УДК 539.3

*А.И. Бабин, Ю.В. Немировский*

# Численное решение задачи термоупругого деформирования спирально армированных цилиндрических оболочек

*A.I. Babin, Yu.V. Nemirovsky*

# The Numerical Solution of the Problem of the Thermoelastic Deformation of Spirally Reinforced Cylindrical Shells

Разработана методика приведения трехмерной нестационарной задачи теплопроводности для многослойных оболочек к двухмерной. Решена несвязная задача упругого деформирования спирально армированных цилиндрических оболочек при действии температурных и силовых факторов.

***Ключевые слова:*** армированная оболочка, двухмерная, трехмерная нестационарная задача, температура, упругое деформирование.

The authors developed method to bring three-dimensional unsteady heat conductivity problem for multi-layer shells to a two-dimensional one. The incoherent problem of the elastic deformation of spirally reinforced cylindrical shells under the influence of temperature and force factors is solved.

***Key word:*** reinforced shell, two-dimensional, three-dimensional non-stationary problem, temperature, elastic deformation.

Работа посвящена построению и численному решению уравнений нестационарной теплопроводности и несвязной термоупругости для спирально армированных цилиндрических оболочек.

Представим расчетную схему в виде двухслойной цилиндрической оболочки постоянной толщины, находящейся под действием термосиловых факторов. Слои цилиндра изготовлены из связующего с одинаковыми термомеханическими характеристиками и перекрестно армированы в направлении винтовых линий. На внутренней поверхности $\Omega$ введем ортогональную систему координат, координатные линии которой – линии кривизны поверхности $\Omega$ :

$$\left\{(x,z)\right| \; 0 \le x \le l, z_k \le z \le z_{k+1}, \; k = 1, 2;$$
$$z_1 = 0, \; z_2 = h_1, \; z_3 = h_1 + h_2 = h\}.$$

Здесь $h_1$, $h_2$ – толщины слоев; $l$ – длина оболочки.

Параметры Ламе $A_1 = 1$, $A_1 = R$ и главные кривизны отсчетной поверхности $k_1 = 0$, $k_2 = -1/R$, $R$ – внутренний радиус цилиндра. Торец оболочки при $x = 0$ жестко защемлен, при $x = l$ свободен от усилий. Считая оболочку достаточно тонкой, принимаем приближенное равенство $1 - k_2 z \approx 1$.

На кромках $x = 0$, $x = l$ и на цилиндрической поверхности $z = z_3$ осуществляется теплообмен по закону Ньютона:

$$-\Lambda_{(11)}^{(k)} T_{,x}^{(k)} = \mu_1 \left(T^{(k)} - \theta_0\right),$$
$$\Lambda_{(11)}^{(k)} T_{,x}^{(k)} = \mu_2 \left(T^{(k)} - \theta_0\right), \; (\mathrm{k} = 1, 2); \qquad (1)$$

$$-\Lambda_{(33)}^{(2)} T_{,z}^{(2)} = 0,5(\mu_1 + \mu_2)(T^{(2)} - \theta_0). \qquad (2)$$

Здесь и далее нижний индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей переменной. $\mu_1$, $\mu_2$ – коэффициенты теплообмена с окружающей средой, имеющей температуру $-\theta_0$.

В (1), (2) приняты следующие выражения для компонентов тензора теплопроводности модифицированной матрицы композита [1, с. 25]:

$$\Lambda_{(11)}^{(k)} = \left\{\left(\cos\psi_{(k)}\right)^2 \left[\varpi^{(k)}\varpi_z^{(k)}\left(\lambda_a^{(k)} - \lambda_c^{(k)}\right) + \lambda_c^{(k)}\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\sin\psi_{(k)}\right)^2 \left[\frac{\varpi_z^{(k)}\lambda_a^{(k)}\lambda_c^{(k)}}{\varpi^{(k)}\lambda_c^{(k)} + \left(1-\varpi^{(k)}\right)\lambda_a^{(k)}} + \lambda_c^{(k)}\left(1-\varpi_z^{(k)}\right)\right]\right\},$$

$$\Lambda_{(22)}^{(k)} = \left\{\left(\sin\psi_{(k)}\right)^2 \left[\varpi^{(k)}\varpi_z^{(k)}\left(\lambda_a^{(k)} - \lambda_c^{(k)}\right) + \lambda_c^{(k)}\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\cos\psi_{(k)}\right)^2 \left[\frac{\varpi_z^{(k)}\lambda_a^{(k)}\lambda_c^{(k)}}{\varpi^{(k)}\lambda_c^{(k)} + \left(1-\varpi^{(k)}\right)\lambda_a^{(k)}} + \lambda_c^{(k)}\left(1-\varpi_z^{(k)}\right)\right]\right\},$$

$$\Lambda_{(33)}^{(k)} = \left(\frac{\varpi_z^{(k)}}{\varpi^{(k)}\lambda_a^{(k)} + \left(1-\varpi^{(k)}\right)\lambda_c^{(k)}} + \frac{1-\varpi_z^{(k)}}{\lambda_c^{(k)}}\right)^{-1}; \; k = 1, 2;$$

$\lambda_a^{(k)}, \lambda_c^{(k)}$ – теплопроводности армирующих волокон и связующего $k$-го слоя соответственно; $\varpi^{(k)}$ –

удельное содержание армирующих волокон в $k$-м слое на кромках $x = 0$, $x = l$ цилиндра; $\varpi_z^{(k)}$ – интенсивность армирования в $k$-м слое по нормали к $\Omega$; $\psi_{(k)} = (-1)^k c/\sqrt{c^2+1}$, $c \in (0,5)$ – постоянные углы, которые винтовая линия составляет с образующей поверхности $\Omega$ [2, с. 92].

На поверхности $z = z_1 = 0$ задан кусочно-линейный закон изменения температуры:

$$T_1^* = \begin{cases} \theta_\Pi \tau/\tau_0, & 0 \le \tau \le \tau_0; \\ \theta_\Pi, & \tau > \tau_0. \end{cases} \tag{3}$$

На цилиндрической поверхности $z = z_2 = h$ выполняются условия идеального теплового контакта [3, с. 168]. Нестационарное двухмерное температурное поле в $k$-м слое оболочки аппроксимировалось зависимостью [1, с. 23]:

$$T^{(k)}(x,z,\tau) = \Theta^{(k)}(z,\tau) + f(z)\Pi(x,\tau),\ k = 1,\ 2, \tag{4}$$

где $\Theta^{(k)}$ – непрерывно дифференцируемые функции, допускающие представление в замкнутом виде; $\Pi$ – независимая характеристика, учитывающая нелинейное распределение температуры на отсчетной поверхности; $f(z)$ – достаточно гладкая функция $z$, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{gathered} f(z_1) = f'(z_2) = 0, \\ \lambda_{(33)}^{(2)} f'(z_3) + 0,5(\mu_1 + \mu_2) f(z_3) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Нестационарное уравнение для функции $\Pi(x,\tau)$, начальное и граничные условия в анизотропном теле получаем, используя вариационное уравнение теплопроводности для многослойных полиармированных оболочек, при отсутствии источников теплоты [1, с. 22], и уравнения (1–5):

$$\begin{gathered} \bar{C}\Pi(x,\tau)_{,\tau} = \left(\bar{\lambda}_{(11)}\Pi(x,\tau)_{,x}\right)_{,x} - \bar{\lambda}_{(33)}\Pi(x,\tau) - \bar{\bar{C}}, \\ \Pi(x,0) = 0; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{(11)}\Pi(x,\tau)_{,x}\big|_{x=0} &= \mu_1\left[\gamma_2^1\theta_0 - \bar{\Theta} - \gamma_2^2\,\Pi(x,\tau)\big|_{x=0}\right], \\ \bar{\lambda}_{(11)}\Pi(x,\tau)_{,x}\big|_{x=l} &= \mu_2\left[\gamma_2^1\theta_0 - \bar{\Theta} - \gamma_2^2\,\Pi(x,\tau)\big|_{x=l}\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Начально-краевая задача (6–7) решается итерационно-интерполяционным методом, предложенным в работе [4, с. 6].

Функции $\Theta^{(k)}(x,\tau)$, присутствующие в (4), выражаются в конечном виде [1, с. 24]:

$$\begin{gathered} \Theta^{(k)} = \Phi_{(k)} + K_\lambda^{(k)}\varphi\left[\vartheta(z) - \vartheta(z_k)\right], \\ (z_k \le z \le z_{k+1},\ k = 1,2). \end{gathered} \tag{8}$$

Подставляя решение краевой задачи (6, 7) и выражения (8) в (4), находим нестационарное температурное поле двухслойного армированного цилиндра.

После определения поля температуры решается несвязная задача термоупругости по методике, изложенной, например, в [1, с. 26].

Примем гипотезу Кирхгофа-Лява для всего пакета слоев в целом [1, с. 26].

Разрешающая система уравнений статики многослойных армированных оболочек вращения и краевые условия представлены в [5, с. 77; 2, с. 27].

Приведем описание структурного критерия прочности армированной среды [5, с. 36]. Материалы матрицы и армирующих элементов подчиняются условию прочности Мизеса [5, с. 36]:

$$M\left(\sigma_{(\alpha\beta)c}\right) = k_c^2,\ M\left(\sigma_{(\alpha\beta)a}\right) = k_a^2. \tag{9}$$

После решения соответствующей задачи термостатики находим средние напряжения $\bar{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta}$ и средние деформации $\bar{\varepsilon}_{(k)}^{\alpha\beta}$ $k$-слоя. По методике, подробно описанной в [5, с. 36], восстанавливаем истинные напряжения $\sigma_{(\alpha\beta)c}^{(k)}$ в связующем и армирующих волокнах $\sigma_{(\alpha\beta)a}^{(k)}$. Подставляя последние в (9), находим значения: $M\left(\sigma_{(\alpha\beta)c,a}^{(k)}\right)$, $M_{(c,a)}^{(k)*} = \sqrt{\sup_{V_k} M\left(\sigma_{(\alpha\beta)c,a}^{(k)}\right)}$, $M_{(c,a)}^* = \max_k M_{(c,a)}^{(k)*}$.

Здесь $V_k$ – область, занятая $k$-м слоем.

Если выполняется одно из равенств $M_{(c,a)}^* = \min_k k_{c,a}^{(k)*}$, то считаем, что в данной точке наступила потеря прочности композитного материала.

Рассмотрим цилиндрическую металлокомпозитную оболочку, нагруженную внутренним равномерно распределенным давлением интенсивности $P = 2$ МПа, радиусом $R = 0,5$ м, длиной $l = 10R$, изготовленную из алюминия ($\lambda_c^{(1)} = \lambda_c^{(2)} = 240$ Вт/(м·град), $c_c^{(1)} = c_c^{(2)} = 757$ Дж/(кг·град), $\rho_c^{(1)} = \rho_c^{(2)} = 2687$ кг/м$^3$, $E_c^{(1)} = E_c^{(2)} = 73$·ГПа, $\alpha_c^{(1)} = \alpha_c^{(2)} = 2,4 \cdot 10^{-6}\ {}^\circ C^{-1}$, предел прочности (текучести) при растяжении $k_c^{(1)} = k_c^{(2)} = 62$·МПа [3, с. 173, 180]) и симметрично армированную двумя семействами стальных волокон ($\lambda_a^{(1)} = \lambda_a^{(2)} = 45$ Вт/(м·град), $c_a^{(1)} = c_a^{(2)} = 568$ Дж/(кг·град), $\rho_a^{(1)} = \rho_a^{(2)} = 7811$ кг/м$^3$, $E_a^{(1)} = E_a^{(2)} = 20$·ГПа, $\alpha_a^{(1)} = \alpha_a^{(2)} = 13 \cdot 10^{-6}\ {}^\circ C^{-1}$, $k_a^{(1)} = k_a^{(2)} = 413$·МПа [3, с. 174, 180]) в направлении винтовых линий.

Температурное воздействие характеризуется следующими параметрами: $\theta_\Pi = 500\ {}^\circ C$, $\theta_0 = 0\ {}^\circ C$, $\mu_1 = \mu_2 = 20$ Вт/(м$^2$·град), $\tau_0 = 5$ с. Параметры армирования: $\varpi^{(k)} = \varpi_z^{(k)} = 0,5$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\psi_{(1)}$, град. | 25,625 | 40,514 | 47,673 | 51,247 | 53,198 |
| $\psi_{(2)}$, град. | –25,625 | –40,514 | –47,673 | –51,247 | –53,198 |
| $M^{*}_{(c)}$, ГПа | 0,806 | 0,814 | 0,882 | 0,923 | 0,947 |

В таблице представлена зависимость $M^{*}_{(c)}$ от угла укладки арматуры в направлении винтовых линий при заданных термосиловых полях.

## Библиографический список

1. Бабин А.И., Немировский Ю.В. Термоупругость узлов с полимерными подшипниками скольжения // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: тр. XXI Всерос. конф. / под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск, 2009.

2. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. – М.; Л., 1947. – Ч. 1.

3. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: справочник. Кн. 2: Теплоэнергетика и теплотехника / под общ. ред. В.А. Григорьева, В.М. Зорина. – 2-е изд., перераб. – М., 1988.

4. Гришин А.М., Кузин А.Я. О гетерогенно-гомогенном воспламенении пластины при обтекании потоком окислителя // Горение и взрыв. – М., 1969.

5. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск, 2001.