УДК 539.3

А.Н. Андреев

Дифференциальные уравнения связанной задачи термоупругого деформирования слоистой композитной оболочки

A.N. Andreev

Differential Equations of the Coupled Problem of a Layered Composite Shell Thermoelastic Deformation

Исследуется связанная задача термоупругого деформирования слоистой оболочки. Дифференциальные уравнения задачи, позволяющие обеспечить сопряжение полей деформаций и температур, учесть явление поперечных сдвиговых деформаций и нелинейный характер распределения температуры по толщине, получены из обобщенного принципа виртуальных перемещений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, композитная оболочка, термоупругое деформирование, связанная задача.

The paper investigates thermoelastic deformation coupled problem for a layered composite shell. Differential equations of this problem allowing us to consider interface of deformations and temperatures fields and taking into account the phenomenon of transverse shear deformations and nonlinear character of temperature distribution over the thickness, are obtained from the generalized principle of virtual displacements.

Key words: differential equations, composite shell, thermoelastic deformation, coupled problem.

Рассматривается слоистая композитная оболочка постоянной толщины *h,* собранная из *m* слоев также постоянной толщины, каждый из которых армирован семейством однонаправленных волокон. Пусть x^1, x^2 – внутренние координаты отсчетной поверхности, в качестве которой примем «нижнюю» лицевую поверхность тела оболочки; z – нормальная координата. Уравнения поверхностей раздела j-го и $(j + 1)$-го слоев запишутся в виде

$$z = h_j,\ j = 1, 2, \ldots, m - 1, \tag{1}$$

где $h_j = const$, $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m = h$.

На поверхностях (1) поперечные компоненты $\tau^{3\alpha}, \sigma^{33}$ тензора напряжений и компоненты v_α, v_3 вектора перемещений должны удовлетворять условиям непрерывности [1], а приращение ϑ температуры – условиям идеального теплового контакта [2, 3].

Уравнения Дюамеля-Неймана анизотропного упругого тела запишем в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\lambda\omega}\varepsilon_{\beta\omega} - c^{\alpha\beta}\vartheta,\quad \tau^{3\alpha} = p^{\alpha\beta}\gamma_{\beta 3}, \\ \gamma_{3\alpha} = q_{\alpha\beta}\tau^{3\beta}. \tag{2}$$

Здесь $A^{\alpha\beta\lambda\omega}$, $p^{\alpha\beta}$ – компоненты тензоров эффективных тангенциальных и поперечных сдвиговых жесткостей соответственно; $c^{\alpha\beta}$ – тензор температурных жесткостей. Обозначив через K^{ij} эффективный тензор коэффициентов теплопроводности композитного материала, запишем закон Фурье для армированной среды (q^i – компоненты вектора теплового потока):

$$q^i = -K^{ij}\nabla_j\vartheta\,. \tag{3}$$

Компоненты указанных тензоров определяются расчетным путем [1, 3] и являются функциями механических и температурных характеристик элементов композита и структурных параметров армирования.

Неклассические дифференциальные уравнения задачи термоупругого деформирования многослойной анизотропной оболочки строим на основе следующего допущения [1] о законе распределения поперечных компонент тензора деформаций по толщине оболочки:

$$\gamma^{0(k)}_{\alpha 3} = q^{0(k)}_{\alpha\beta}\left[\tau^{3\beta}_0 + zh^{-1}\left({}^{03\beta}_{h} - \tau^{3\beta}_0\right) + f'(z)\pi^\beta\right], \\ \varepsilon^{0(k)}_{33} = 0. \tag{4}$$

Здесь k = 1, 2, …; m – порядковый номер слоя; $\tau^{3\beta}_0$, $\tau^{3\beta}_h$ – значения поперечных сдвиговых напряжений на верхней и нижней лицевой поверхности соответственно; $\pi^\beta(x^1, x^2, t)$ – независимые кинематические характеристики, учитывающие наличие поперечных сдвиговых деформаций; $f(z)$ – функциональный параметр, задающий закон распределения этих деформаций по толщине слоистой оболочки.

Распределение компонент вектора перемещений по толщине многослойного пакета, соответствующее закону (4), определяется из соотношений деформации – перемещения [1] и имеет вид

$$v^{0(k)}_3 = w(x^1, x^2, t),\ v^{0(k)}_\alpha = \lambda^{0(k)}_\alpha(x^1, x^2, z,\ t) + \\ + u_\alpha(x^1, x^2,\ t) + z\eta_\alpha(x^1, x^2, t) + \\ + \mu^{0(k)}_{\alpha\beta}(x^1, x^2, z, t)\pi^\beta(x^1, x^2, t). \tag{5}$$

Легко видеть, что представления (4), (5) удовлетворяют условиям межслоевого контакта и условиям нагружения на поверхностях $z = 0$, $z = h$ оболочки. Распределение тангенциальных деформаций по толщине пакета слоев, отвечающее кинематическому закону (5), записывается в виде

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^{(k)}_{\alpha\beta} &= (\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\nabla_{\beta}\lambda^{\circ(k)}_{\tau} + (\delta^{\tau}_{\beta} - zb^{\tau}_{\beta})\nabla_{\alpha}\lambda^{\circ(k)}_{\tau} + \\ &+(\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\nabla_{\beta}u_{\tau} + (\delta^{\tau}_{\beta} - zb^{\tau}_{\beta})\nabla_{\alpha}u_{\tau} + \\ &z(\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\nabla_{\beta}\eta_{\tau} + z(\delta^{\tau}_{\beta} - zb^{\tau}_{\beta})\nabla_{\alpha}\eta_{\tau} + \\ &+(\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\mu^{\circ(k)}_{\tau\sigma}\nabla_{\beta}\pi^{\sigma} + (\delta^{\tau}_{\beta} - zb^{\tau}_{\beta})\mu^{\circ(k)}_{\tau\sigma}\nabla_{\alpha}\pi^{\sigma} + \\ &+(\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\left(\nabla_{\beta}\mu^{\circ(k)}_{\tau\sigma}\right)\pi^{\sigma} + (\delta^{\tau}_{\beta} - zb^{\tau}_{\beta})\left(\nabla_{\alpha}\mu^{\circ(k)}_{\tau\sigma}\right)\pi^{\sigma} - \\ &-2(b_{\alpha\beta} - zb^{\tau}_{\alpha}b_{\tau\beta})w. \end{aligned} \tag{6}$$

Предполагая, что на лицевых поверхностях $z = 0$, $z = h$ известны значения температур:

$$\text{при } z = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \text{при } z = h \quad \vartheta = \vartheta_h, \tag{7}$$

примем следующий закон распределения приращения температуры по толщине

$$\begin{aligned} \vartheta_s &= g(z)\Pi(x^1, x^2, t) + \\ &+\frac{\vartheta_h - \vartheta_0}{\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{K^{33}_1}{K^{33}_i}\left(h_i - h_{i-1}\right)}\left[\frac{K^{33}_1}{K^{33}_s}\left(z - h_{s-1}\right) + \sum_{i=1}^{s-1}\frac{K^{33}_1}{K^{33}_i}\left(h_i - h_{i-1}\right)\right] + \\ &+\vartheta_0, \quad \left(h_{s-1} \le z \le h_s\right). \end{aligned} \tag{8}$$

В (8) $s = 1, 2, ..., m$ – порядковый номер слоя; $\Pi(x^1, x^2, t)$ – независимая характеристика, учитывающая отклонение поля температур от линейного закона; $g(z)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\begin{gathered} g(0) = g(h) = 0, \\ K^{33}_j g'(h_j - 0) = K^{33}_{j+1} g'(h_j + 0) \quad (j = 1, 2, ..., m-1), \end{gathered} \tag{9}$$

K^{33}_s – коэффициенты тензора теплопроводности S-го слоя.

Легко убедиться, что распределение температуры (8) удовлетворяет условиям нагрева (7) на лицевых поверхностях оболочки и условиям идеального теплового контакта на поверхностях раздела ее слоев. Функцию $g(z)$ можно взять в виде

$$g(z) = \int_0^z \left(t - h_1\right)\left(t - h_2\right)\cdots\left(t - h_{m-1}\right)dt, \tag{10}$$

если

$$g(h) = \int_0^h \left(t - h_1\right)\left(t - h_2\right)\cdots\left(t - h_{m-1}\right)dt = 0 \tag{11}$$

(условие (11) выполнено, например, в случае двухслойной оболочки, геометрия пакета слоев которой симметрична по толщине) и в виде

$$g(z) = \int_0^z \left(t - a\right)\left(t - h_1\right)\left(t - h_2\right)\cdots\left(t - h_{m-1}\right)dt, \tag{12}$$

если условие (11) нарушено. Параметр a в (12) однозначно определяется из условия $g(h) = 0$. Другой способ задания функции $g(z)$ предложен в [4].

Дифференциальные уравнения связанной задачи термоупругого деформирования слоистой оболочки получим из обобщенного принципа виртуальных перемещений [2]:

$$\delta\left(W + P + D\right) = \delta L - \int_A \vartheta\delta H_n dA, \tag{13}$$

где $W = \frac{1}{2}\int_B A^{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}dV$, $P = \frac{c_{\varepsilon}}{2T_0}\int_B \vartheta^2 dV$, $\delta D = \int_B \lambda^{ij}\dot{H}_j\delta H_i dV$, $\delta L = \int_A p^i\delta v_i dA + \int_B\left(F^i - \rho\ddot{v}^i\right)\delta v_i dV$ – потенциальная энергия деформации, температурный потенциал, вариация функции диссипации D, виртуальная работа поверхностных и массовых сил соответственно; $q^i = -T_o\dot{H}^i = -K^{ij}\nabla_j\vartheta$ – компоненты вектора теплового потока; c_{ε}, ρ – теплоемкость и плотность композитного материала соответственно; B – объем, занятый телом оболочки; A – поверхность, ограничивающая тело оболочки.

Используя эти соотношения, приводим уравнение (13) к виду

$$\begin{aligned} &\int_B\left[\sigma^{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \tau^{\alpha 3}\delta\gamma_{\alpha 3} + \frac{g(z)}{T_0}\left(c_{\varepsilon}\dot{\vartheta} - \nabla_i(K^{ij}\nabla_j\vartheta) - T_0c^{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right)\delta\Pi\right]dV = \\ &= \int_B\left[\left(F^{\alpha} - \rho\ddot{v}^{\alpha}\right)\delta v_{\alpha} + \left(F^3 - \rho\ddot{w}\right)\delta w\right]dV + \\ &+\int_A\left(p^{\alpha}\delta v_{\alpha} + p^3\delta w\right)dA - \int_A \dot{H}_n g(z)\delta\Pi dA - \\ &-\frac{1}{T_0}\int_A n_i K^{ij}\nabla_j\vartheta g(z)\delta\Pi dA. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя в вариационное уравнение (14) выражения (6)–(10), выполняя интегрирование по поперечной координате z и приравнивая к нулю множители при независимых вариациях обобщенных перемещений и множитель при вариации поля температур отдельно в поверхностном и контурном интегралах, приходим к системе дифференциальных уравнений связанной задачи термоупругого деформирования слоистой оболочки

$$\begin{aligned} &\ddot{X}^{\beta} - b^{\beta}_{\alpha}\ddot{Y}^{\alpha} - \nabla_{\alpha}\mathrm{T}^{\alpha\beta} + b^{\beta}_{\lambda}\nabla_{\alpha}\mathrm{M}^{\alpha\lambda} = \tau^{3\beta}_{+} - \tau^{3\beta}_{0} - hb^{\beta}_{\lambda}\tau^{3\lambda}_{+}, \\ &\ddot{I} + \nabla_{\beta}\ddot{Y}^{\beta} - b_{\alpha\beta}\mathrm{T}^{\alpha\beta} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\mathrm{M}^{\alpha\beta} = \\ &= \sigma^{33}_{+} - \sigma^{33}_{0} + \left(\tau^{3\beta}_{0} - \tau^{3\beta}_{+}\right)\eta_{\beta} + h\nabla_{\beta}\tau^{3\beta}_{+}, \\ &\ddot{Z}^{\beta} - \nabla_{\alpha}\mathrm{S}^{\alpha\beta} + \mathrm{Q}^{\beta} = \overset{+}{\tau}_{3\alpha}\mu^{\circ\alpha\beta}_{(m)}(x^1, x^2, h), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\hat{c}_{\varepsilon}\dot{\Pi} - \nabla_{\alpha}\left(\hat{K}^{\alpha\beta}\nabla_{\beta}\Pi\right) + \hat{K}^{3\alpha}\nabla_{\alpha}\Pi + \nabla_{\alpha}\left(\hat{K}^{\alpha 3}\Pi\right) + \\ &+\hat{K}^{33}\Pi - T_0\int_0^h c^{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}g(z)dz = W. \end{aligned}$$

Здесь

$$\left[\mathrm{T}^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}, S^{\alpha\cdot}_{\cdot\lambda}\right] = \sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\left(\sigma^{\alpha\beta}_{(k)} - zb^{\beta}_{\omega}\sigma^{\alpha\omega}_{(k)}\right)\left[1, z, \mu^{\circ(k)}_{\beta\lambda}\right]\sqrt{g/a}\; dz,$$

$$\mathrm{Q}_{\beta} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \Big[\Big(\sigma^{\alpha\lambda}_{(k)} - z b^{\lambda}_{\omega} \sigma^{\alpha\omega}_{(k)} \Big) \nabla_{\alpha} \mu^{\circ(k)}_{\lambda\beta} +$$

$$+ \Big(\tau^{3\lambda}_{(k)} - z b^{\lambda}_{\omega} \tau^{3\omega}_{(k)} \Big) q^{\circ(k)}_{\lambda\beta} f'(z) \Big] \sqrt{g/a}\ dz,$$

$$\Big[X_{\beta}, Y_{\beta}, Z^{\alpha} \Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_{(k)} \Big(\lambda^{\circ(k)}_{\beta} + u_{\beta} + z\eta_{\beta} + \mu^{\circ(k)}_{\beta\alpha} \pi^{\alpha} \Big) \Big[1, z, \mu^{\beta\alpha}_{\circ(k)} \Big] \sqrt{g/a}\, dz,$$

$$I = w \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_{(k)} \sqrt{g/a}\ dz,\ \hat{K}^{\alpha\beta} = \int_{0}^{h} g^2(z) K^{\alpha\beta} dz,$$

$$\hat{K}^{\alpha 3} = \hat{K}^{3\alpha} = \int_{0}^{h} g(z) g'(z) K^{\alpha 3} dz,$$

$$\hat{K}^{33} = \int_{0}^{h} g(z) g''(z) K^{33} dz,\ \ \hat{c}_{\varepsilon} = \int_{0}^{h} c_{\varepsilon} g^2(z) dz.$$

Замкнутая система (15) уравнений термоупругого деформирования слоистой композитной оболочки позволяет учесть сопряжение полей деформаций и температур в теле оболочки, явление поперечных сдвигов в ее слоях, нелинейный закон распределения температуры по поперечной координате. Сопряжение полей деформаций и температур осуществляется подчеркнутым членом в системе (15) и исчезает только в случае стационарного теплового потока. Из вариационного уравнения (14) следуют также и краевые условия. Кинематические и естественные граничные условия установлены в [1] и здесь сохраняют свой вид. Тепловые краевые условия отражают взаимодействие контура оболочки с окружающей средой. Этими условиями в точках контура задается либо функция П, либо поток тепла через контур.

К достоинствам предлагаемой модели следует отнести независимость порядка соответствующей системы дифференциальных уравнений и структуры этой системы от количества слоев оболочки и строения пакета слоев.

Библиографический список

1. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск, 2001.

2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М., 1970.

3. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Рациональное проектирование армированных конструкций. – Новосибирск, 2002.

4. Немировский Ю.В., Бабин А.И. Теплопроводность многослойных армированных оболочек // Нелинейные задачи расчета тонкостенных конструкций: мат. Всесоюз. конф. – Саратов, 1989.