

*Е.С. Каган***Применение метода анализа иерархий
и теории нечетких множеств для оценки
сложных социально-экономических явлений****E.S. Kagan***The Use of the Analytic Hierarchy Process (AHP)
and Fuzzy Sets Theory for Estimating Complex
Socio-Economic Phenomena**

Представлено описание разработанной методики получения количественной оценки интегрального показателя, характеризующего сложное социально-экономическое явление, основанное на применении метода анализа иерархий и элементов теории нечетких множеств.

Ключевые слова: интегральный показатель, метод анализа иерархий, нечеткие множества.

В связи с появлением всевозможных пакетов прикладных программ, позволяющих проводить статистический анализ экспериментальных данных, в гуманитарных исследованиях наблюдается тенденция применения методов многомерного анализа для изучения различных социально-экономических явлений и процессов.

Для получения первичной информации об изучаемом объекте специалисты гуманитарных областей знаний нередко пользуются данными анкетного опроса, специально разработанными тестами и методиками. При этом полученная информация часто носит качественный характер, в то время как большинство методов многомерного анализа данных работают в предположениях, что изучаемые признаки должны быть измерены в количественной шкале. Таким образом, получение количественной оценки изучаемого явления – это первая проблема таких исследований.

С другой стороны, большинство изучаемых социально-экономических явлений имеют сложную структуру, состоящую из ряда компонент. Далее приводится один из подходов получения интегральной оценки такого явления.

Интегральная оценка представляет собой либо сумму баллов, набранных испытуемым по различным методикам, с помощью которых оценивают компоненты явления, либо суммируются значения вариантов ответов респондента на вопросы анкеты, отражающие его отношение к оцениваемому явлению.

This article presents a technique to obtain a quantitative evaluation of the integral index which characterizes the complex socio-economic phenomenon. The technique is based on the Analytic Hierarchy Process and the theory of fuzzy sets.

Key words: integral index, Analytic Hierarchy Process, fuzzy sets.

Такой подход содержит ряд недостатков. Во-первых, компоненты явления могут быть измерены в различных шкалах. Во-вторых, простое сложение значений показателей может быть недопустимо из-за их различной природы и единиц измерения. В-третьих, не все структурные составляющие изучаемого явления могут оказывать на него одинаковое воздействие, поэтому использование равных весовых коэффициентов при суммировании составляющих явления может привести к потере информации.

На наш взгляд, решить вышеперечисленные проблемы, возникающие при нахождении количественной оценки сложных явлений, можно путем использования предлагаемой ниже методики, работающей на основе применения метода анализа иерархий (МАИ) [1] и аппарата теории нечетких множеств [2].

На первом этапе исследования необходимо представить изучаемое явление в виде многоуровневой иерархической модели, путем проведения декомпозиции проблемы на сравнительно простые составляющие. Фокус иерархии – это само изучаемое явление. Работа алгоритма строится на предположении о том, что каждая составляющая явления характеризуется двумя величинами: важностью и степенью выраженности.

Для определения важности составляющих модели на каждом уровне иерархии формируются матрицы парных сравнений, представляющие собой обратно симметричные матрицы. Для нахождения вектора

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект №11-06-00103).

приоритетов по соответствующей матрице парных сравнений находят главный собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному значению матрицы. Тогда элементы вектора приоритетов будут равны частному от деления элементов собственного вектора на сумму его элементов.

После того как построены матрицы парных сравнений для составляющих всех уровней и найдены значения элементов вектора приоритетов сравниваемых критериев, начинается второй этап, называемый иерархическим синтезом. Иерархический синтез осуществляется в целях определения вектора приоритетов составляющих нижнего уровня (которые непосредственно поддаются измерению) относительно фокуса иерархии.

Для определения степени выраженности составляющих нижнего уровня иерархии необходимо каждую из рассматриваемых компонент представить в виде лингвистической переменной с соответствующим терм-множеством.

Переход от четкого значения переменной к нечеткому осуществляется с помощью процедуры фазификации, заключающейся в переводе измеренного четкого значения в значение функции принадлежности соответствующего терма лингвистической переменной.

В качестве функции принадлежности может быть выбрана триангулярная функция (функция треугольного вида), которая задается соотношением (1),

$$\mu(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases} \quad (1)$$

где a – левый ноль; b – точка, в которой значение функции принадлежности равно 1; c – правый ноль.

При фазификации используется алгоритм, описанный в [3]. Отличие данного алгоритма от известных алгоритмов, используемых в теории нечетких выводов [2, с. 201–205], заключается в том, что четкое значение переводится не в одно нечеткое число, а в группу нечетких чисел, соответствующих функциям принадлежности различных термов лингвистической переменной. Таким образом, составляющие нижнего уровня иерархической модели представляются в виде объединения функций принадлежности соответствующих термов (2)

$$X_{ij} = \frac{\mu_{ij}^1}{T1} \oplus \frac{\mu_{ij}^2}{T2} \oplus \dots \oplus \frac{\mu_{ij}^k}{Tk}, \quad (2)$$

где X_{ij} – значение i -й компоненты j -го уровня иерархии; k – номер терма.

Используя нечеткое отношение $X_i \times T$, строится нечеткая составная матрица $M(X_i)$, строки которой представляют собой значение функций принадлежности соответствующих термов для компонент нижнего уровня иерархии.

Рассмотрим работу алгоритма на конкретном примере. Пусть в результате изучения некоторого явления с помощью МАИ была построена двухуровневая иерархическая модель, в которой первый уровень иерархии состоит из трех компонент: X_{11} , X_{12} , X_{13} . В свою очередь составляющая X_{12} состоит из трех компонент, а составляющие X_{11} и X_{13} – из двух. Вычисленные по соответствующим матрицам парных сравнений приоритеты составляющих всех уровней иерархии представлены в таблице 1.

Таблица 1
Приоритеты составляющих двухуровневой иерархической модели

Компоненты I-го уровня иерархии	Приоритеты составляющих I-го уровня иерархии	Компоненты II-го уровня иерархии	Приоритеты составляющих II-го уровня иерархии
X_{11}	0,33	X_{221}	0,75
		X_{212}	0,25
X_{12}	0,5	X_{221}	0,45
		X_{222}	0,45
		X_{223}	0,1
X_{13}	0,17	X_{231}	0,25
		X_{232}	0,75

Пусть каждая из составляющих нижнего уровня иерархии представляется в виде лингвистической переменной с соответствующим терм-множеством $T = (T1$ – низкий, $T2$ – средний, $T3$ – высокий). В качестве функции принадлежности будем использовать триангулярную функцию.

Тогда функции принадлежности термов описываются соответственно соотношениями (3)–(5).

$$\mu_{T1}(x) = \begin{cases} 1-2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (3)$$

$$\mu_{T2}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2-2x, & 1/2 \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (4)$$

$$\mu_{T3}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x-1, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

В таблице 2 представлены результаты проведения процедуры фазификации и приоритеты составляющих иерархической модели.

С использованием данных, представленных в таблице 2, алгоритм получения интегральной оценки заключается в проведении следующих этапов.

Так как наша иерархическая модель имеет двухуровневую структуру, то на первом этапе алгоритма получают нечеткую оценку составляющих первого уровня иерархии (6) как результат произведения вектора значений весовых коэффициентов состав-

ляющих второго уровня иерархии компоненты X_i (i -я компонента первого уровня иерархии) на матрицу значений функций принадлежности данной компоненты.

$$\begin{aligned} & (M(i, 1), M(i, 2), M(i, 3)) = \\ & = (W_2(i, 1), W_2(i, 2), \dots, W_2(i, (n(i))) \times M(X_i), \end{aligned} \quad (6)$$

где $M(i, k)$ – значение функции принадлежности i -й переменной первого уровня иерархии для k -го терма.

Таблица 2

Приоритеты составляющих иерархической модели и значения функций принадлежности термов лингвистической переменной

Компоненты I-го уровня иерархии	Весовой коэффициент $W_1(i)$ (I-й уровень иерархии)	Компоненты II-го уровня иерархии	Весовой коэффициент $W_2(i, l)$ (II-й уровень иерархии)	Значения функции принадлежности соответствующих термов		
				$T1$	$T2$	$T3$
X_{11}	0,33	X_{211}	0,75	0	1	0
		X_{212}	0,25	0	0,6	0,4
X_{12}	0,5	X_{221}	0,45	0,8	0,2	0
		X_{222}	0,45	0,2	0,8	0
		X_{223}	0,1	0,6	0,4	0
X_{13}	0,17	X_{231}	0,25	0	1	0
		X_{232}	0,75	0	0,2	0,8

Так, например, для переменной X_{12} вектор значений функции принадлежности соответствующих термов будет иметь вид (7):

$$\begin{aligned} & (M(2,1), M(2,2), M(2,3)) = \\ & = (0,45; 0,45; 0,1) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} = \\ & = (0,51; 0,49; 0). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, после применения первого этапа алгоритма нечеткая матрица $M(X_i)$ принимает вид (8):

$$M(X_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,51 & 0,49 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

На втором этапе получаем нечеткую оценку фокуса иерархии, используя соотношение (9)

$$(M(1), M(2), M(3)) = (W_1(1), W_1(2), W_1(3)) \times M(X_i). \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & (M(1), M(2), M(3)) = (0,33; 0,5; 0,17) \times \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,51 & 0,49 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,255; 0,61; 0,135). \end{aligned}$$

Полученный с помощью соотношения (9) вектор $(M(1), M(2), M(3)) = (0,255; 0,61; 0,135)$ представляет собой нечеткую оценку изучаемого явления. Для получения четкого значения необходимо провести процедуру дефазификации. Данную процедуру можно осуществлять различными методами. Наиболее часто применяется центроидный метод.

Используя центроидный метод, центры масс соответствующих термов находятся по формуле (10)

$$VG(T) = \frac{\int_{\min}^{\max} x \mu(x) dx}{\int_{\min}^{\max} \mu(x) dx}. \quad (10)$$

В случае описания лингвистической переменной тремя термами с треугольной функцией принадлежности центры масс равны:

$$VG(T1) = \frac{1}{6}, \quad VG(T2) = \frac{3}{6}, \quad VG(T3) = \frac{5}{6}.$$

Обозначим через Y – четкую оценку исследуемого явления, значение которой с помощью центроидного метода вычисляется по формуле (11)

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^k VG(Ti) \cdot M(i)}{\sum_{i=1}^k M(i)}. \quad (11)$$

Для нашего примера получаем

$$Y = \frac{\frac{1}{6} \cdot 0,255 + \frac{3}{6} \cdot 0,61 + \frac{5}{6} \cdot 0,135}{0,255 + 0,61 + 0,135} = 0,46.$$

В заключение отметим, что данная методика использовалась для получения интегральной оценки переговорной позиции работника в его взаимоотношениях с работодателем. Представление составляющих иерархической модели в виде лингвистических переменных при получении интегральной оценки позволяет использовать данные различной природы. Новый подход к оценке значений компонент иерархической модели с помощью группы нечетких чисел, являющихся функциями принадлежности различных термов, позволяет снизить степень субъективности и исследовательской неопределенности.

Библиографический список

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: пер. с англ. – М., 1993.
2. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб., 2003.
3. Lee H.M. Applying fuzzy set theory to evaluate the rate of aggregative risk in software development // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – V. 79.