УДК 514.765

О.П. Гладунова, Е.Д. Родионов, В.В. Славский

Области знакоопределенной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой*

O.P. Gladunova, E.D. Rodionov, V.V. Slavsky

Sign-defined Curvature Domains on Three-dimensional Lie Groups with Left-invariant Riemannian Metrics

Исследованию связи между различными типами кривизн и топологией римановых многообразий посвящены работы многих математиков [1—4]. В [2—4] изучалось влияние кривизны Риччи и одномерной кривизны на топологию однородных римановых многообразий. В данной статье исследуются области знакоопределенной кривизны Риччи и одномерной кривизны в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, кривизна Риччи, оператор одномерной кривизны.

Many mathematicians devoted their papers to the investigation of the relationship between various curvature types and the topology of the Riemannian manifolds [1—4]. An influence of the Ricci curvature and one- dimensional curvature on the topology of the homogeneous Riemannian manifolds was studied in [2—4]. In this paper the sign-defined Ricci and one- dimensional curvatures domains were studied for the case of three-dimensional Lie groups with left-invariant Riemannian metrics.

Key words: Lie groups and Lie algebras, left-invariant Riemannian metrics, Ricci curvature, one-dimensional curvature operator.

1. Обозначения. Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли; $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует положительно ориентированный ортобазис $\{e_1, e_2, e_3\}$, в котором выполняются равенства [3]:

$$[e_1,e_2]=\lambda_3 e_3,\ [e_2,e_3]=\lambda_1 e_1,\quad [e_3,e_1]=\lambda_2 e_2. \tag{1}$$

В данном базисе диагонализируемы квадратичная форма Риччи $r(x)=r_{ij}x^ix^j$ и квадратичная форма одномерной кривизны $a(x)=a_{ij}x^ix^j$, где r_{ij} — компоненты тензора Риччи, a_{ij} — компоненты тензора одномерной кривизны, определяемые стандартным образом: $r_{ij} = \mathrm{tr}(v \to R(e_i,v)e_j)$; $a_{ij}=\dfrac{1}{n-2}\left(r_{ij}-\dfrac{sg_{ij}}{2(n-1)}\right)$, где $n=3$; R — тензор кривизны; $s=\mathrm{tr}(r)$ — скалярная кривизна; g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Главные значения кривизны Риччи и одномерной кривизны, а также след в этом базисе имеют вид:

$$\begin{aligned} r_1&=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3),\\ r_2&=\frac{1}{2}(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3),\\ r_3&=\frac{1}{2}(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3),\\ s&=\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2); \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} a_1&=\frac{1}{8}(5\lambda_1^2-3(\lambda_2-\lambda_3)^2-2\lambda_1\lambda_3-2\lambda_1\lambda_2),\\ a_2&=\frac{1}{8}(5\lambda_2^2-3(\lambda_1-\lambda_3)^2-2\lambda_1\lambda_2-2\lambda_2\lambda_3),\\ a_3&=\frac{1}{8}(5\lambda_3^2-3(\lambda_1-\lambda_2)^2-2\lambda_1\lambda_3-2\lambda_2\lambda_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует положительно ориентированный ортобазис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что [3]:

$$[e_1,e_2]=\alpha e_2+\beta e_3,\ [e_1,e_3]=\gamma e_2+\delta e_3,\quad [e_2,e_3]=0, \tag{4}$$

где $\alpha+\delta\neq 0$ и $\alpha\gamma+\beta\delta=0$.

Заметим, что в случае $\alpha+\delta=2$ инвариант $D=\alpha\delta-\gamma\beta$ определяет алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма. Следуя [3], положим: $\alpha=1+\xi$, $\beta=(1+\xi)\eta$, $\gamma=-(1-\xi)\eta$, $\delta=1-\xi$, где

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

$\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Тогда квадратичные формы Риччи и одномерной кривизны диагонализируемы в этом базисе, и их главные кривизны и след вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} &r_1 = -2 - 2\xi^2 - 2\xi^2\eta^2 < 0, \\ &r_2 = -2 - 2\xi - 2\xi\eta^2 < 0, \\ &r_3 = -2 + 2\xi + 2\xi\eta^2, \\ &s = -6 - 2\xi^2 - 2\xi^2\eta^2 < 0, \ (\xi \geq 0,\ \eta \geq 0); \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2\xi^2 < 0, \\ &a_2 = -\frac{1}{2} - 2\xi - 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2, \\ &a_3 = -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Приведем также ряд результатов, которые нам потребуются.

Критерий 1 (Дж. Милнор [3]). *Связная группа Ли G допускает левоинвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи в том и только том случае, если G компактна и ее фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. В таком случае искомой метрикой является биинвариантная риманова метрика.*

Критерий 2 (Е.Д. Родионов, В.В. Славский [4]). *Связная группа Ли G допускает левоинвариантную риманову метрику положительной одномерной кривизны в том и только том случае, если G компактна и ее фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. В таком случае искомой метрикой является стандартная риманова метрика.*

Заметим также, что положительность одномерной кривизны риманова многообразия влечет положительность кривизны Риччи. Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. существуют римановы метрики положительной кривизны Риччи и осциллирующей (принимающей значения разных знаков) одномерной кривизны (см. [4]).

2. Основные результаты. Предварительно докажем некоторые утверждения, которые нам потребуются.

Лемма 1. *Пусть $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой знакоопределенной кривизны Риччи (положительной или отрицательной). Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G изоморфна $su(2)$, а структурные константы удовлетворяют соотношениям $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2$*

Доказательство. Пусть кривизна Риччи положительна, тогда, применяя критерий Дж. Милнора, а также используя классификацию трехмерных унимодулярных алгебр Ли [3], получаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G изоморфна $su(2)$.

Далее, применяя результаты работы [5], где оценивалась кривизна Риччи трехмерных групп Ли, получаем, что структурные константы, в случае алгебры $su(2)$, а также кривизна Риччи удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &r_1 \leq r_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(\xi) \leq r_3, \\ &r_1 \leq r_2 \leq r_3, r_3 > 0, r_1 \geq 0, \\ &\text{если}\, 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2; \\ &r_2 \leq r_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(\xi) \leq r_3, \\ &r_2 \leq r_1 \leq r_3, r_3 > 0, r_2 \leq 0, \\ &\text{если}\, 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Для завершения доказательства леммы нам осталось заметить, что $r_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(\xi) > 0$ в том и только том случае, если $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2$, а случай отрицательности кривизны Риччи невозможен [5]. Доказательство завершено.

Рассмотрим неунимодулярный случай, предполагая, без ограничения общности, что параметры $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$ [3].

Лемма 2. *Пусть $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой знакоопределенной кривизны Риччи. Тогда параметры ξ и η, определяющие алгебру Ли с точностью до изоморфизма (кроме случая $\xi = \eta = 0$), удовлетворяют неравенствам:*

$$0 \leq \xi < \frac{1}{1+\eta^2},\ 0 \leq \eta. \tag{8}$$

Доказательство. Очевидно, что $r_1 < 0$, $r_2 < 0$, значит для знакоопределенности кривизны Риччи, при условии $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, необходимо и достаточно выполнение неравенства $r_3 = -2 + 2\xi + 2\xi\eta^2 < 0$ или $\xi < \frac{1}{1+\eta^2}$. Доказательство завершено.

Прямым следствием доказанных лемм является

Теорема 1. *Пусть $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда кривизна Риччи группы $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ знакоопределена в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в таблице 1.*

Исследуем случай одномерной кривизны.

Лемма 3. *Пусть $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой знакоопределенной одномерной кривизны. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G изоморфна $su(2)$, а структурные константы удовлетворяют неравенствам:*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8}(5\lambda_1^2 - 3(\lambda_2 - \lambda_3)^2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2) > 0, \\ &\textit{если}\ 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Таблица 1

Области знакопостоянства кривизны Риччи

Алгебра Ли	Кривизна Риччи	Структурные константы
Унимодулярна, изоморфна $su(2)$	Положительна	$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2$
Неунимодулярна, определяется с точностью до изоморфизма набором структурных констант	Отрицательна	$\alpha = 1+\xi$, $\beta = (1+\xi)\eta$, $\gamma = -(1-\xi)\eta$, $\delta = 1-\xi$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi < \frac{1}{1+\eta^2}$

Таблица 2

Области знакопостоянства одномерной кривизны

Алгебра Ли	Одномерная кривизна	Структурные константы
Унимодулярна, изоморфна $su(2)$	Положительна	$\frac{1}{8}(5\lambda_1^2 - 3(\lambda_2-\lambda_3)^2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2) > 0$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2$
Неунимодулярна, определяется с точностью до изоморфизма набором структурных констант	Отрицательна	$\alpha = 1+\xi$, $\beta = (1+\xi)\eta$, $\gamma = -(1-\xi)\eta$, $\delta = 1-\xi$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi < -2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}}$

Доказательство. Предположим, что одномерная кривизна положительна, тогда, применяя критерий Родионова-Славского [4], а также используя классификацию трехмерных унимодулярных алгебр Ли [3], получаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G изоморфна $su(2)$. Далее, применяя результаты работы [5], получаем искомые неравенства. Нетрудно видеть, что множество решений системы (9) непусто. Так, например, набор структурных констант $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0$ является решением данной системы (9). Доказательство завершено.

Лемма 4. *Пусть $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой знакоопределенной одномерной кривизны. Тогда параметры ξ и η, определяющие алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G с точностью до изоморфизма (кроме случая $\xi = \eta = 0$), удовлетворяют неравенствам:*

$$\begin{aligned} &0 \leq \xi < -2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}}, \\ &0 \leq \eta. \end{aligned} \tag{10}$$

Доказательство. В силу того, что $a_1 < 0$, необходимо рассмотреть систему неравенств: $a_2 < 0$, $a_3 < 0$, которая в силу (6) равносильна следующей

$$\begin{aligned} &0 \leq \xi < 2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}}, \\ &0 \leq \xi < -2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}}, \\ &0 \leq \eta; \end{aligned} \tag{11}$$

т.е. системе вида (10). Доказательство завершено.

Из лемм 3 и 4 следует

Теорема 2. *Пусть $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда одномерная кривизна группы $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ знакоопределена в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в таблице 2.*

Изучим теперь случай, когда кривизна Риччи знакоопределена, а одномерная кривизна осциллирует, т.е. принимает значения разных знаков.

Теорема 3. *Пусть $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой знакоопределенной кривизны Риччи. Тогда одномерная кривизна группы $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ знакопеременна в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в таблице 3.*

Доказательство. Из теоремы 1 и результатов работы [5] следует утверждение теоремы в унимодулярном случае.

Рассмотрим неунимодулярный. В этом случае главная кривизна $a_1 < 0$. Кривые $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$ и $r_3 = 0$ разбивают первый квадрант на области:

$$\Omega_1 \begin{cases} \operatorname{sign}(a_1, a_2, a_3) = (-,-,-), \\ \operatorname{sign}(r_1, r_2, r_3) = (-,-,-), \end{cases}$$

$$\Omega_2 \begin{cases} \operatorname{sign}(a_1, a_2, a_3) = (-,-,+), \\ \operatorname{sign}(r_1, r_2, r_3) = (-,-,-), \end{cases}$$

$$\Omega_3 \begin{cases} \operatorname{sign}(a_1, a_2, a_3) = (-,-,+), \\ \operatorname{sign}(r_1, r_2, r_3) = (-,-,+), \end{cases}$$

$$\Omega_4 \begin{cases} \operatorname{sign}(a_1, a_2, a_3) = (-,+,+), \\ \operatorname{sign}(r_1, r_2, r_3) = (-,-,+), \end{cases}$$

Таблица 3

Области знакопостоянства кривизны Риччи и осциллирования одномерной кривизны

Алгебра Ли	Кривизна Риччи	Одномерная кривизна	Структурные константы
Унимодулярна, изоморфна $su(2)$	Положительна	Осциллирует	$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2$
Неунимодулярна, определяется с точностью до изоморфизма набором структурных констант	Отрицательна	Осциллирует	$\alpha = 1 + \xi$, $\beta = (1 + \xi)\eta$, $\gamma = -(1 - \xi)\eta$, $\delta = 1 - \xi$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi < \frac{1}{1+\eta^2}$.

где $\text{sign}(a_1, a_2, a_3) = (\text{sign}(a_1), \text{sign}(a_2), \text{sign}(a_3))$, $\text{sign}(a_i)$ – знак числа a_i. Понятно, что в области Ω_2 кривизна Риччи отрицательна, а одномерная кривизна принимает значения разных знаков (осциллирует). Доказательство завершено.

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т.: пер. с англ. – М., 1990.

2. Berestovsky V.N. Homogenious Riemannian manifolds of positive Ricci curvature // Mat. Zametki. – 1995. – V. 55, № 3.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21.

4. Rodionov E.D., Slavsky V.V. Conformal deformation of the Riemannian metrics and homogenious Riemannian spaces // Comm. Math. Univ. Carolinae. – 2002. – V. 43, № 2.

5. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7^{th} International Conference. – Brno, 1999.