УДК 534.13+532.582+532.581

А.А. Коробкин, А.А. Папин, К.А. Шишмарев

Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн*

A.A. Korobkin, A.A. Papin, K.A. Shishmarev

Behavior of Ice Sheet Channel Under the Influence of Surface Waves

Для уравнений совместного движения воды и ледового покрова канала формулируется начально-краевая задача в случае, когда ледовый покров закреплен на стенках канала. Проводится аналитическое исследование задачи и предлагается алгоритм численного решения.

Ключевые слова: ледовой покров канала, поверхностные волны, дисперсионное соотношение.

Initial-boundary value problem, when ice cover is fixed to the channel walls, for the equations of combined motion of water and ice sheet channel is considered. Analytical study of the problem and numerical algorithm was proposed.

Key words: ice sheet channel, surface waves, dispersion relation.

1. Постановка задачи. В рамках линейного приближения рассматривается безвихревое движение жидкости в канале шириной b и высотой H, покрытом льдом. Потенциал $\varphi(x,y,z,t)$ скоростей течения жидкости удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$
$$(-H<z<0,\ 0<y<b,\ -\infty<x<\infty),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad (y=0,b),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\quad (z=-H),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=w_t,\quad (z=0),$$

здесь $w(x,y,t)$ – прогиб ледовой поверхности.

Интеграл Бернулли берется в виде

$$\frac{1}{\rho}p+\varphi_t+gw=0,$$

где p – давление; ρ – плотность воды; g – ускорение свободного падения [1].

Функция $w(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению вида [2,3]

$$mw_{tt}+D\nabla^4 w=p(x,y,0,t),$$
$$(0<y<b,\ -\infty<x<\infty)$$

и условиям

$$w=w_y=0,\quad (y=0,b),$$

где m – масса покрова на единицу площади ($m=\rho_i h_i$; h_i – толщина покрова); ∇ – оператор градиента.

Изгибная жесткость D вычисляется по формуле $D=Eh_i^3/[12(1-\nu^2)]$, где E – модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона для льда. Толщина льда h_i и его плотность ρ_i считаются постоянными. Краевые условия для w означают, что ледовое покрытие приморожено к стенкам канала.

Решение сформулированной задачи для w ищется в виде $w(x,y,t)=AF(y/b)\sin(kx+\omega t)$, где $A=const$ – амплитуда волны; $k=const$ – волновое число; $\omega=const$ – частота волны; искомая функция $F(\tilde y)$, $\tilde y=\frac{y}{b}$, удовлетворяет условиям $F=F'=0$ при $\tilde y=0$, $\tilde y=1$.

В безразмерных переменных (знак тильда опускается) исходная задача для w сводится к следующей задаче относительно F и λ

$$\frac{d^4F}{dy^4}-2K^2\frac{d^2F}{dy^2}+(K^4+æ)F(y)=$$
$$=\lambda(\alpha+\Lambda(K))F,\quad (0<y<1),\qquad (1)$$

$$F=F_y=0,\quad (y=0,1),$$

где $K=kb$; $\alpha=m/(\rho b)$; $\lambda=\omega^2\rho b^5/D$; $æ=\rho g b^4/D$.

Учитывая условие $\varphi_z=w_t$ и вид функции w, потенциал скоростей φ будем искать в виде $\varphi=A\phi(y,z)\cos(kx+\omega t)$, где $\phi(y,z)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=K^2\phi,\quad (-h<z<0,\ 0<y<1),$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)»(проект №2.2.2.4/4278), а также федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственные контракты №14.740.11.0355, №14.740.11.0878).

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (y = 0, 1),$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (z = -h),$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F(y), \quad (z = 0),$$

где $\Lambda(K) < F >= \phi(y,0)$ и $h = H/b$.

Требуется построить дисперсионную зависимость $\omega(k)$ и соответствующие функции $F(y)$. Полученный результат будет использован для изучения возможности разрушения ледового покрова в канале движущимся судном на воздушной подушке. Ранее подобные задачи о ледовом покрове в канале не рассматривались. Задачи с одной вертикальной стенкой исследовались в [4, 5] для плоского и трехмерного случаев соответственно.

2. Поверхностные прогрессивные волны в канале. В дальнейшем для краткости используется обозначение $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_x$. Рассмотрим задачу о безвихревом движении идеальной жидкости в канале со свободной границей $z = \eta(x, y, t)$:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0,$$
$$(0 < y < b, \ -H < z < 0, -\infty < x < +\infty),$$
$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + g\varphi_z = 0, &\quad (z = 0), \\ \varphi_y = 0, &\quad (y = 0, b), \\ \varphi_z = 0, &\quad (z = -H), \\ \eta(x, y, t) = -\frac{1}{g}\varphi_t(x, y, 0, t). & \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\eta(x, y, t)$ – возвышение свободной границы.

Как и для гидроупругих волн, ищем решение в виде $\eta(x, y, t) = AF(y)\sin(kx + \omega t)$. Поэтому для φ используем представление $\varphi(x, y, z, t) = A\phi(y, z)\cos(kx + \omega t)$. Тогда задача (2) принимает вид

$$-k^2\phi + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0, \quad (0 < y < b, \ -H < z < 0),$$
$$\begin{aligned} -\omega^2\phi + g\phi_z = 0, &\quad (z = 0), \\ \phi_y = 0, &\quad (y = 0, b), \\ \phi_z = 0, &\quad (z = -H), \\ F(y) = \omega\phi(y, 0). & \end{aligned} \tag{3}$$

Нетривиальные решения задачи (3) ищем в виде $\phi(y, z) = f(y)u(z)$. Тогда $f''u + fu'' = k^2 fu$, т.е. $f''/f = -\mu^2$ и $f' = 0$ при $y = 0, b$. Следовательно, $f(y) = \cos(\mu y)$, а из условия $f'(b) = 0$ вытекает равенство $\sin(\mu b) = 0$. Поэтому собственные значения $\mu = \mu_n$ удовлетворяют равенству $\mu_n b = \pi n, \quad (n \geq 0)$.

После этого вернемся к задаче (3) и, заменив μ на μ_n, приходим к следующей задаче для $u(z) = u_n(z)$

$$u''{}_n = (k^2 + \mu_n^2)u_n, \quad u(-H) = 0, \quad (-H < z < 0).$$

Решение последней имеет вид

$$u_n(z) = C_1 \cosh[\sqrt{k^2 + \mu_n^2}]z, \tag{4}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Дисперсионное соотношение (зависимость ω от k) получим из краевого условия $\varphi_{tt} + g\varphi_z = 0$ на свободной границе:

$$-\omega^2 f(y)u(0) + gf(y)u'(0) = 0.$$

Откуда следует, что $-\omega^2 u + gu' = 0$. Подставляя (4) в последнее уравнение, выводим

$$\omega^2 = g\sqrt{k^2 + \mu_n^2}\tanh[\sqrt{k^2 + \mu_n^2}H]. \tag{5}$$

Таким образом, для каждого номера n имеется свое дисперсионное соотношение, определяющее волновое число k_n для заданной частоты ω.

Заметим, что для плоских волн в канале (η не зависит от y и, следовательно, $F(y) = \omega C_1 \cos(\mu_n y) = const$) имеем $\mu_n = 0$, т.е. $n = 0$ и дисперсионное соотношение (5) представляется в виде

$$\omega^2 = gk_0 \tanh(k_0 H). \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), выводим, что при $n \geq 1$

$$k_n^2 + \mu_n^2 = k_0^2. \tag{7}$$

Отсюда

$$k_n = (k_0^2 - [\pi n/b]^2)^{1/2}.$$

Волны с номерами $n \geq 1$ существуют только для таких n, что k_n в (7) вещественное, т.е. при выполнении неравенства $\frac{\pi n}{b} < k_0$, т.е. $n < \frac{bk_0}{\pi}$.

Замечание 1. Профиль волны в поперечном сечении канала с точностью до постоянного множителя можно представить в виде

$$F_n(y) = \cos(\pi ny/b). \tag{8}$$

Для волны с $k_n, n \geq 1$, свободная граница $z = \eta(x, y, t)$ в сечении $x = x_*$ имеет вид

$$\eta(x, y, t) = A\cos(\pi n(y/b))\sin(kx_* + \omega t).$$

Если центр системы координат движется вместе с такой волной, перемещаясь вдоль канала со скоростью ω/k_n, то в такой подвижной системе форма волны не изменяется.

Вычислим групповую скорость C_n^g, $(n > 0)$ и сравним ее с групповой скоростью C_0^g двумерных волн $(n = 0)$. По определению $C_0^g = d\omega/dk_0$, где $\omega(k_0)$ определяется формулой (6). Представим формулу (6) следующим образом: $\omega^2 = \Omega(k_0)$, где $\Omega(k_0) = gk_0 \tanh(k_0 H)$. Тогда дисперсионное соотношение (7) запишется в виде

$$\omega^2 = \Omega(\sqrt{k_n^2 + \mu_n}).$$

Справедливы равенства

$$2\omega\frac{d\omega}{dk_n} = \Omega'(\sqrt{k_n^2+\mu_n^2})\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2+\mu_n^2}} = 2\omega C_n^g,$$

$$2\omega\frac{d\omega}{dk_0} = \Omega'(k_0) = 2\omega C_0^g.$$

Поскольку $k_n^2+\mu_n^2 = k_0^2$ для волны с номером n (при фиксированной частоте), то получаем следующую связь

$$2\omega C_n^g = \Omega'(k_0)\frac{k_n}{k_0} = 2\omega C_0^g\frac{k_n}{k_0},$$

т.е. $C_n^g = C_0^g\sqrt{k_0^2-\mu_n^2}/k_0$. Следовательно, групповая скорость C_n^g меньше групповой скорости C_0^g при той же частоте ω.

Замечание 2. Для глубокой воды можно получить явные формулы для $k_n(\omega)$. Полагая $H=\infty$ в (5), находим

$$\omega^4/g^2 = k_n^2+\mu_n^2,$$

$$k_n = (\omega^4/g^2-\mu_n^2)^{1/2} = \frac{\omega^2}{g}(1-[\frac{\mu_n g}{\omega^2}]^2)^{1/2}.$$

Здесь $\omega^2/g = k_0$. Окончательно,

$$k_n = k_0(1-[\pi n g/\omega^2 b]^2)^{1/2}.$$

Следовательно, при $\frac{\omega^2 b}{\pi g} < 1$ имеем только 0-волну. При $1 < \frac{\omega^2 b}{\pi g} < 2$ волны с номерами 0 и 1 и т.д.

Дисперсионное соотношение (5) показывает, что при $n \geq 0$ имеем счетное число зависимостей $\omega = \omega_n(k)$. Отметим также, что формы (8) ортогональны друг другу.

3. Ортогональность решений (1)**, полученных при различных** λ. Предположим, что имеется счетное число собственных чисел λ_n, $n \geq 1$, $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n$ и соответствующих собственных функций $F_n(y)$. Покажем ортогональность системы F_n. Умножим уравнение (1) на $F_m(y)$ и проинтегрируем результат по y от нуля до единицы:

$$\int_0^1 F_m F_n^{iv} dy - 2K^2\int_0^1 F_m F_n'' dy + (K^4+æ)\int_0^1 F_m F_n dy =$$

$$= \lambda_n[\alpha\int_0^1 F_m F_n dy + \int_0^1 \phi_n(y,0)F_m(y)dy]. \quad (9)$$

Вычислим каждый интеграл в (9) с учетом краевых условий в (1) и определения $\phi_n(y,0)$. Для первого и второго слагаемых левой части имеем

$$\int_0^1 F_m F_n^{iv} dy = \int_0^1 F_m dF_n''' = -\int_0^1 F_n''' F_m' dy =$$

$$= -\int_0^1 F_m' dF_n'' = \int_0^1 F_m'' F_n'' dy,$$

$$\int_0^1 F_m F_n'' dy = \int_0^1 F_m dF_n' = -\int_0^1 F_m' F_n' dy.$$

Чтобы вычислить последний интеграл в (9), рассмотрим следующую задачу для $\phi_n(y,z)$

$$\nabla^2\phi_n = K^2\phi_n, \quad (0<y<1,\ -h<z<0), \quad (10)$$

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial y} = 0, \quad y = 0,1,$$

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial z = 0}, \quad z = -h,$$

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial z} = F_n(y), \quad (z=0,\ 0<y<1).$$

Умножим уравнение (10) на $\phi_m(y,z)$ и проинтегрируем результат по $\Omega = \{0<y<1, \quad -h<z<0\}$. Получим

$$\int_\Omega \phi_m\nabla^2\phi_n dydz = K^2\int_\Omega \phi_m\phi_n dydz.$$

Используя теорему Грина, выводим

$$\int_\Omega \phi_m\nabla^2\phi_n dydz =$$

$$= \int_0^1 \phi_m(y,0)\frac{\phi_n}{\partial z}(y,0) - \int_\Omega \nabla\phi_m\nabla\phi_n dydz =$$

$$= \int_0^1 \phi_m(y,0)F_n(y)dy - \int_\Omega \nabla\phi_m\nabla\phi_n dydz.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \phi_m(y,0)F_n(y)dy = K^2\int_\Omega \phi_m\phi_n dydz +$$

$$+ \int_\Omega \nabla\phi_m\nabla\phi_n dydz. \quad (11)$$

Чтобы получить последний интеграл в (9), в формуле (11) поменяем n и m местами:

$$\int_0^1 \phi_n(y,0)F_m(y)dy = \int_\Omega (\nabla\phi_n\nabla\phi_m + K^2\phi_n\phi_m)dydz.$$

Тогда равенство (9) можно записать в следующем виде

$$\int_0^1 F''_m F''_n dy + 2K^2 \int_0^1 F'_m F'_n dy + (K^4 + æ) \int_0^1 F_m F_n dy =$$

$$= \lambda_n [\alpha \int_0^1 F_m F_n dy + \int_\Omega (\nabla\phi_m \nabla\phi_n + K^2 \phi_m \phi_n)]. \quad (12)$$

Заметим, что равенство (12) не изменяется при замене n на m. Заменим n на m в (12) и вычтем полученное равенство из (12). Получим

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m)[\alpha \int_0^1 F_m F_n dy +$$

$$+ \int_\Omega (\nabla\phi_m \nabla\phi_n + K^2 \phi_m \phi_n) dydz].$$

Откуда следует, что при $n \neq m$ функции $F_n(y)$ и $F_m(y)$ ортогональны в следующем смысле

$$\alpha \int_0^1 F_m(y) F_n(y) dy +$$

$$+ \int_\Omega (\nabla\phi_m \nabla\phi_n + K^2 \phi_m \phi_n) dydz = 0 \quad (n \neq m), \quad (13)$$

где ϕ_n и ϕ_m – решения задачи (10) для $F_n(y)$ и $F_m(y)$ соответственно.

Замечание 3. Если правая часть в (1) равна 0, то условие ортогональности (13) принимает вид

$$\int_0^1 F_m(y) F_n(y) dy \equiv 0.$$

4. Алгоритм численного решения задачи (1)**.** Определим ортонормированную систему функций $\{\psi_n(y)\}_{n=1}^\infty$ на интервале (0, 1) как решения следующей спектральной задачи

$$\begin{gathered} \psi_n^{iv} = \beta_n^4 \psi_n, \quad (0 < y < 1), \\ \psi_n = \psi'_n = 0, \quad (y = 0, 1), \\ \int_0^1 \psi_n^2(y) dy = 1, \quad \int_0^1 \psi_n \psi_m dy = 0 \quad (n \neq m). \end{gathered} \quad (14)$$

Функции $\psi_n(y)$ называются балочными функциями. Они дают формы колебаний балки постоянного поперечного сечения, защемленной на обеих концах; соответствующие собственные значения β_n связаны с собственными частотами колебаний балки.

Решение задачи (1) будем искать в виде

$$F(y) = \sum_{n=1}^\infty a_n \psi_n(y). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (1) и используя (14), получим систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов a_n и параметра λ. Система имеет бесконечное число уравнений. При ее приближенном решении ограничиваемся конечным числом N уравнений и находим собственные числа полученной матрицы. Проводя расчеты при различных N, получаем последовательности вида

$$\begin{array}{llll} \lambda_1^{N_0}, & \lambda_1^{N_0+1}, & \lambda_1^{N_0+2}, & \ldots \\ \lambda_2^{N_0}, & \lambda_2^{N_0+1}, & \ldots & \\ \vdots & & & \\ \lambda_k^{N_0}, & \lambda_k^{N_0+1}, & \ldots, & \end{array}$$

сходимость которых при фиксированном k и растущем N проверяется численно.

Функции $\psi_n(y)$ вычисляются аналитически, а собственные значения β_n – численно.

Подставляя (15) в (1) и умножая обе части полученного равенства на $\psi_m(y)$, после интегрирования y с учетом (14) приходим к равенству:

$$a_m \beta_m^4 + 2K^2 \sum_{n=1}^\infty a_n C_{nm} + (K^4 + æ) a_m =$$

$$= \lambda(\alpha a_m + b_m), \quad (16)$$

где

$$b_m = \int_0^1 \psi_m(y) \phi(y, 0) dy,$$

$$C_{nm} = -\int_0^1 \psi''_n \psi_m dy = \int_0^1 \psi'_n \psi'_m dy = -\int_0^1 \psi_n \psi''_m dy.$$

Для вычисления b_m рассмотрим вспомогательную задачу относительно $\phi(y, z)$:

$$\nabla^2 \phi = K^2 \phi, \quad (0 < y < 1, \ -h < z < 0),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0, 1,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F(y), \quad (z = 0, 0 < y < 1),$$

где $F(y)$ определен в (15).

Функцию $\phi(y, z)$ представим в виде

$$\phi(y, z) = \sum_{k=1}^\infty a_k \phi_k(y, z),$$

где новые искомые функции $\phi_k(y,z)$ удовлетворяют следующей задаче:

$$\nabla^2\phi_k = K^2\phi_k, \quad (0<y<1, -h<z<0),$$
$$\frac{\partial\phi_k}{\partial y} = 0, \quad y = 0,1, \tag{17}$$
$$\frac{\partial\phi_k}{\partial z} = 0, \quad z=-h,$$
$$\frac{\partial\phi_k}{\partial z} = \psi_k(y), \quad (z=0, 0<y<1).$$

Тогда для b_m имеем

$$b_m = \int\limits_0^1 \psi_m\phi dy = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_0^1 \psi_m\phi_k(y,0)dy =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_0^1 \frac{\partial\phi_m}{\partial z}\phi_k dy.$$

Повторяя анализ, проведенный для задачи (10), с заменой $F_n(y)$ в (10) на $\psi_k(y)$, находим:

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial\phi_m}{\partial z}\phi_k dy = \int\limits_\Omega (\nabla\phi_k\nabla\phi_m + K^2\phi_k\phi_m)dydz.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial\phi_m}{\partial z}\phi_k dy = \int\limits_0^1 \phi_m\frac{\partial\phi_k}{\partial z}dy \equiv M_{mk}.$$

Поэтому приходим к равенству

$$b_m = \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}a_k, \quad M_{mk} = M_{km}.$$

Используя введенные элементы C_{nm} и M_{mk}, равенство (16) представим в виде

$$(\beta_m^4 + K^4 + æ)a_m + 2K^2\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}a_n =$$
$$= \lambda(\alpha a_m + \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn}a_n),$$

или в матричной форме

$$(D + 2K^2C)\vec{a} = \lambda(\alpha I + M)\vec{a}, \tag{18}$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, ...)^T$ – вектор; $D = diag\{\beta_1^4 + K^4 + æ, \beta_2^4 + K^4 + æ, ...\}$ – диагональная матрица; $C = \{C_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$ и $M = \{M_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$ – симметричные матрицы.

Умножим обе части (18) на $(\alpha I + M)^{-1}$ и обозначим

$$A = (\alpha I + M)^{-1} \cdot (D + 2K^2C).$$

Приходим к задаче вида

$$(A - \lambda I)\vec{a} = 0.$$

Элементы матрицы A вычисляются численно по указанным выше формулам. После этого находятся собственные значения λ_n и вычисляется зависимость $\omega(k)$. Наконец, по найденным значениям λ_n, ω_n из задачи (17) находим ϕ_k, по которым восстанавливается ψ_k и, следовательно, F.

Библиографический список

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I, II. — М., 1963.

2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М., 1975.

3. Купрадзе В.Д. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М., 1976.

4. Brocklehurst P., Korobkin A.A., Parau E.I. Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall. J. Engineering Mathematics. — 2010. — Vol. 68, №. 3–4.

5. Brocklehurst P., Korobkin A.A., Parau E.I. Hydroelastic wave difraction by a vertical cylinder. Philos Transact A Math Phys Eng Sci. — 2011. — Vol. 369, №. 19.