УДК 624.045.04

*Г.И. Гребенюк, М.С. Вешкин*

# Дискретные модели расчета и оптимизации стержневых конструкций при импульсном нагружении

*G.I. Grebenyuk, M.S. Veshkin*

# Discrete Models for Calculation and Optimization of the Rod Construction at Impulse Loading

Рассматриваются дискретные подходы к расчету стержневых систем, нагруженных весьма коротким (мгновенным) импульсным воздействием, а также импульсом конечной протяженности. Получены решения задачи оптимизации объема однопролетной балки с использованием условий дискретной равнопрочности. Проведен сравнительный анализ результатов оптимизации при изменении числа участков разбиения балки и протяженности импульса.

***Ключевые слова:*** балка, оптимизация, расчет, равнопрочность, импульс.

The work considers discrete approaches to calculating the rod systems loaded with rather short (instant) impulse influence, and also with final extent impulse. Decision of a problem to optimize volume of one-flying beam using conditions of discrete equal durability is obtained. The comparative analysis of the optimization is carried out at a change of number of beam splitting sites and an impulse extent.

***Key words:*** beam, optimization, calculation, impulse.

**1. Алгоритмы динамического расчета дискретных систем.** Уравнения динамического равновесия дискретной системы представим с позиции метода перемещений КЭ в виде

$$K_m \ddot{\vec{Z}}(t) + K_d \dot{\vec{Z}}(t) + K_e \vec{Z}(t) + \vec{R}_F(t) = 0\,, \qquad (1)$$

где $K_m$, $K_d$, $K_e$ – матрицы инерционных, диссипативных и упругих коэффициентов; $R_F(t) = r_F F(t)$ – вектор, обобщающий заданные силовые воздействия; $r_F$ – матрица порядка $n \times f$; $n$ – степень свободы узлов системы; $f$ – число заданных силовых воздействий.

Согласно видоизмененной гипотезе Фойгта, для системы с одной степенью свободы [1]

$$K_d = \gamma (c\, m)^{0.5} \text{ (сила/скорость).} \qquad (2)$$

Величины $c$, $m$ – реакции в наложенной связи от единичного смещения и движения с единичным ускорением, причем данные концевые усилия и коэффициент неупругого сопротивления $\gamma$ однозначны.

Так как компоненты матриц $K_m^{(j)}$, $K_e^{(j)}$ $j$-го КЭ идентичны по физическому смыслу компонентам (2), то рационально использовать для вычисления компоненты $K_{d\,i\,k}$ матрицы $K_d^{(j)}$ соотношение

$$K_{d\,i,k} = \gamma (K_{m\,i,k} K_{e\,i,k})^{0.5} \text{ (сила/скорость).} \qquad (3)$$

Далее рассматривается предлагаемая методика дискретного расчета стержневых систем при действии весьма короткого (мгновенного) импульса.

Согласно общему уравнению удара [2], для системы точечных масс справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} (m_k \Delta V^k - S^k)\delta p^{(k)} = 0, \qquad (4)$$

где $n$ – число точечных масс; $m_k$ – масса $к$-й точки, $\Delta V^k$ – приращение скорости точки «$к$»; $S^k$– импульс, передающийся в $к$-ю точку; $\delta\, p^k$ – вариация перемещения $к$-й точки.

Распространяя (4) на случай стержневой системы и принимая в качестве возможных координатные перемещения, получим:

$$\left( \sum_{j=1}^{r} a^{(j)T} (K_d^{(j)} + K_H^{(j)}) a^{(j)} \right) \dot{Z}(\tau) - \\ - \sum_{j=1}^{r} a^{(j)T} \int_0^{l_j} \nu^{(j)}(u) S^{(j)}(u)\,du = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) приводится к виду:

$$R\dot{Z}(\tau) + R_s = 0, \qquad (6)$$

где

$$R = \sum_{j=1}^{r} a^{(j)T} (K_d^{(j)} + K_H^{(j)}) a^{(j)} + \sum_{k=1}^{\bar{n}} a^{(jk)T} (M^{(k)} + \bar{M}^{(k)}) a^{(jk)};$$

$$R_s = \sum_{j=1}^{r} a^{(j)T} \bar{S}^{(j)} + \sum_{k=1}^{\bar{n}} a^{(jk)T} S^{(K)}.$$

После определения составляющих вектора $\dot{Z}$ из решения системы алгебраических уравнений (6) задача динамического расчета при воздействии мгновенной импульсной нагрузки сводится к расчету системы на свободные колебания с начальными условиями $Z/_{t=0} = 0$; $\dot{Z}/_{t=0} = \dot{Z}(\tau)$.

Представляет интерес оценка, насколько влияет на результаты расчета и дискретной оптимизации представление нагрузки в виде импульса конечной протяженности.

Решение $Z(t) \in E^n$ матричного дифференциального уравнения (1) без учета демпфирования в случае действия импульса конечной протяженности представим в виде суммы векторов:

$$Z(t) = \bar{Z}(t) + \tilde{Z}(t),$$

где $\bar{Z}(t)$ – общее решение однородного уравнения $K_m \ddot{\vec{Z}}(t) + K_e \vec{Z}(t) = 0$; $\tilde{Z}(t)$ – частное решение (1).

Вектор узловых сил $F(t)$ удобно представить [3] в виде выражения $F(t) = B \cdot L(t)$, где $L(t)$ – $m_F$ – мерный вектор одночленных функций времени; $B$ – числовая матрица.

Частное решение представляется в аналогичном виде:

$$\tilde{Z}(t) = Q \cdot L(t),$$

где $Q$ – числовая матрица порядка $n \times m_F$.

Неизвестные составляющие матрицы $Q$ находятся из решения системы линейных уравнений:

$$K_m \cdot Q \cdot H^{(2)} + K_e \cdot Q + r_F\, B = 0, \qquad (7)$$

где $H^{(2)}$ – дифференциальный оператор второго порядка от $L(t)$.

Составляющие вектора постоянных интегрирования на участке 1 при $0 \le t \le T_1$ ($T_1$ – протяженность по времени заданного импульса) определяются из начальных условий. Если считать импульс протяженным, то в начальный момент времени

$$Z(t)\big|_{t=0} = 0;\ \dot{Z}(t)\big|_{t=0} = 0.$$

На втором интервале $T_1 \le t \le \infty$ система совершает свободные колебания. Постоянные интегрирования находятся из условий стыковки интервалов $[0, T_1]$, $[T_1, \infty]$.

**2. Пример расчета и оптимизации.** В качестве примера расчета и оптимизации рассмотрена балка с постоянной высотой и переменной шириной сечений при действии заданного импульса (рис. 1).

Рассмотрены несколько вариантов действия распределенного импульса:

– весьма короткий (мгновенный) импульс;

– импульсы конечной протяженности треугольной формы $q(t) = q_a(1 - t/T_1)$(кН/м), при разных значениях $T_1$ и одинаковой суммарной (по времени) интенсивностью $\bar{q} = \int_0^{T_1} q_a \left(1 - t/T_1\right) dt$ ($q_a$ – начальная амплитуда импульсной нагрузки).

Суммарная интенсивность импульса во всех вариантах принята равной $\bar{q} = 2 \cdot 10^{-3}$(кН·с/м). Для определения параметров дискретно-равнопрочной балки использован алгоритм оптимизации, приведенный на рисунке 2.

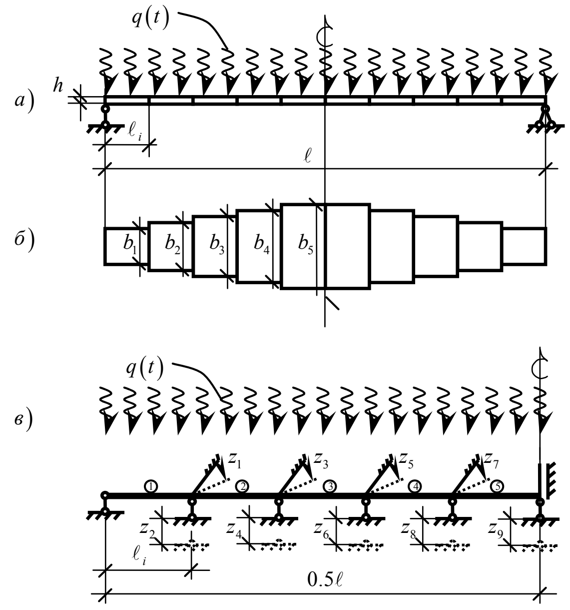


Рис. 1. Схема балки


Рис. 2. Алгоритм расчета

Алгоритм поиска дискретно-равнопрочной балки быстро сходится. В частности, на итерациях 6,7 (для 20 участков разбиения) и на итерациях 20–25 (для 50 участков разбиения), максимальная разница значений ширины сечений балки на участках составила 0.88%, а максимальное отклонение от условия равнопрочности – 0,1%.

**3. Анализ результатов расчетов и оптимизации балки.** Графики зависимости оптимального объема материала от длительности импульса, для вариантов разбиения балки на 5 и 20 элементов, приведены на рисунке 3.

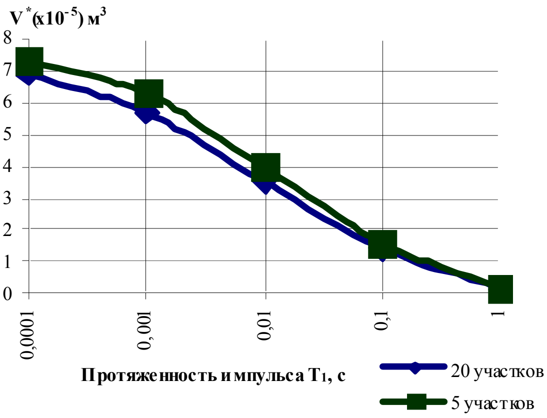


Рис. 3. Зависимость оптимального проекта $V^*$ от длительности импульса

Как следует из графиков, при большей продолжительности импульса размеры сечений и оптимальный объем получаются меньше по сравнению с результатами, относящимися к менее продолжительному импульсу. Это говорит о существенном влиянии продолжительности импульса на максимальные усилия в балке и, в конечном счете, на ее оптимальный проект.

Влияние числа участков разбиения балки на оптимальный объем при длительности импульса $T_1 = 0{,}001$ с

| Число участков | 5 | 20 | 30 | 50 |
|---|---|---|---|---|
| Оптимальный объем $V^*$ ($\times 10^5$ м$^3$) | 6,28661 | 5,8124 | 5,774 | 5,6908 |

В таблице показаны сравнительные результаты при различном количестве участков разбиения балки на элементы постоянного сечения. Существенное отличие от других результатов наблюдается в случае малого количества элементов – 5. При увеличении числа участков разбиения балки (20/30/50 участков) больших отличий в результатах соседних случаев не наблюдается.

Значительное влияние длительности импульса, по всей видимости, связано с тем, что при сокращении длительности импульса возрастает вклад в свободные колебания верхних частот собственных колебаний. Формы колебаний, соответствующие им, характеризуются большей кривизной продольной оси балки и, соответственно, большими усилиями изгиба.

## Библиографический список

1. Динамический расчет зданий и сооружений: справочник проектировщика / под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – М., 1984.

2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М., 1956.

3. Гребенюк Г.И., Роев В.И. Методика построения дискретного решения для вынужденных колебаний диссипативных систем // Известия вузов. Строительство. – 2006. – №2.