УДК 517.9

С.С. Кузиков

Граничное управление и наблюдение для симметрической системы

S.S. Kuzikov

Boundary Control and Observation for a Symmetrical System

Исследуются задачи управления для симметрической системы двух дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных положительной по К. Фридрихсу. В качестве управления берется одна из компонент искомой вектор-функции на участке границы, а минимизируемый функционал представляет собой квадрат нормы отклонения решения от заданной функции на другом куске границы. Для решения этой задачи предложен итерационный метод градиента. Градиент функционала находится с помощью решения сопряженной задачи.

Ключевые слова: симметрические системы, дифференциальные уравнения смешанного типа, оптимизация, градиент, алгоритм решения.

The paper studies control problems for the symmetrical system of two first-order differential equations in partial derivatives which are Friedrichs positive. One of the components on a sector of the boundary is taken as control. Functional to be minimized is the squared norm of the deviation from the solution of a given function on the other sector of the boundary. It is proposed to solve this problem by iterative gradient method. Functional gradient is found by solving a conjugative problem.

Key words: symmetrical systems, mixed-type differential equations, optimization, gradient, solving algorithm.

В работе предлагается метод решения задачи управления для симметрической системы двух дифференциальных уравнений первого порядка смешанного типа. В качестве управления выбираются граничные условия задачи, функционал представляет собой норму отклонения решения системы от некоторой заданной вектор-функции. Исследование краевых задач для симметрических систем имеет самостоятельный интерес. Для некоторых классов краевых задач, как правило, с однородными или периодическими краевыми условиями получен ряд глубоких результатов [1–9]. Однако для задач управления характерны неоднородные граничные условия, так как недостаточная гладкость функций, являющихся управлениями, или нецелесообразность зачастую не позволяют свести их к однородным. В связи с этим следует отметить работы С.М. Шугрина [10, 11], в которых исследована корректность некоторых задач для симметрических систем с неоднородными краевыми условиями.

В данной работе рассматриваемая система является линейным аналогом квазилинейной системы уравнений, описывающей плоское установившееся безвихревое течение невязкого газа [12]. Для прямой и сопряженной задач устанавливаются априорные оценки, которые позволяют доказать существование и единственность решений, что, в свою очередь, дает возможность установить дифференцируемость функционала и найти явный вид его градиента.

В области $\Omega=(-1,1)\times(0,1)$ пространства R^2 рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$Lu = Au_x + Bu_y + Du = f, \tag{1}$$

где $u=\left(u_1(x,y),u_2(x,y)\right)$, $f=\left(f_1(x,y),f_2(x,y)\right)$ – вещественные вектор-функции;

$$A=\begin{pmatrix} k(x) & a(x,y)\\ a(x,y) & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & b(x,y)\\ b(x,y) & 0\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} d_{11}(x,y) & d_{12}(x,y)\\ d_{21}(x,y) & d_{22}(x,y)\end{pmatrix} -$$

заданные матрицы. Предполагаются выполненными следующие условия:

А. $A,B\in C^1(\Omega)$, $D\in C(\Omega)$.

Б. $k_x\ge\delta=const>0$, $k(0)=0$, $|b(x,y)|\ge\delta$.

В. $2D\pm(A_x+B_y)\ge\delta E$, E – единичная матрица.

Г. $A|_{x=1}\ge\delta E$.

Здесь $C(\Omega), C^1(\Omega)$ – пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций.

Замечание 1. Отметим, что из условия (А) следует равномерная ограниченность евклидовых норм матриц A, B, D, а также норм производных матриц A и B с некоторой постоянной $M > 0$. Условие (Б) дает неравенство $|k(-1)| \geq \delta$. Тип системы (1) определяется знаком коэффициента $k(x)$. При $x < 0$ система имеет эллиптический тип, при $x > 0$ – гиперболический.

Будем рассматривать граничные условия вида

$$u_2(x,0) = u_2(-1,y) = 0,\ u_2(x,1) = \varphi(x), \quad -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ играет роль управления.

Обозначим $(u \mid v)$ скалярное произведение векторов из R^2. Посредством H_Ω и H_Γ обозначим пространство вектор-функций u_Ω и u_Γ, определенных на Ω и Γ, – граница области Ω, для которых конечны нормы

$$\|u\|_\Omega = \left(\int_\Omega (u \mid u)\,dxdy\right)^{1/2}, \quad \|u\|_\Gamma = \left(\int_\Gamma (u \mid u)\,ds\right)^{1/2}.$$

Посредством H определяется гильбертово пространство функций u = (u_Ω, u_Γ) с нормой

$$\|u\|_H^2 \leq \int_\Omega (u_\Omega, u_\Omega)\,dxdy + \int_\Gamma (u_\Gamma \mid u_\Gamma)\,ds$$

и скалярным произведением

$$(u,v)_H = \int_\Omega (u_\Omega, v_\Omega)\,dxdy + \int_\Gamma (u_\Gamma \mid v_\Gamma)\,ds.$$

В дальнейшем, когда ясно из текста, индексы Ω и Γ у функций будут опускаться. Линейное многообразие непрерывно дифференцируемых функций в Ω обозначим через G, $L_2(\Lambda)$ – пространство интегрируемых с квадратом функций на множестве Λ.

Покажем, что при выполнении условий (А)–(Г) имеет место

Лемма 1. Пусть функция u $u \in G$ и удовлетворяет граничным условиям (2), тогда имеет место неравенство:

$$\|u\|_H^2 \leq N\left(\|f\|_\Omega^2 + \int_{-1}^{1} \varphi^2(x)\,dx\right), \tag{3}$$

где $N = const$, не зависит от $f = Lu$ и $\varphi(x) = u_1(x, 1)$, $-1 \leq x \leq 1$.

Доказательство. Умножим уравнение (1) скалярно на $2u$ и проинтегрируем равенство по Ω (не ограничивая общности, считаем, что $b(x, y) > 0$ в $\overline{\Omega}$),

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega (Lu \mid u)\,dxdy &= \int_0^1 (Au \mid u)\big|_{x=-1}^{x=1}\,dy\,\big|_{y=1}\,dx + \\ &+2\int_{-1}^{1} (bu_1u_2)\big|_{y=0}^{y=1}\,dx + \int_\Omega \left((2D - A_x - B_y)u \mid u\right)dxdy \geq \\ &\geq \int_0^1 |k(-1)|\,u_1^2(-1,y)\,dy + \delta\int_0^1 (u \mid u)\big|_{x=1}\,dy - \\ &-\varepsilon\int_{-1}^{1} b(x,1)u_1^2\,dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} b(x,1)\varphi^2(x)\,dx + \delta\|u\|_\Omega^2. \end{aligned} \tag{4}$$

При получении этого неравенства использовались неравенства (В), (Г) и неравенство Юнга для оценки снизу интеграла $\int_{-1}^{1} b(x,1)u_1\varphi(x)\,dx$. Величина положительной постоянной ε, будет определена в дальнейшем.

Далее, уравнение (1) умножим скалярно на вектор $v = 2(y - 0{,}5)(u_2(x, y)\ k(x)u_1(x, y))$ и проинтегрируем по области Ω.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (Lu \mid v)\,dxdy = \\ &=\int_0^1 (y-0{,}5)\left(2ku_1u_2 + a\left(ku_1^2 + u_2^2\right)\right)\big|_{x=-1}^{x=1}\,dy + \\ &+\int_{-1}^{1} (y-0{,}5)\,b\left(u_1^2 + u_2^2\right)\big|_{y=0}^{y=1}\,dx + \\ &+\int_\Omega \Big((Du \mid v) - 2k_xu_1u_2 - a_xu_2^2 - (ka)_x u_1^2 - \\ &-\left((y-0{,}5)b\right)_y\left(u_1^2 + u_2^2\right)\Big)dxdy \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} bu_1^2\big|_{y=0}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} b\varphi^2\big|_{y=1}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} bu_1^2\big|_{y=1}\,dx - \\ &-N_1\left(\int_0^1 u_1^2\big|_{x=-1}\,dy + \int_0^1 (u \mid u)\big|_{x=1}\,dy + \|u\|_\Omega^2\right), \end{aligned} \tag{5}$$

,

где постоянная N_1 зависит только от M из замечания 1.

Оценим левые части неравенств (4) и (5) соответственно как

$$2\int_\Omega (Lu \mid u)\,dxdy \leq \frac{\delta}{4}\|u\|_\Omega^2 + \frac{\delta}{4}\|Lu\|_\Omega^2 = \frac{\delta}{4}\|u\|_\Omega^2 + \frac{\delta}{4}\|f\|_\Omega^2.$$

и

$$\int_\Omega (Lu \mid v)\,dxdy \leq \|u\|_\Omega^2 + N_2\|Lu\|_\Omega^2 = \|u\|_\Omega^2 + N_2\|f\|_\Omega^2,$$

где $N_2 = const > 0$ зависит только от M.

Складывая неравенства (4) и (5), предварительно умножив (5) на $\dfrac{\delta}{4(N_1+1)}$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{2}\|u\|_\Omega^2 + \left(\frac{\delta}{8(N_1+1)} - \varepsilon\right)\int_{-1}^{1} bu_2^2\big|_{y=1}\,dx + \\ &+\frac{\delta}{8(N_1+1)}\int_{-1}^{1} bu_1^2\big|_{y=0}\,dx + \frac{\delta}{8(N_1+1)}\int_{-1}^{1} bu_1^2\big|_{y=1}\,dx + \\ &\left(\delta - \frac{\delta N_1}{4(N_1+1)}\right)\left(\int_0^1 u_1^2\big|_{x=-1}\,dy + \int_0^1 (u \mid u)\big|_{x=1}\,dy\right) \leq \\ &\leq \left(\frac{4}{\delta} + \frac{N_2\delta}{4(N_1+1)}\right)\int_{-1}^{1} b(x,1)\varphi(x)\,dx. \end{aligned}$$

Положив $\varepsilon = \dfrac{\delta}{16(N_1+1)}$ и учитывая, что $b(x, y) \geq \delta$, полученное неравенство приведем к виду:

$$\begin{aligned} &\left\|u^2\right\|_\Omega^2 + \int_0^1 u_1^2\big|_{x=-1}\,dy + \int_0^1 (u \mid u)\big|_{x=1}\,dy + \\ &+\int_{-1}^{1} u_2^2\big|_{y=0}\,dx + \int_{-1}^{1} u_1^2\big|_{y=1}\,dx \leq N\left(\|f\|_\Omega^2 + \int_{-1}^{1}\varphi^2 dx\right), \end{aligned}$$

где величина N зависит только от δ и M. Очевидно, что полученное неравенство, с учетом граничных условий (2), эквивалентно неравенству (3).

Рассмотрим задачу, которую назовем формально сопряженной к задаче п. 1.

$$L^* v = -(Av)_x - (Bv)_y + D^* v = g, \tag{6}$$

где $v = (v_1, v_2)$, $g = (g_1, g_2)$, а D^* – транспонированная матрица D.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{gathered} v_2(x,0) = v_2(x,1) = (kv_1 + av_2)|_{x=-1} = 0 \\ v|_{x=1} = r(y) = (r_1(y), r_2(y)), \quad -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1. \end{gathered} \tag{7}$$

При выполнении условий (А)–(Г), как и в п. 1, может быть доказана

Лемма 2. Пусть функция $v \in G$ и удовлетворяет граничным условиям (7), тогда имеет место

$$\|v\|_H^2 \le N^* \left(\|g\|_\Omega^2 + \int_0^1 (r \mid r)\, dy \right), \tag{8}$$

где постоянная N^* зависит только от δ и M.

Пусть $u, v \in G$, тогда, посредством интегрирования по частям выражения $(Lu \mid v)$, получим равенство

$$\int_\Omega (Lu \mid v)\, dxdy - \int_{-1}^1 bu_1 v_2 |_{y=0}^{y=1} dx + \int_0^1 (av_1 - av_2) u_2 |_{x=-1} dy =$$
$$= \int_\Omega (L^* v \mid u)\, dxdy + \int_{-1}^1 bv_1 u_2 |_{y=0}^{y=1} dx - \int_0^1 (kv_1 + kv_2) u_1 |_{x=-1} dy +$$
$$+ \int_0^1 ((kv_1 + av_2) u_1 + (av_2 + v_1) u_2)|_{x=-1} dy.$$

Поскольку множество G плотно в H, то, как нетрудно видеть, система однородных краевых условий (2) порождает однородную систему (7) и наоборот, т.е. системы краевых условий (2) и (7) являются сопряженными. Кроме того, доказанные оценки (3) и (8) позволяют классифицировать их как правильные [7].

Далее по стандартной схеме определяются слабые и сильные расширения операторов исходной и сопряженной задач при выбранных граничных условиях. Неравенства (3) и (8) гарантируют существование хотя бы одного слабого решения из H [7, т. 3] каждой из задач, которые определяются как функции из H, удовлетворяющие интегральным тождествам:

$$\int_\Omega \left(u \mid -(Aw)_x - (Bw)_y + D^* w \right) dxdy +$$
$$+ \int_{-1}^1 bw_1 u_2 |_{y=0}^{y=1} dx \int_0^1 (kw_1 + aw_2) u_1 |_{x=-1} dy +$$
$$+ \int_0^1 ((kw_1 + aw_2) u_1 + (aw_1 - w_2) u_2)|_{x=1} dy =$$
$$= \int_\Omega (f \mid w)\, dxdy - \int_{-1}^1 bw_1 \varphi |_{y=1} dx,$$

$$\int_\Omega \left(v \mid Aw_x + Bw_y + Dw \right) dxdy - \int_{-1}^1 bw_2 v_1 |_{y=0}^{y=1} dx +$$
$$+ \int_0^1 (av_1 - v_2) w_2 |_{x=-1} dy = \int_\Omega (g \mid w)\, dxdy + \tag{9}$$
$$+ \int_0^1 ((kr_1 + ar_2) w_2 + (ar_1 - r_2)|_{x=1}) dy,$$

где $f, g \in H_\Omega$, $\varphi \in L_2[-1,1]$, $r_1, r_2 \in L_2[0,1]$, а $w \in G$ – произвольная функция.

Покажем, что полученные решения краевых задач определяются однозначно. Допустим, что у сопряженной задачи при заданных g и r существуют два решения V_1 и V_2, такие, что $\|V_1 - V_2\|_H \ne 0$. Полагая $V_1 - V_2 = v$, из равенства (9) получим:

$$\int_\Omega \left(v \mid Aw_x + Bw_y + Dw \right) dxdy - \int_{-1}^1 bw_1 v_2 |_{y=0}^{y=1} dx +$$
$$+ \int_0^1 (av_1 - v_2) w_2 |_{x=-1} dy = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим специальные операторы осреднения. Пусть $\omega(\xi)$ – четная бесконечно дифференцируемая функция одного переменного, причем $\omega(\xi) \ge 0$, $\omega(\xi) = 0$ при $\|\xi\| \ge 1$ и $\int_{-1}^1 \omega(\xi) d\xi = 1$. Положим

$$w_1(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Omega \omega\left(\frac{\sigma_1^\varepsilon x - x'}{\varepsilon} \right) \omega\left(\frac{\sigma_2^\varepsilon y - y' + 2\varepsilon}{\varepsilon} \right) \times$$
$$\times u_1(x', y')\, dx'dy' = J_1^1 J_2^1 u_1 = J_1^\varepsilon u_1,$$
$$w_2(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Omega \omega\left(\frac{x - x' - 2\varepsilon}{\varepsilon} \right) \omega\left(\frac{y - \sigma_2^\varepsilon y' + 2\varepsilon}{\varepsilon} \right) \times$$
$$\times u_2(x', y')\, dx'dy' = J_1^2 J_2^2 u_2 = J_2^\varepsilon u_2,$$

где $\sigma_1^\varepsilon = 1 - 2\varepsilon$, $\sigma_2^\varepsilon = 1 - 4\varepsilon$, а J_i^j соответствующие операторы осреднения. Функция $w = (w_1, w_2)$ удовлетворяет однородным краевым условиям (2) для любой $u \in H_\Omega$. Из (10) получаем

$$\int_\Omega \Big(-k\sigma_1^\varepsilon (J_1^{*\varepsilon} v_1)_x - a\sigma_1^\varepsilon (J_1^{*\varepsilon} v_2)_x - b\sigma_2^\varepsilon (J_1^{*\varepsilon} v_2)_y +$$
$$+ d_{11} J_1^{*\varepsilon} v_1 + d_{12} J_1^{*\varepsilon} v_2 \Big) u_1 dxdy - \int_\Omega \Big(a (J_2^{*\varepsilon} v_1)_x - (J_2^{*\varepsilon} v_2)_x -$$
$$- b \frac{1}{\sigma_2^\varepsilon} (J_2^{*\varepsilon} v_1)_y + (d_{12} J_2^{*\varepsilon} v_1 + d_{22} J_2^{*\varepsilon} v_2) u_2 + \tag{11}$$
$$+ (\eta\eta_\varepsilon \mid u) \Big) dxdy = \int_\Omega (\tilde{L}^* v + \eta\eta_\varepsilon \mid u)\, dxdy = 0,$$

где, по лемме К. Фридрихса [7], $\|\eta\eta_\varepsilon\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $J_1^{*\varepsilon}$, $J_2^{*\varepsilon}$ – операторы осреднения сопряженные J_1^ε, J_1^ε.

Пусть $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ – функции, определяемые посредством

$$p_1 = \mu\left(-k(-1)J_1^2J_2^1v_1 - a(-1,y)J_1^2J_2^1v_2 + \right.$$
$$\left. + a^2(-1,y)\dot{J}_1^2J_2^1v_1 + a(-1,y)\dot{J}_1^2J_2^1v_2\right),$$
$$p_2 = \mu\left(a(-1,y)k(-1)J_1^2J_2^1v_1 + a^2(-1,y)J_1^2J_2^1v_1 - \right.$$
$$\left. - k(-1)a(-1,y)\dot{J}_1^2J_2^1v_1 + \dot{J}_1^2J_2^1v_2\right),$$
$$q_1 = \dot{J}_1^1J_2^1v_1,\ q_2 = \dot{J}_1^2J_2^2v_2,\ \mu = \frac{1}{a^2(-1,y) - k(-1)}.$$

Функция $\tilde{v} = \frac{1}{2}\left((1-x)p + (1+x)q\right)$ удовлетворяет однородным краевым условиям (7) и $\|\tilde{v} - v_\Omega\|_\Omega \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Преобразуем равенство (11) к следующему виду:

$$\int_\Omega \left(L^*\tilde{v} + \tilde{f} \mid u\right)dxdy = 0\,, \qquad (12)$$

где $\tilde{f} = \eta_\varepsilon + \tilde{L}^*v - L^*\tilde{v}$.

Свойства операторов осреднения [6] позволяют доказать, что $\left\|\tilde{f}\right\|_\Omega \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так как u произвольно, то из (12) следует, что $L^*\tilde{v} + \tilde{f} = 0$. Для этого уравнения верна оценка (8), т.е.

$$\|\tilde{v}\|_H \le N^*\left\|\tilde{f}\right\|_\Omega,$$

из которой следует, что $\|\tilde{v}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $\|v_\Omega\|_\Omega = 0$. Из равенства (10) получаем, что $\int_{-1}^{1} bw_1v_{2\Gamma}\big|_{y=0}^{y=1}dx + \int_0^1 \left(av_{1\Gamma} - v_{2\Gamma}\right)w_2\big|_{x=-1}dy = 0$. Так как множество G плотно в H, то из этого равенства и условий (7) следует, что $v_\Gamma = 0$.

Аналогичные рассмотрения позволяют доказать, что решение задачи (1), (2) единственно. Таким образом, имеет место

Теорема. При выполнении условий (А)–(Г), для любых $f,\ g \in H_\Omega$, $\varphi \in L_2(-1,1)$, $r_1, r_2 \in L_2(0,1)$ задачи (1), (2) и (6), (7) имеют единственное решение из H.

Теперь рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(\varphi) = \int_{-1}^{1}\left(\left(u_1(x,0) - p(x)\right)^2\right)dx\,, \qquad (13)$$

где $u = (u_1, u_2)$ – решение задачи (1), (2), в которой $\varphi(x)$ является управлением, а $p = p(x) \in L_2(0,1)$ – заданная функция.

Доказанная разрешимость задачи (1), (2), свойства решения позволяют утверждать, что если последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится слабо в $L_2(-1,1)$ к φ, то $J(\varphi_k) \to J(\varphi)$, т.е. функция (13) слабо непрерывна на $L_2(-1,1)$. Из [13, т. 3.2] следует, что в задаче (1), (2), (13) множество U_* оптимальных управлений не пусто. Покажем, что функция (13) дифференцируема в $L_2(-1,1)$. Для этого возьмем произвольные управления φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Пусть $u(x, y, \varphi)$ и $u(x, y, \varphi + \Delta\varphi)$ – соответствующие решения задачи (1), (2). Обозначим $\Delta u = u(x, y, \varphi + \Delta\varphi) - u(x, y, \varphi)$. Очевидно, что Δu является обобщенным решением задачи

$$L\Delta u = 0, \qquad (14)$$

$$\Delta u_2\big|_{y=0} = 0,\ \Delta u_2\big|_{x=-1} = 0,\ \Delta u_2\big|_{y=1} = \Delta\varphi\,. \qquad (15)$$

Приращение функции (13) можно записать в виде

$$\Delta J(u) = J(\varphi + \Delta\varphi) - J\varphi =$$
$$= \int_{-1}^{1} 2\left(\left(u_1(x,0) - p(x)\right)\Delta u_1\right)dx +$$
$$+ \int_{-1}^{1}\left(\Delta u \mid u\right)\big|_{y=0}\,dx.$$

Покажем, что

$$\int_{-1}^{1} 2\left(\left(u_1(x,0) - p(x)\right)\Delta u_1\right)dx = \int_{-1}^{1} b(x,1)v_1(x,1)\Delta\varphi(x)dx, \qquad (16)$$

где $v = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ – обобщенное решение задачи

$$L^*v = 0\,, \qquad (17)$$

$$\begin{gathered} v_2(x,0) = 2\left(u_1(x,0) - p(x)\right),\ \left(kv_1 + av_2\right)\big|_{x=-1} = 0, \\ v_1(1,y) = v_2(1,y) = 0, \quad -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1. \end{gathered} \qquad (18)$$

Действительно, с учетом (14), (15), (17), (18), получим

$$\int_\Omega \left(L\Delta u \mid v\right) = \int_\Omega \left(\Delta u \mid L^{*v}\right) + \int_{-1}^{1} bv_1\Delta\varphi\big|_{y=1}\,dx -$$
$$- \int_{-1}^{1} bv_2\Delta u_1\big|_{y=0}\,dx,$$

отсюда и следует равенство (16).

Из оценки (3) следует, что $\int_{-1}^{1}\left(\Delta u \mid \Delta u\right)\big|_{y=0}\,dx \le$ $\le N\int_{-1}^{1}\Delta\varphi^2dx$. Следовательно, линейная часть приращения $\Delta J(\varphi)$ равна $-\int_{-1}^{1} b(x,1)v_1(x,1)\Delta\varphi dx$, откуда получаем явный вид градиента $J(\varphi)$:

$$J'(\varphi) = b(x,1)v_1(x,1)\,. \qquad (19)$$

Таким образом, для получения градиента функции (13), при фиксированном φ, нужно решить две краевые задачи: сначала из (1), (2) определяется функция $u(x, y, \varphi)$, затем в (18) нужно подставить полученное значение $u_1(x, 0, \varphi)$ и из (17), (18) найти $v(x, y)$ и, наконец, $v_1(x, 1)$ подставить в (19).

Для численного решения краевых задач (1), (2), (17), (18) можно использовать разностные схемы, приведенные и исследованные в [12, 14, 15]. Для построения минимизирующей последовательности $\{\varphi_k\}$ применяется один из градиентных методов [13].

Библиографический список

1. Friedrichs K.O. The identity of weak and strong extensions of differential operators // Trans. Amer. Math. – 1944. – V. 55.

2. Friedrichs K.O. Symmetric hyperbolic linear differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1954. – V. 11.

3. Friedrichs K.O. Symmetrical positive linear differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1958. – V. 11.

4. Агранович М.С. О положительных граничных задачах для некоторых систем первого порядка // Труды Московского математического общества. – 1967. – Т. 16.

5. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев, 1965.

6. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // УМН. – 1959. – Т. 14, вып. 3.

7. Дезин А.А. Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка // Математический сборник. – 1959. – Т. 49, №4.

8. Мозер Ю. Быстросходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // УМН. – 1968. – Т. 23, вып. 4.

9. Peyser G. Symmetric positive system in corner domains // Journal of Differential Equations. – 1975. – V. 18.

10. Шугрин С.М. Симметричные дифференциальные уравнения // Сибирский математический журнал. – 1970. – Т. 11, №3.

11. Шугрин С.М. Сильное и слабое расширение дифференциальных операторов // ДУ. – 1975. – Т. 11, №11.

12. Кузиков С.С. Об одном методе расчета околозвуковых течений в плоских соплах // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. – 1976. – Вып. 25.

13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М., 1981.

14. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. – Новосибирск, 1993.

15. Кузиков С.С. К методам решения обратных задач трансзвуковой газовой динамики // Известия АлтГУ. – 2010. – №1(65).