \exp(-r_e^i / r_i)},$$

$\alpha_e < 1, \alpha_e = \sigma_e^3 / \sigma_3^i; e = 1, \dots, N, e \neq i; r_e^i$  – расстояние между центрами тяжести конечных элементов  $V_e$  и  $V^i$ ;  $2r_i$  – диаметр области  $V^i, i = 1, \dots, q$ . Пусть в конечном элементе  $V^m, 1 \leq m \leq q$ , возникает максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_m^3$  конструкции  $V^o (\sigma_m^3 = \max(\sigma_3^1, \dots, \sigma_3^q))$ . Тогда коэффициент запаса прочности  $n_o$  конструкции  $V^o$ , согласно четвертой теории прочности [1], равен  $n_o = \sigma_T / \sigma_m^3$ . Используя в (3), (8)  $\sigma_o^i, n_i^o$  вместо  $\sigma_3^i, n_i$ , находим

коэффициент запаса прочности  $n_i^o$  и вероятность  $p_i^o$  разрушения для областей  $V^i$  по формулам:

$$n_i^o = \sigma_T / \sigma_o^i, \quad p_i^o = 1 - n_i^o (1 - p_o) / n_o,$$

где  $i = 1, \dots, q$ ;  $p_o$  известно (задано).

Пусть  $p_i^o > 0$ , для  $i = 1, \dots, q$ . Тогда вероятность  $p_r^o$  разрушения конструкции хотя бы в одной из ее областей  $V^1, \dots, V^q$  равна  $p_r^o = 1 - \prod_{i=1}^q (1 - p_i^o)$ . Рассматривая в (11)  $p_r^o$  вместо  $p_r$ , определяем коэффициент запаса прочности  $n_r^o$  конструкции  $V^o$  по формуле

$$n_r^o = n_o \prod_{i=1}^q (1 - p_i^o) / (1 - p_o). \quad (18)$$

По положению 1.4, (18) и представлению  $F(n) = \beta n$  (см. п. 1), находим приближенное значение времени  $t_r^o$  эксплуатации (срока службы) конструкции  $V^o$  по формуле  $t_r^o = \beta n_r^o$  (где  $\beta$  находим с помощью испытаний), т.е.

$$t_r^o = \beta n_o \prod_{i=1}^q (1 - p_i^o) / (1 - p_o).$$

Отметим, что если конструкция  $V^o$  имеет циклическое нагружение, то вместо  $\sigma_T$  берем предельное

напряжение  $\sigma_n$  [2]. Анализируя полученные формулы вычисления  $n_r^o$ ,  $t_r^o$ , можно сделать следующий вывод. Значения  $n_r^o$  и  $t_r^o$  зависят от напряжения  $\sigma_T$  или  $\sigma_n$ , вероятностей возникновения разрушения  $p_1^o, \dots, p_q^o$  конструкции соответственно в областях  $V^1, \dots, V^q$ , вида нагружения конструкции  $V^o$ , вероятности  $p_r^o$  разрушения конструкции, от эквивалентных напряжений  $\sigma_1^o, \dots, \sigma_N^o$  областей конечных элементов  $V_1, \dots, V_N$  конструкции (т.е. от характера распределения эквивалентных напряжений в конструкции).

Пусть для коэффициента  $n$  запаса прочности конструкции  $V^o$  (который определен по 4-й теории прочности) задан диапазон  $[n_a; n_e]$ , т.е.  $n_a \leq n \leq n_e$ , где  $n_a \geq 1$ . Пусть при  $n_r^o = n_T$ , где  $n_T > 1$ , в одной точке конструкции  $V^{uc}$  возникает пластическое состояние. Тогда для коэффициентов  $n_r^o$  используем диапазон  $n_a^o \leq n_r^o \leq n_e^o$ , где  $n_a^o = n_a + C_r$ ;  $n_e^o = n_e + C_r$ ;  $C_r = n_T - 1$  (диапазон  $[n_a; n_e]$  смещается по оси  $n$  вправо на величину  $C_r$ ). При  $n_T < 1$  имеем  $n_a^o = n_a - C_p$ ;  $n_e^o = n_e - C_p$ ;  $C_p = 1 - n_T$  (диапазон  $[n_a; n_e]$  смещается по оси  $n$  влево на величину  $C_p$ ).

## Библиографический список

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев, 1975.
2. Москвичев В.В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. — Новосибирск, 2002.
3. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. — М., 1993.
4. Матвеев А.Д. Анализ прочности с учетом распределения напряжений в конструкциях // Деп. в ВИНТИ. №1298–В2006.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., 2003.