УДК 514.765

Е.В. Журавлев

О группе автоморфизмов конечных локальных колец характеристики p^2

E.V. Zhuravlev

On Automorphism Group of Finite Local Rings With Characteristics p^2

В статье рассмотрена группа автоморфизмов конечных локальных колец характеристики p^2 с радикалом Джекобсона J, таким, что $J^4 = (0)$, $J^3 \neq (0)$ и $R/J = GF(p^r)$ – конечное поле из p^r элементов.

Ключевые слова: конечное кольцо, локальное кольцо, радикал, изоморфизм.

In this article we describe the group of automorphisms of finite local rings of characteristic p^2 with Jacobson radical J such that $J^4 = (0)$, $J^3 \neq (0)$ and $R/J = GF(p^r)$, the finite field of p^r elements.

Key words: finite ring, local ring, radical, izomorphism.

1. Введение. Все кольца R, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, ассоциативными и содержат единицу. Обозначим через $J(R)$ радикал Джекобсона, R^* – группу обратимых элементов, $\mathrm{Aut}\, R$ – группу автоморфизмов кольца R, $F = GF(p^r)$ – конечное поле и $\mathbb{Z}_n$ – кольцо классов вычетов по модулю n.

Кольцо R называется локальным, если $R/J(R) = F$ – поле. Все делители нуля локального кольца образуют радикал $J(R)$, и всякий элемент кольца либо обратимый, либо нильпотентный. Один из примеров локальных колец – так называемые кольца Галуа $GR(p^{nr}, p^n)$, представимые в виде $\mathbb{Z}_{p^n}[x]/(f)$, где p – простое число; f – унитарный многочлен степени r, образ которого при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_p$ является неприводимым над $\mathbb{Z}_p$ многочленом. В частности, $GR(p^n, p^n) = \mathbb{Z}_{p^n}$ и $GR(p^r, p) = GF(p^r)$.

Следующие предложения содержат хорошо известные результаты из теории конечных колец (см.: [1, 2]).

Предложение 1. *Пусть R – конечное кольцо, в котором все делители нуля образуют идеал M. Тогда существует простое число p и натуральные числа n и r, такие, что*

1. $|R| = p^{nr}$;
2. *$M = J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R и $M^n = 0$;*
3. $|J(R)| = p^{(n-1)r}$;
4. $R/J(R) \cong GF(p^r)$;
5. *$char\ R = p^k$, где $1 \leq k \leq n$;*

Кроме того, пусть p, n, k – числа с указанными выше свойствами. Тогда справедливы следующие утверждения:

6. *Если $n = k$, то R – кольцо Галуа $GR(p^{kr}, p^k)$. В частности, $J(R) = pR$, $Aut(R) \cong Aut(R/pR)$ и $R = Z_{p^k}[b]$, где b – элемент R мультипликативного порядка $p^r - 1$;*
7. *Если $char(R) = p^k$, то R содержит максимальное подкольцо Галуа $R_0 = GR(p^{kr}, p^k) = Z_{p^k}[b]$ и если R_0' – другое максимальное подкольцо Галуа кольца R, то существует обратимый элемент $x \in R$, такой, что $R_0' = xR_0x^{-1}$. Пусть $K_0 = \langle b \rangle \cup \{0\}$. Тогда каждый элемент кольца R_0 может быть записан единственным образом в виде $\sum\limits_{i=0}^{k-1} p^i \lambda_i$, где $\lambda_i \in K_0$;*
8. *Существуют элементы $m_1, \ldots, m_h \in J(R)$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_h \in Aut(R_0)$, такие, что R раскладывается в прямую сумму левых R_0 – модулей*
$$R = R_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h,$$
где $m_i r_0 = r_0^{\sigma_i} m_i$ для всех $i = \{1, \ldots, h\}$ и для любого элемента $r_0 \in R_0$. Отсюда, в частности, следует, что
$$J(R) = pR_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h.$$

Множество $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_h\}$, следуя определениям работы [1], будем называть отмеченным базисом для радикала $J(R)$. Такие базисы впервые были изучены Рагхавендраном в случае $R_0 = GF(p^r)$.

Пусть A и B – подгруппы некоторой группы G. Если A – нормальная подгруппа, $A \cap B = \{e\}$ и $G = AB$, то группа G является полупрямым произведением своих подгрупп A и B (см.: [3]). Полупрямое произведение обозначим $G = A \leftthreetimes B$.

Предложение 2. (см.: [1,2]). *Пусть R – конечное локальное кольцо. Тогда*

1. *Группа R^* кольца R содержит циклическую подгруппу $\langle b\rangle$ порядка p^r-1 и R^* является полупрямым произведением групп $1+J(R)$ и $\langle b\rangle$, т.е. $R^*=(1+J(R))\leftthreetimes\langle b\rangle$;*
2. *Группа R^* разрешима;*
3. *Если G – подгруппа R^* порядка p^r-1, то группа G сопряжена с $\langle b\rangle$ в R^*;*

Известно, что группа автоморфизмов конечного поля $GF(p^r)$ является циклической порядка r и порождена автоморфизмом Фробениуса $\sigma\in\operatorname{Aut}GF(p^r)$, $\sigma:\alpha\to\alpha^p$, для всякого $\alpha\in GF(p^r)$.

Группа автоморфизмов колец Галуа $R_0=GR(p^{nr},p^n)$ была полностью определена Рагхавендраном [1], а именно, $\operatorname{Aut}R_0\cong\operatorname{Aut}GF(p^r)$ и $\operatorname{Aut}R_0=<\sigma>$, где $\sigma(\alpha)=\alpha^p$ для любого $\alpha\in R_0$.

Аль-Хамис [4] описал группу автоморфизмов конечных локальных колец, в которых произведение любых двух делителей нуля есть ноль, т.е. $J(R)^2=0$.

Чиканджи в работах [5,6] исследовал строение группы $\operatorname{Aut}R$ локальных колец с радикалом J индекса нильпотентности 3 при всех возможных значениях характеристики кольца, но с ограничением $\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_h$ на автоморфизмы отмеченного базиса.

Наша цель – в случае $\operatorname{char}R=p^2$ описать строение группы $\operatorname{Aut}R$ конечных локальных колец, радикал Джекобсона $J(R)$ которых имеет индекс нильпотентности четыре. Таким образом будут продолжены исследования в области конечных колец и их классификации, начатые автором ранее (см.: [7 – 10]).

2. Строение колец характеристики p^2. Пусть R – конечное ассоциативное локальное кольцо характеристики p^2, $J(R)^4=0$, $J(R)^3\neq 0$ и $F=R/J(R)$ – конечное поле $GF(p^r)$. Тогда R содержит элемент b порядка p^r-1 такой, что $b+J(R)$ – примитивный элемент поля $R/J(R)\cong GF(p^r)$ (см.: [1]) . Пусть $R_0=Z_{p^2}[b]$ – подкольцо Галуа кольца R, $R_0=GR(p^{2r},p^2)$. Заметим, что множество $pR_0=J(R)\cap R_0$ – максимальный идеал кольца R_0 и $R_0/J(R_0)\cong GF(p^r)$. Более того, так как b имеет порядок p^r-1 и $J(R_0)\subseteq J(R)$, то $b+J(R_0)$ – примитивный элемент $R_0/J(R_0)$ и всякий элемент R_0 может быть единственным образом записан в виде $\lambda_0+\lambda_1p$, где $\lambda_0,\lambda_1\in K_0=\langle b\rangle\cup 0$ (см. предложение 1).

Пусть $r\in R$. Тогда в силу предложения 1, $r=\alpha_0+\sum\limits_{i=1}^{h}\alpha_im_i$, $\alpha_0,\alpha_i\in R_0$. Если $J(R)^4=0$, $J(R)^3\neq 0$, то мы можем переобозначить базис $\{m_1,\ldots,m_h\}$ радикала $J(R)$ следующим образом:

$$\{u_1,\ldots,u_{s_1},\underbrace{v_1,\ldots,v_{s_2},\overbrace{w_1,\ldots,w_{s_3}}^{J(R)^3}}_{J(R)^2}\},$$

где $u_1,\ldots,u_{s_1}\in J\setminus J^2$, $v_1,\ldots,v_{s_2}\in J^2\setminus J^3$, $w_1,\ldots,w_{s_3}\in J^3$ и $s_1+s_2+s_3=h$. Далее, переобозначим соответствующие автоморфизмы:

$$\{\sigma_1,\ldots,\sigma_h\}=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1},\theta_1,\ldots,\theta_{s_2},\tau_1,\ldots,\tau_{s_3}\}.$$

Так как $p\in J(R)$, то возможны ситуации: $p\in J(R)^3$, $p\in J(R)^2\setminus J(R)^3$, $p\in J(R)\setminus J(R)^2$. В данной статье мы рассмотрим случай $p\in J(R)^3$.

Итак, всюду далее будем полагать $p\in J(R)^3$. Тогда pu_i, pv_i, $pw_i\in J(R)^4$ и $pu_i=pv_i=pw_i=0$. Следовательно, всякий элемент кольца R может быть единственным образом представлен в виде

$$\lambda_0+\lambda_1p+\sum_{k=1}^{s_1}\alpha_ku_k+\sum_{k=1}^{s_2}\beta_kv_k+\sum_{k=1}^{s_3}\gamma_kw_k,$$

где λ_0, λ_1, α_k, β_k, $\gamma_k\in K_0$.

Числа s_1, s_2 и s_3 являются размерностями модулей $J(R)^3$, $J(R)^2/J(R)^3$ и $J(R)^2/J(R)$ над R_0, следовательно, $1\leq s_2\leq s_1^2$ и $1\leq s_3+1\leq s_1s_2$. Заметим также, что $R_0=K_0+pR_0$ и

$$(\lambda_0+\lambda_1p)u_i=\lambda_0u_i,$$

$$(\lambda_0+\lambda_1p)v_i=\lambda_0v_i$$

и

$$(\lambda_0+\lambda_1p)w_i=\lambda_0w_i.$$

Следовательно, радикал $J(R)$ можно рассматривать как модуль над R_0/pR_0, т.е. для всякого $j\in J(R)$

$$j=\lambda_1p+\sum_{k=1}^{s_1}\alpha_ku_k+\sum_{k=1}^{s_2}\beta_kv_k+\sum_{k=1}^{s_3}\gamma_kw_k,$$

где λ_0, λ_1, α_k, β_k, $\gamma_k\in R_0/pR_0$.

Так как $u_iu_j\in J(R)^2$ и $u_iv_j,v_iu_j\in J(R)^3$, то

$$u_iu_j=\sum_{k=1}^{s_2}a_{ij}^kv_k+b_{ij}^0p+\sum_{k=1}^{s_3}b_{ij}^kw_k,$$

где a_{ij}^k, b_{ij}^0, $b_{ij}^k\in R_0/pR_0$, i, $j=\overline{1,s_1}$,

$$u_iv_j=c_{ij}^0p+\sum_{k=1}^{s_3}c_{ij}^kw_k,\ v_ju_i=d_{ij}^0p+\sum_{k=1}^{s_3}d_{ij}^kw_k,$$

где c_{ij}^0, c_{ij}^k, d_{ij}^0, $d_{ij}^k\in R_0/pR_0$, $i=\overline{1,s_1}$, $j=\overline{1,s_2}$.

Рассмотрим матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{11}^2 & \ldots & a_{11}^{s_2}\\ a_{12}^1 & a_{12}^2 & \ldots & a_{12}^{s_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{s_1s_1}^1 & a_{s_1s_1}^2 & \ldots & a_{s_1s_1}^{s_2}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{11}^1 & \ldots & b_{11}^{s_3}\\ b_{12}^0 & b_{12}^1 & \ldots & b_{12}^{s_3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{s_1s_1}^0 & b_{s_1s_1}^1 & \ldots & b_{s_1s_1}^{s_3}\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}^0 & c_{11}^1 & \dots & c_{11}^{s_3} \\ c_{12}^0 & c_{12}^1 & \dots & c_{12}^{s_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{s_1 s_2}^0 & c_{s_1 s_2}^1 & \dots & c_{s_1 s_2}^{s_3} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11}^0 & d_{11}^1 & \dots & d_{11}^{s_3} \\ d_{12}^0 & d_{12}^1 & \dots & d_{12}^{s_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{s_1 s_2}^0 & d_{s_1 s_2}^1 & \dots & d_{s_1 s_2}^{s_3} \end{pmatrix}.$$

Так как элементы $u_i u_j + J(R)^3$ порождают $J(R)^2/J(R)^3$, то матрица A имеет ранг s_2 (максимальное число линейно независимых строк). Следовательно, матрицы $A_k = (a_{ij}^k)$, образованные столбцами матрицы A, линейно независимы над полем R_0/pR_0. Аналогично, так как элементы $u_i v_j$ (соответственно $v_j u_i$) порождают $J(R)^3$, то матрицы C и D имеют ранг $s_3 + 1$. Следовательно, матрицы $C_k = (c_{ij}^k)$ (соответственно $D_k = (d_{ij}^k)$), образованные соответствующими столбцами матрицы C (соответственно D), линейно независимы над полем R_0/pR_0.

Далее, так как кольцо R является ассоциативным, то $(u_\alpha u_\beta)u_\gamma = u_\alpha(u_\beta u_\gamma)$ для любых чисел α, β, $\gamma \in \{1, \dots, s_1\}$. Следовательно,

$$(u_\alpha u_\beta)u_\gamma = \left(\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k v_k + b_{\alpha\beta}^0 p + \sum_{k=1}^{s_3} b_{\alpha\beta}^k w_k\right) u_\gamma =$$
$$= \sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k \left(d_{\gamma k}^0 p + \sum_{m=1}^{s_3} d_{\gamma k}^m w_m\right) = u_\alpha(u_\beta u_\gamma) =$$
$$= u_\alpha \left(\sum_{k=1}^{s_2} a_{\beta\gamma}^k v_k + b_{\beta\gamma}^0 p + \sum_{k=1}^{s_3} b_{\beta\gamma}^k w_k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} \left(c_{\alpha k}^0 p + \sum_{m=1}^{s_3} c_{\alpha k}^m w_m\right).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k d_{\gamma k}^m = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} c_{\alpha k}^m$$

для любого числа $m \in \{0, 1, \dots, s_3\}$.

Далее, пусть b – элемент порядка $p^r - 1$, определенный ранее. В силу ассоциативности R имеем

$$(u_i u_j)b = \sum_{k=1}^{s_2} a_{ij}^k (b + pR_0)^{\theta_k} v_k + b_{ij}^0 (b + pR_0)p +$$
$$+ \sum_{k=1}^{s_3} b_{ij}^k (b + pR_0)^{\tau_k} w_k = ((b + pR_0)^{\sigma_j})^{\sigma_i} u_i u_j =$$
$$= (b + pR_0)^{\sigma_i \sigma_j} \left(\sum_{k=1}^{s_2} a_{ij}^k v_k + b_{ij}^0 p + \sum_{k=1}^{s_3} b_{ij}^k w_k\right).$$

Так как элементы p, v_k, w_k линейно независимы, то

$$a_{ij}^k((b + pR_0)^{\theta_k} - (b + pR_0)^{\sigma_i \sigma_j}) = 0,$$

$$b_{ij}^0 ((b + pR_0) - (b + pR_0)^{\sigma_i \sigma_j}) = 0,$$

$$b_{ij}^k((b + pR_0)^{\tau_k} - (b + pR_0)^{\sigma_i \sigma_j}) = 0$$

для соответствующих значений k. Матрицы, (a_{ij}^k) линейно независимы, а значит, отличны от нуля, поэтому для каждого $k \in \{1, \dots, s_2\}$ существуют некоторые $i, j \in \{1, \dots, s_1\}$, такие, что $a_{ij}^k \neq 0$. Следовательно, $(b + pR_0)^{\theta_k} = (b + pR_0)^{\sigma_i \sigma_j}$, и так как $b + pR_0$ является примитивным элементом поля R_0/pR_0, то $\theta_k = \sigma_i \sigma_j$. Заметим также, что если матрица $B_k = (b_{ij}^k)$, $k = \overline{0, s_3}$, образованная соответствующим столбцом матрицы B, содержит ненулевой элемент b_{ij}^k, то $\tau_k = \sigma_i \sigma_j$. В частности, если $k = 0$, то $\tau_0 = id_{R_0} = \sigma_i \sigma_j$.

Аналогично из равенств

$$(u_i v_j)b = u_i(v_j b) \text{ и } (v_j u_i)b = v_j(u_i b),$$

следует, что

$$c_{ij}^0 (b + pR_0)p + \sum_{k=1}^{s_3} c_{ij}^k (b + pR_0)^{\tau_k} w_k =$$
$$= (b + pR_0)^{\theta_j \sigma_i} \left(c_{ij}^0 p + \sum_{k=1}^{s_3} c_{ij}^k w_k\right),$$

$$d_{ij}^0 (b + pR_0)p + \sum_{k=1}^{s_3} d_{ij}^k (b + pR_0)^{\tau_k} w_k =$$
$$= (b + pR_0)^{\sigma_i \theta_j} \left(d_{ij}^0 p + \sum_{k=1}^{s_3} d_{ij}^k w_k\right).$$

Так как p, w_k линейно независимы, то

$$c_{ij}^0((b + pR_0) - (b + pR_0)^{\theta_j \sigma_i}) = 0,$$

$$c_{ij}^k((b + pR_0)^{\tau_k} - (b + pR_0)^{\theta_j \sigma_i}) = 0,$$

$$d_{ij}^0((b + pR_0) - (b + pR_0)^{\theta_j \sigma_i}) = 0,$$

$$d_{ij}^k((b + pR_0)^{\tau_k} - (b + pR_0)^{\theta_j \sigma_i}) = 0$$

для всех $k = \{1, \dots, s_3\}$. Матрицы (c_{ij}^k) (соответственно (d_{ij}^k)) – линейно независимы, поэтому для каждого $k = \{0, \dots, s_3\}$ существуют соответствующие числа i и j, такие, что $c_{ij}^k \neq 0$ (соответственно $d_{ij}^k \neq 0$). Следовательно, $(b + pR_0) = (b + pR_0)^{\theta_j \sigma_i}$ и так как $b + pR_0$ – примитивный элемент поля R_0/pR_0, то $\tau_0 = id_{R_0} = \theta_j \sigma_i$ и $\tau_k = \theta_j \sigma_i$.

Таким образом, автоморфизмы $\{\theta_1, \dots, \theta_{s_2}, \tau_1, \dots, \tau_{s_3}\}$ выражаются через автоморфизмы $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{s_1}\}$.

Окончательно заметим, что умножение на кольце R удовлетворяет равенству

$$\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{s_1}\alpha_k u_k+\sum_{k=1}^{s_2}\beta_k v_k+\sum_{k=1}^{s_3}\gamma_k w_k\right)\cdot\left(\alpha_0'+\sum_{k=1}^{s_1}\alpha_k' u_k+\sum_{k=1}^{s_2}\beta_k' v_k+\sum_{k=1}^{s_3}\gamma_k' w_k\right)=$$

$$=\alpha_0\alpha_0'+p\left(\sum_{i,j=1}^{s_1}b_{ij}^0\alpha_i\left(\alpha_j'\right)^{\sigma_i}+\sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}\left(c_{ij}^0\alpha_i(\beta_j')^{\sigma_i}+d_{ij}^0\beta_j(\alpha_i')^{\theta_j}\right)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{s_1}\left(\left[\alpha_0+pR_0\right]\alpha_k'+\alpha_k\left[(\alpha_0')^{\sigma_k}+pR_0\right]\right)u_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{s_2}\left([\alpha_0+pR_0]\beta_k'+\beta_k[(\alpha_0')^{\theta_k}+pR_0]+\sum_{i,j=1}^{s_1}a_{ij}^k\alpha_i(\alpha_j')^{\sigma_i}\right)v_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{s_3}\left([\alpha_0+pR_0]\gamma_k'+\gamma_k[\alpha_0'+pR_0]^{\tau_k}+\sum_{i,j=1}^{s_1}b_{ij}^k\alpha_i(\alpha_j')^{\sigma_i}+\sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}\left(c_{ij}^k\alpha_i(\beta_j')^{\sigma_i}+d_{ij}^k\beta_j(\alpha_i')^{\theta_j}\right)\right)w_k,$$

где α_0, $\alpha_0'\in R_0$, α_k, α_k', β_k, β_k', γ_k, $\gamma_k'\in R_0/pR_0$.

3. Группа автоморфизмов. Пусть $w_0=p$, $\tau_0=id_{R_0}$ и l_1, l_2, l_3+1 соответственно количество различных автоморфизмов совокупностей $\{\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1}\}$, $\{\theta_1,\dots,\theta_{s_2}\}$ и $\{\tau_1,\dots,\tau_{s_3}\}$. При этом будем полагать, что именно автоморфизмы $\{\sigma_1,\dots,\sigma_{l_1}\}$, $\{\theta_1,\dots,\theta_{l_2}\}$ и $\{\tau_1,\dots,\tau_{l_3}\}$ различны.

Рассмотрим подпространства

$$U_i=\sum_{\sigma_j=\sigma_i}Fu_j,\ i=\overline{1,l_1},$$

$$V_i=\sum_{\theta_j=\theta_i}Fv_j,\ i=\overline{1,l_2}$$

и

$$W_i=\sum_{\tau_j=\tau_i}Fw_j,\ i=\overline{0,l_3},$$

где $F=R_0/pR_0$; σ_j, θ_j, τ_j – автоморфизмы, связанные соответственно с u_j, v_j и w_j. Тогда

$$U=\sum_{i=1}^{l_1}U_i,\quad V=\sum_{i=1}^{l_2}V_i,\quad W=\sum_{i=0}^{l_3}W_i.$$

Если $A=(a_{ij})$ – матрица над полем F, а σ – автоморфизм поля F, то в дальнейшем символом A^σ будем обозначать матрицу $(\sigma(a_{ij}))$. Пусть A и B – матрицы над полем F размерностей $m\times n$ и $n\times k$ соответственно, и $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in Aut(F)$, $n,m,k\in N$. Обозначим через $[A,B]_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}$ матрицу $C=(c_{ij})_{m\times k}$, где

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}^{\alpha_i}+a_{i2}b_{2j}^{\alpha_i}+\ldots+a_{in}b_{nj}^{\alpha_i},$$

$i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$. Если $\alpha_1=\ldots=\alpha_s=\alpha$, то $[A,B]_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}=AB^\alpha$.

Теорема 1. *Пусть φ – линейное отображение кольца R.*

$$\varphi\in\mathrm{Aut}\,(R)\Leftrightarrow\varphi\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=$$

$$=x\left(\alpha_0^\rho+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^\rho\varphi_j(u_i)+\sum_{\theta_j=\sigma_i}q_{ji}\alpha_i^\rho v_j+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^\rho\phi_j(v_i)+\sum_{\tau_j=\sigma_i}n_{ji}\alpha_i^\rho w_j+\sum_{\tau_j=\theta_i}s_{ji}\beta_i^\rho w_j+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i^\rho\psi_j(w_i)\right)x^{-1},$$

для некоторых элементов $x\in 1+J$, $\alpha_0,\alpha_i\in K_0$, $\beta_i,\gamma_i,q_{ji},n_{ji},s_{ji}\in R_0/pR_0$,

$$\varphi_j\in\mathrm{Aut}\,(U_j),\ \text{если } u_i\in U_j;$$

$$\phi_j\in\mathrm{Aut}\,(V_j),\ \text{если } v_i\in V_j;$$

$$\psi_j\in\mathrm{Aut}\,(W_j),\ \text{если } w_i\in W_j,$$

и существуют невырожденные матрицы

$$P=(p_{ij})_{s_1\times s_1},\ R=(r_{ij})_{s_2\times s_2},\ T=(t_{ij})_{s_3+1\times s_3+1},$$

такие, что

$$P^T[A_k,P]_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1})}=\sum_{i=1}^{s_2}r_{ki}A_i^\rho,\quad k=\overline{1,s_2},\qquad(1)$$

$$P^T[B_k,P]_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1})}+P^T[C_k,Q]_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1})}+$$

$$+Q^T[D_k^T,P]_{(\theta_1,\dots,\theta_{s_2})}=\sum_{i=1}^{s_2}s_{ki}A_i^{\rho}+\sum_{i=0}^{s_3}t_{ki}B_i^{\rho},\quad(2)$$

$$P^T[C_k,R]_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1})}=\sum_{i=0}^{s_3}t_{ki}C_i^{\rho},\qquad(3)$$

$$R^T[D_k^T,P]_{(\theta_1,\dots,\theta_{s_2})}=\sum_{i=0}^{s_3}t_{ki}\left(D_i^T\right)^{\rho},\quad k=\overline{0,s_3}\quad(4)$$

и $\sigma_i=\sigma_j$, *если* $p_{ji}\neq 0$; $\theta_i=\theta_j$, *если* $r_{ji}\neq 0$; $\tau_i=\tau_j$, *если* $t_{ji}\neq 0$; $\sigma_i=\theta_j$, *если* $q_{ji}\neq 0$; $\theta_i=\tau_j$, *если* $s_{ji}\neq 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathrm{Aut}\,(R)$. Заметим, что $\varphi(R_0)$ – максимальное подкольцо Галуа кольца R. В силу предложения 1 существует $x\in R^*$ такой, что $\varphi(R_0)=xR_0x^{-1}$. Так как

$$R^*=(1+J)\cdot\langle b\rangle,$$

где b – элемент порядка p^r-1, определенный ранее (см. предложение 2), то $x=(1+j)b_0$, где $j\in J$, $b_0\in\langle b\rangle$, и

$$\varphi(R_0)=xR_0x^{-1}=$$
$$=(1+j)b_0R_0b_0^{-1}(1+j)^{-1}=(1+j)R_0(1+j)^{-1}.$$

Следовательно, будем полагать $\varphi(R_0)=xR_0x^{-1}$ для некоторого $x\in 1+J$ и $\varphi(r_0)=xr_0^{\rho}x^{-1}$ для любого $r_0\in R_0$ и некоторого автоморфизма $\rho\in Aut(R_0)$.

Рассмотрим автоморфизм $\chi=\varphi_x\varphi$, где $\varphi_x(r)=x^{-1}rx$, $x\in 1+J$, $r\in R$. Тогда

$$\chi\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_iu_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_iv_i+\sum_{i=0}^{s_3}\gamma_iw_i\right)=$$
$$=\alpha_0^{\rho}+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^{\rho}\chi(u_i)+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^{\rho}\chi(v_i)+\sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i^{\rho}\chi(w_i).$$

Так как

$$u_i\in J=\sum_{i=1}^{s_1}Fu_i\oplus\sum_{i=1}^{s_2}Fv_i\oplus\sum_{i=0}^{s_3}Fw_i,\ i=\overline{1,s_1},$$

$$v_i\in J^2=\sum_{i=1}^{s_2}Fv_i\oplus\sum_{i=0}^{s_3}Fw_i,\ i=\overline{1,s_2},$$

$$w_i\in J^3=\sum_{i=0}^{s_3}Fw_i,\ i=\overline{0,s_3},$$

то

$$\chi(u_i)=\sum_{j=1}^{s_1}p_{ji}u_j+\sum_{j=1}^{s_2}q_{ji}v_j+\sum_{j=0}^{s_3}n_{ji}w_j,\ i=\overline{1,s_1},$$

$$\chi(v_i)=\sum_{j=1}^{s_2}r_{ji}v_j+\sum_{j=0}^{s_3}s_{ji}w_j,\ i=\overline{1,s_2},$$

$$\chi(w_i)=\sum_{j=0}^{s_3}t_{ji}w_j,\ i=\overline{0,s_3}$$

для некоторых p_{ji}, q_{ji}, n_{ji}, r_{ji}, s_{ji}, $t_{ji}\in R_0/pR_0$, причем $t_{00}=1$ и $t_{j0}=0$, при $j\neq 0$.

Пусть $r_0\in R_0$ и $u_ir_0=r_0^{\sigma_i}u_i$, $v_ir_0=r_0^{\theta_i}v_i$ и $w_ir_0=r_0^{\tau_i}w_i$. Тогда

$$\chi(u_ir_0)=\chi(r_0^{\sigma_i}u_i)=\chi(r_0^{\sigma_i})\chi(u_i)=$$
$$=\chi(r_0^{\sigma_i})\left[\sum_{j=1}^{s_1}p_{ji}u_j+\sum_{j=1}^{s_2}q_{ji}v_j+\sum_{j=0}^{s_3}n_{ji}w_j\right],$$

$$\chi(u_ir_0)=\chi(u_i)\chi(r_0)=$$
$$=\left[\sum_{j=1}^{s_1}p_{ji}u_j+\sum_{j=1}^{s_2}q_{ji}v_j+\sum_{j=0}^{s_3}n_{ji}w_j\right]\chi(r_0)=$$
$$=\sum_{j=1}^{s_1}p_{ji}[\chi(r_0)]^{\sigma_j}u_j+\sum_{j=1}^{s_2}q_{ji}[\chi(r_0)]^{\theta_j}v_j+$$
$$+\sum_{j=0}^{s_3}n_{ji}[\chi(r_0)]^{\tau_j}w_j.$$

Так как u_j, v_j и w_j – элементы базиса, то

$$\chi(r_0^{\sigma_i})p_{ji}=[\chi(r_0)]^{\sigma_j}p_{ji},$$

$$\chi(r_0^{\sigma_i})q_{ji}=[\chi(r_0)]^{\theta_j}q_{ji},$$

$$\chi(r_0^{\sigma_i})n_{ji}=[\chi(r_0)]^{\tau_j}n_{ji}.$$

Следовательно, если $\sigma_j\neq\sigma_i$, то $p_{ji}=0$; если $\theta_j\neq\sigma_i$, то $q_{ji}=0$; если $\tau_j\neq\sigma_i$, то $n_{ji}=0$.

Аналогично из соотношений

$$\chi(v_ir_0)=\chi(r_0^{\theta_i}v_i)=\chi(v_i)\chi(r_0)$$

и

$$\chi(w_ir_0)=\chi(r_0^{\theta_i}w_i)=\chi(w_i)\chi(r_0)$$

соответственно получаем: если $\theta_j\neq\theta_i$, то $r_{ji}=0$; если $\tau_j\neq\theta_i$, то $s_{ji}=0$; если $\tau_j\neq\tau_i$, то $t_{ji}=0$.

Заметим, что матрицы P, R, T невырождены и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{s_1}p_{ji}u_j=\varphi_k(u_i),\quad \varphi_k\in\mathrm{Aut}\,(U_k),\quad\text{если}\quad u_i\in U_k;$$

$$\sum_{j=1}^{s_2}r_{ji}v_j=\phi_k(v_i),\quad \phi_k\in\mathrm{Aut}\,(V_k),\quad\text{если}\quad v_i\in V_k;$$

$$\sum_{j=0}^{s_3}t_{ji}w_j=\psi_k(w_i),\ \ \psi_k\in\mathrm{Aut}\,(W_k),\ \ \text{если}\ w_i\in W_k,$$

где U_k, V_k, W_k – подмодули над R_0/pR_0, рассмотренные ранее. Отсюда, принимая во внимание соотношение $\varphi=(\varphi_x)^{-1}\chi$, получаем

$$\varphi\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=$$
$$=x\left(\alpha_0^\rho+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^\rho\varphi_j(u_i)+\sum_{\theta_j=\sigma_i}q_{ji}\alpha_i^\rho v_j+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^\rho\phi_j(v_i)+\sum_{\tau_j=\sigma_i}n_{ji}\alpha_i^\rho w_j+\sum_{\tau_j=\theta_i}s_{ji}\beta_i^\rho w_j+\sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i^\rho\psi_j(w_i)\right)x^{-1}.$$

Далее продолжим исследовать условия, при которых указанное выше отображение является гомоморфизмом кольца R:

$$\chi(u_i)\chi(u_j)=\left(\sum_{k=1}^{s_1}p_{ki}u_k+\sum_{k=1}^{s_2}q_{ki}v_k+\sum_{k=0}^{s_3}n_{ki}w_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{s_1}p_{kj}u_k+\sum_{k=1}^{s_2}q_{kj}v_k+\sum_{k=0}^{s_3}n_{kj}w_k\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{s_2}\left(\sum_{\nu,\mu=1}^{s_1}p_{\nu i}p_{\mu j}^{\sigma_\nu}a_{\nu\mu}^k\right)v_k+\sum_{k=0}^{s_3}\left(\sum_{\nu,\mu=1}^{s_1}p_{\nu i}p_{\mu j}^{\sigma_\nu}b_{\nu\mu}^k+\sum_{\nu=1}^{s_1}\sum_{\mu=1}^{s_2}\left(p_{\nu i}q_{\mu j}^{\sigma_\nu}c_{\nu\mu}^k+q_{\mu i}p_{\nu j}^{\theta_\mu}d_{\nu\mu}^k\right)\right)w_k,$$

$$\chi(u_iu_j)=\chi\left(\sum_{\nu=1}^{s_2}a_{ij}^\nu v_\nu+\sum_{\nu=0}^{s_3}b_{ij}^\nu w_\nu\right)=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{s_2}\chi\left(a_{ij}^\nu\right)\left(\sum_{k=1}^{s_2}r_{k\nu}v_k\right)+\sum_{\nu=1}^{s_2}\chi\left(a_{ij}^\nu\right)\left(\sum_{k=0}^{s_3}s_{k\nu}w_k\right)+\sum_{\nu=0}^{s_3}\chi\left(b_{ij}^\nu\right)\left(\sum_{k=0}^{s_3}t_{k\nu}w_k\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{s_2}\sum_{\nu=1}^{s_2}\left(a_{ij}^\nu\right)^\rho r_{k\nu}v_k+\sum_{k=0}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_2}\left(a_{ij}^\nu\right)^\rho s_{k\nu}+\sum_{\nu=0}^{s_3}\left(b_{ij}^\nu\right)^\rho t_{k\nu}\right)w_k.$$

Принимая во внимание линейную независимость элементов v_k и w_k, получаем требуемые соотношения:

$$P^T[A_k,P]_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1})}=\sum_{i=1}^{s_2}r_{ki}A_i^\rho,$$

$$P^T[B_k,P]_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1})}+P^T[C_k,Q]_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1})}+$$
$$+Q^T[D_k^T,P]_{(\theta_1,\ldots,\theta_{s_2})}=\sum_{i=1}^{s_2}s_{ki}A_i^\rho+\sum_{i=0}^{s_3}t_{ki}B_i^\rho.$$

Аналогично

$$\chi(u_i)\chi(v_j)=\left(\sum_{k=1}^{s_1}p_{ki}u_k+\sum_{k=1}^{s_2}q_{ki}v_k+\sum_{k=0}^{s_3}n_{ki}w_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{s_2}r_{kj}v_k+\sum_{k=0}^{s_3}s_{kj}w_k\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_1}\sum_{\mu=1}^{s_2}p_{\nu i}r_{\mu j}^{\sigma_\nu}c_{\nu\mu}^k\right)w_k,$$

$$\chi(u_iv_j)=\chi\left(\sum_{\nu=0}^{s_3}c_{ij}^\nu w_\nu\right)=\sum_{k=0}^{s_3}\left(\sum_{\nu=0}^{s_3}\left(c_{ij}^\nu\right)^\rho t_{k\nu}\right)w_k,$$

$$\chi(v_j)\chi(u_i)=\left(\sum_{k=1}^{s_2}r_{kj}v_k+\sum_{k=0}^{s_3}s_{kj}w_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{s_1}p_{ki}u_k+\sum_{k=1}^{s_2}q_{ki}v_k+\sum_{k=0}^{s_3}n_{ki}w_k\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_1}\sum_{\mu=1}^{s_2}r_{\mu j}p_{\nu i}^{\theta}d_{\nu\mu}^k\right)w_k,$$

$$\chi(v_j u_i) = \chi\left(\sum_{\nu=0}^{s_3} d_{ij}^{\nu} w_{\nu}\right) = \left(\sum_{k=0}^{s_3}\left(\sum_{\nu=0}^{s_3}\left(d_{ij}^{\nu}\right)^{\rho} t_{k\nu}\right) w_k\right).$$

Следовательно,

$$P^T[C_k, R]_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1})} = \sum_{i=0}^{s_3} t_{ki} C_i^{\rho}$$

и

$$R^T[D_k^T, P]_{(\theta_1,\dots,\theta_{s_2})} = \sum_{i=0}^{s_3} t_{ki} (D_i^T)^{\rho}.$$

Для доказательства обратного утверждения достаточно рассмотреть отображение φ из формулировки теоремы и проверить выполнимость свойств автоморфизма. Теорема доказана.

Пусть G – подгруппа группы $\mathrm{Aut}\,(R)$, состоящая из автоморфизмов, определяемых по правилу

$$g\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = \alpha_0^{\rho} + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^{\rho}\varphi_k(u_i) + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^{\rho}\phi_k(v_i) + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i^{\rho}\psi_k(w_i),$$

где $\varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(U_k)$, если $u_i \in U_k$, $\phi_k \in \mathrm{Aut}\,(V_k)$, если $v_i \in V_k$, $\psi_k \in \mathrm{Aut}\,(W_k)$, если $w_i \in W_k$ и $\rho \in \mathrm{Aut}\,(R_0)$. Пусть G_0 – подгруппа G, состоящая из автоморфизмов g_0 таких, что

$$g_0\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = \alpha_0^{\rho} + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^{\rho} u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^{\rho} v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i^{\rho} w_i,$$

а G_1, G_2 и G_3 – подгруппы G, состоящие соответственно из автоморфизмов

$$g_1\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i\varphi_k(u_i) + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i,$$

$$g_2\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i\phi_k(v_i) + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i,$$

$$g_3\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i\psi_k(w_i).$$

Тогда $G_1 \times G_2 \times G_3$ – прямое произведение групп. Кроме того,

$$G = (G_1 \times G_2 \times G_3)\cdot G_0, \quad G_1 \times G_2 \times G_3 \triangleleft G$$

и

$$(G_1 \times G_2 \times G_3) \cap G_0 = \{id_R\}.$$

Следовательно, группа G – полупрямое произведением групп G_0 и $G_1 \times G_2 \times G_3$, т.е.

$$G = (G_1 \times G_2 \times G_3) \leftthreetimes G_0.$$

Пусть H – подгруппа группы $\mathrm{Aut}\,(R)$, состоящая из автоморфизмов, определяемых по правилу

$$\varphi\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = x\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{\theta_j=\sigma_i} q_{ji}\alpha_i v_j + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \right. \\ \left. + \sum_{\tau_j=\sigma_i} n_{ji}\alpha_i w_j + \sum_{\tau_j=\theta_i} s_{ji}\beta_i w_j + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) x^{-1}.$$

Пусть H_0, H_1, H_2, H_3 – подгруппы H, состоящие соответственно из автоморфизмов

$$h_0\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = x\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) x^{-1},$$

$$h_1\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{\theta_j=\sigma_i} q_{ji}\alpha_i v_j + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i,$$

$$h_2\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{\tau_j=\sigma_i} n_{ji}\alpha_i w_j + \sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i,$$

$$h_3\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=$$

$$=\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{\tau_j=\theta_i} s_{ji}\beta_i w_j+\sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i.$$

Тогда непосредственно проверяется, что

$$H=H_0\times((H_1\times H_2)\leftthreetimes H_3).$$

Докажем, что группа $\mathrm{Aut}\,(R)$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы H и группы G. Очевидно $\mathrm{Aut}\,(R)=H\cdot G$. Пусть $\varphi\in H\cap G$. Так как $\varphi\in H$, то для всякого $r_0\in R_0$ имеем либо $\varphi(r_0)=r_0$, либо $\varphi(r_0)\notin R_0$. С другой стороны, $\varphi\in G$ и $\varphi(r_0)=r_0$ или $\varphi(r_0)=r_0^{\rho}\in R_0$. Следовательно, $\varphi(r_0)=r_0$, $\forall r_0\in R_0$ и $\varphi\in((H_1\times H_2)\leftthreetimes H_3)\cap(G_1\times G_2\times G_3)$. Так как $\varphi\in G_1\times G_2\times G_3$, то $\varphi(U)=U$ и $\varphi(V)=V$. Но в группе H единственный элемент с таким условием – id_R. Таким образом, $\varphi=id_R$, $H\cap G=\{id_R\}$ и $\mathrm{Aut}\,(R)=H\leftthreetimes G$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.
$\mathrm{Aut}\,(R)=$
$[H_0\times((H_1\times H_2)\leftthreetimes H_3)]\leftthreetimes[(G_1\times G_2\times G_3)\leftthreetimes G_0]$.

Заметим, что подгруппа H_0 группы $\mathrm{Aut}\,R$, состоящая из автоморфизмов

$$\varphi_x\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=$$

$$=x\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=0}^{s_3}\gamma_i w_i\right)x^{-1},$$

где $x\in 1+J(R)$, изоморфна фактор-группе

$$(1+J(R))/(1+Z(R)\cap J(R)).$$

Автоморфизмы групп H_1, H_2, H_3, G_1, G_2 и G_3, очевидно, есть невырожденные линейные преобразования конечномерного векторного пространства $J(R)$ и изоморфны невырожденным матрицам, по сути являющимися матрицами перехода от одного базиса R к другому. При этом должны быть выполнены условия (1)–(4) теоремы 2, связывающие равенствами матрицы перехода R как векторного пространства с матрицами умножения R как кольца.

Вопрос о строении группы автоморфизмов в ситуациях $\mathrm{char}\,R=p^k$, $k=3,4$ остается открытым. Предполагаются аналогичные рассуждения с учетом того, что в отмеченный базис пространства $J(R)$, возможно, добавятся элементы радикала p, p^2, p^3 и $pu_1,\dots,pu_{s_1}$, $p^2u_1,\dots,p^2u_{s_1}$, $pv_1,\dots,pv_{s_2}$. Более общий случай, когда индекс нильпотентности радикала есть произвольное натуральное число, будет рассмотрен автором в последующих работах.

Библиографический список

1. Raghavendran R. Finite associative rings // Compositio Math. – 1969. – Vol. 21.

2. McDonald B.R. Finite rings with identity. – Decker, 1974.

3. Холл М. Теория групп. – М., 1962.

4. Al-Khamees Y. Finite rings in wich the multiplication of any two zero-rings is zero // Arch. Math. – 1981. – Vol. 37.

5. Chikunji C.J. Automorphism of completely primary finite rings of characteristic p // Colloquium mathematicum. – 2008. – Vol 111.

6. Chikunji C.J. Automorphism groups of finite rings of characteristic p^2 and p^3 // Glasnik matematicki. – 2008. – Vol. 13.

7. Журавлев Е.В. Локальные кольца порядка p^6 с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона // Сибирские электронные математические известия. [Электронный ресурс]. – 2006. – №3. URL: http://semr.math.nsc.ru.

8. Журавлев Е.В. О классификации конечных локальных колец характеристики p^2, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре // Известия АлтГУ. - 2008. – №1 (57).

9. Журавлев Е.В. Об изоморфизме конечных локальных колец характеристики p^2, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре // Известия АлтГУ. - 2009. – №1 (61).

10. Журавлев Е.В. Группа автоморфизмов конечных локальных колец характеристики p // Сибирские электронные математические известия. [Электронный ресурс]. – 2011, – №8. URL: http://semr.math.nsc.ru.