УДК 539.3

А.В. Андреев, А. Аминиан

Численно-аналитическое моделирование трещины, достигающей границы раздела материалов

A.V. Andreev, A. Aminian

Analytical and Numerical Modeling a Crack Reaching the Bimaterial Interface

В статье разработан метод двумерного численно-аналитического исследования равновесного состояния криволинейной трещины, выходящей под произвольным углом на прямолинейную границу раздела упругих материалов.

Ключевые слова: трещина, композиционный материал, хрупкое разрушение, граница раздела материалов, сингулярное интегральное уравнение.

The article is aimed to develop method for two-dimensional analytical and numerical investigation of equilibrium state of a curvilinear crack coming out at an arbitrary angle to the straight boundary between the elastic materials.

Key word: crack, composite material, brittle fracture, material interface, singular integral equation.

Проблемам разрушения композиционных материалов, повсеместно используемых в технических системах, посвящено значительное количество теоретических исследований. В частности, активно анализировались вопросы взаимодействия трещин и других дефектов с границей раздела материалов, при этом особое развитие получили различные постановки задач о равновесии и росте трещины по границе раздела (трещина–расслоение). В то же время адекватные с точки зрения механики хрупкого разрушения постановки задач о трещине, достигающей границы раздела материалов, ограничены рассмотрением прямолинейных трещин, перпендикулярных этой границе. В данной работе создан метод двумерного численно-аналитического исследования равновесного состояния криволинейной трещины, выходящей под произвольным углом на прямолинейную границу раздела упругих материалов, в рамках критериев хрупкого разрушения.

Рассматривается краевая задача линейной теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости, ослабленной гладкой криволинейной трещиной-разрезом L, начало которого лежит на границе раздела материалов с различными свойствами. На основе полученных в [1] аналитических результатов для задачи о связанных полуплоскостях такая краевая задача сводится к одномерному сингулярному интегральному уравнению первого рода с ядром Коши относительно производной от разрывов смещений на трещине. Следует отметить, что аналогичное по форме и свойствам сингулярное интегральное уравнение описывает краевую задачу и тогда, когда контур L представляет собой систему разрезов в нижней полуплоскости, а полученные в [1] результаты позволяют выполнить непосредственное обобщение на случай системы разрезов как в нижней, так и в верхней полуплоскостях (изменяется только вид регулярных ядер). Кроме того, предложенные в работе подходы легко обобщаются на случай составных тел конечных размеров (сопоставимых с размерами трещины) и сложных форм в рамках рассмотрения границ разделов как разрезов с краевыми условиями типа сшивки, а границ тела и вырезов в нем – как замкнутых («односторонних») контуров интегрирования [1, 2].

Как известно [3], решение построенного сингулярного интегрального уравнения определяет упругое поле напряжений, связанное с разрывом смещений на трещине и имеющее особенности на ее концах [4]. В краевых задачах, конечная цель анализа которых состоит в определении нелокальных характеристик решения (например, площади раскрытия трещины), для численного решения сингулярного интегрального уравнения нет необходимости принимать во внимание эти особенности и можно использовать, например, чрезвычайно простой в реализации метод дискретных вихрей [5]. В то же время применение такого рода методов приводит к появлению значительных неустранимых погрешностей в определении локальных характеристик – асимптотики решения вблизи концов промежутка интегрирования [6]. Таким образом, анализ условий равновесия и роста трещин в рамках механики хрупкого разрушения, оперирующей коэффициентами интенсивности напряжений, которые с точностью до постоянного множителя совпадают с главным членом асимптотического разложения решения вблизи конца трещины, требует корректного учета показателей особенности решения сингулярного интегрального уравнения. В этом контексте отметим, что существенным элементом задачи о трещине, достигающей границы раздела материалов, является наличие нетривиальной (некорневой) осо-

бенности решения в интерфейсной вершине в отличие от вершины, лежащей в однородном материале [7]. В математическом аспекте наличие такой особенности связано с тем, что ядра сингулярного интегрального уравнения имеют неподвижные особенности на концах промежутка интегрирования и являются обобщенными ядрами типа Коши. Поскольку эти ядра имеют весьма сложный вид, в общем случае сингулярные интегральные уравнения следует решать численно, для чего используется прямой численный метод [8], развитый и дополненный в [9]. Разработанный подход, явным аналитическим образом учитывающий асимптотику упругого поля напряжений, потребовал привлечения достаточно сложного математического аппарата теории специальных функций. Сущность этого подхода заключается в использовании квадратурных формул Гаусса-Якоби и метода коллокации, в совокупности реализующих хорошо зарекомендовавший себя в задачах о трещинах в однородном теле метод механических квадратур.

Для численного решения сингулярного интегрального уравнения необходимо для каждой конкретной задачи определить предварительно показатель особенности в интерфейсной вершине, поскольку его величина зависит от ее геометрических и материальных параметров. В [7] был разработан подход к вычислению показателей особенности решения сингулярных интегральных уравнений с обобщенными ядрами весьма общего вида. В [7] также было показано, что в зависимости от параметров задачи этот показатель особенности может принимать как вещественные, так и комплексные значения. В отношении комплексного показателя особенности сингулярного интегрального уравнения заметим лишь, что такой случай требует введения дополнительной модели в вершине трещины (например, примыкающей к ней области контакта), что выходит за рамки данной работы. Для вещественного случая, представляющего наибольший интерес, указан альтернативный метод определения показателя особенности [10], который также может использоваться для других геометрических конфигураций трещин и границ раздела материалов, в частности, для трещины, испытывающей излом при ее распространении через границу раздела материалов. Кроме того, техника последнего метода оказывается востребованной при вычислении коэффициентов интенсивности напряжений в интерфейсной вершине трещины. В этих целях предложен оригинальный подход, реализующий сращивание решения внешней задачи теории упругости о нагруженном теле с трещиной, с решением внутренней асимптотической задачи, описывающей главный член сингулярного поля напряжений вблизи вершины составного клина. Следует подчеркнуть, что вблизи интерфейсной вершины трещины имеет место ситуация, принципиально обособливающая случай неоднородного материала. Если для трещины в однородном материале максимальные напряжения всегда имеют место на ее продолжении (на луче, касательном к линии трещины в ее вершине), трещине, достигающей границы раздела материалов, свойственна тенденция к излому – изменению направления ее распространения. Более того, при анализе условий равновесия в рассматриваемой задаче следует также вычислять коэффициенты интенсивности напряжений на линии раздела материалов и сравнивать их с соответствующей вязкостью разрушению, свойственной соединению двух материалов, определяя возможность дальнейшего распространения трещины вдоль границы раздела.

Видим, что развитый метод позволяет получать решения широкого класса задач механики хрупкого разрушения о равновесном состоянии трещин, достигающих границы раздела упругих материалов. Выявлены нетривиальные эффекты, возникающие при анализе предельного равновесия трещины, выходящей под произвольным углом на границу раздела материалов, где имеет место неоднородность упругих свойств и сопротивления разрушению.

Библиографический список

1. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб., 1999.
2. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев, 1989.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М., 1968.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М., 1995.
6. Андреев А.В. Развитие методов прямого численного решения одномерных интегродифференциальных уравнений механики // Известия РАН. МТТ. – 2007. – №2.
7. Андреев А.В. Метод определения комплексных особенностей степенного типа в решениях сингулярных интегральных уравнений с обобщенными ядрами и сопряженными неизвестными // Известия РАН. МТТ. – 2009. – №5.
8. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations // Mechanics of Fracture. V. 1: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. – Leyden, 1973.
9. Андреев А.В. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Известия РАН. МТТ. – 2005. – №1.
10. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity-II: Asymptotic identification // Appl. Mech. Rev. – 2004. – V. 57.