УДК 512.531.45

С.А. Шахова

Абсолютно замкнутые группы в квазимногообразиях 2-ступенно нильпотентных групп*

S.A. Shakhova

Absolutely Closed Groups in the Quasi-varieties of Nilpotent Groups of Class at Most Two

Пусть H_{prs}, H_p – группы, имеющие в многообразии нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше двух следующих представлений: $H_{prs} = gr(x, y \| x^{p^r} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1)$, $H_p = gr(x, y \| [x, y]^p = 1)$, где p – простое число, r, s – натуральные числа. Доказано, что группа H_{prs} является абсолютно замкнутой в квазимногообразии qH_{prs}, а любая полная группа из квазимногообразия qH_p абсолютно замкнута в квазимногообразии qH_p.

Ключевые слова: квазимногообразие, абсолютно замкнутая группа, доминион, группа.

We assume that H_{prs}, H_p are the groups with the following presentations in the variety of nilpotent groups of class at most two: $H_{prs} = gr(x, y \| x^{p^r} = y^{p^s} = [x, y]^p - 1)$, $H_p = gr(x, y \| [x, y]^p = 1)$, where p is a prime number, r, s are natural numbers. It is proved that the group H_{prs} is an absolutely closed group in the quasi-variety qH_{prs}, and any divisible group belonging to the quasi-variety qH_p is an absolutely closed group in the quasi-variety qH_p.

Key words: quasi-variety, absolutely closed group, dominion, group.

Введение. Определим, следуя [1], доминион подгруппы *H* группы *G* в квазимногообразии групп *M* как множество элементов $g \in G$ таких, что для любых двух гомоморфизмов φ, ψ : $G \to B \in M$, совпадающих на *H*, верно $\varphi(g) = \psi(g)$.

Из определения доминиона вытекает, что он является подгруппой группы *G* и содержит *H*. Если в любой группе *G* из *M*, содержащей *H* в качестве подгруппы, доминион *H* совпадает с *H*, то группа *H* называется абсолютно замкнутой в квазимногообразии *M*.

Группы, абсолютно замкнутые в многообразиях 2-ступенно нильпотентных групп, изучались в [2–4], а в квазимногообразиях метабелевых групп – в [5]. В настоящей работе исследуются абсолютно замкнутые группы в квазимногообразиях 2-ступенно нильпотентных групп.

Зафиксируем простое число *p*, натуральные числа *r*, *s* и рассмотрим группы, имеющие в многообразии нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше двух, следующие представления:

$$H_p = gr(x, y \| [x, y]^p = 1),$$

$$H_{prs} = gr(x, y \| x^{p^r} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1).$$

Заметим, что группы H_{prs} рассматривались в [6]. Обозначим qH_p, qH_{prs} квазимногообразия, порожденные группами H_p, H_{prs} соответственно.

Доказано, что группа H_{prs} является абсолютно замкнутой в квазимногообразии qH_{prs}, а любая полная группа из квазимногообразия qH_p абсолютно замкнута в квазимногообразии qH_p.

Используемые в работе сведения из теории групп содержатся в [7], а из теории квазимногообразий – в [8–10].

Приведем список обозначений и определений, применяемых в работе:

gr(*H*) – подгруппа группы *G*, порожденная элементами множества *H*;

$H \lhd G$ – *H* является нормальной подгруппой группы *G*;

G / H – фактор-группа группы *G* по нормальной подгруппе *H*;

Z(*G*) – центр группы *G*;

* Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (мероприятие 1).

$G^{'}$ – коммутант группы G;

(n,r) – наибольший общий делитель чисел n, r.

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy.$$

Группа называется полной, если из любого элемента в ней извлекается корень произвольной степени.

Основной результат.

Лемма 1. *Группа H_{prs} порождается любыми двумя неперестановочными элементами.*

Доказательство. Пусть $[g_1,g_2]\neq e$ для некоторых элементов g_1,g_2 группы H_{prs}, и $g_1=x^{k_1}y^{k_2}[x,y]^{k_3}$, $g_2=x^{l_1}y^{l_2}[x,y]^{l_3}$ – их записи через порождающие этой группы. Поскольку $[g_1,g_2]=[x,y]^{k_1l_2-k_2l_1}\neq e$, то $(k_1l_2-k_2l_1,p)=1$, $[x,y]\in gr(g_1,g_2)$. Кроме того, $(k_1,p)=1$ или $(k_2,p)=1$. Если $(k_1,p)=1$, то $p^ru+k_1v=1$ для некоторых целых чисел u,v. Тогда $g_1^{\ v}=(x^{k_1}y^{k_2}[x,y]^{k_3})^v=(x^{p^r})^u(x^{k_1}y^{k_2}[x,y]^{k_3})^v=$ $=xy^{k_2v}[x,y]^{\alpha}\in gr(g_1,g_2)$. Значит, $xy^{k_2v}\in gr(g_1,g_2)$. Далее, $[g_1^{\ v},g_2]=[g_1,g_2]^v\neq e$. С другой стороны, $[g_1^{\ v},g_2]=[xy^{k_2v},x^{l_1}y^{l_2}]=[x,y]^{l_2-k_2l_1v}$. Отсюда вытекает, что $(l_2-k_2l_1v,p)=1$. Так как $g_2g_1^{-l_1v}=$ $=x^{l_1}y^{l_2}(xy^{k_2v})^{-l_1}[x,y]^{\beta}=y^{l_2-k_2l_1v}[x,y]^{\gamma}\in gr(g_1,g_2)$, то $y\in gr(g_1,g_2)$. Таким образом, $H_{prs}=gr(g_1,g_2)$. Случай $(k_2,p)=1$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Теорема 1. *Группа H_{prs} абсолютно замкнута в qH_{prs}.*

Доказательство. Условимся вместо H_{prs} писать H. Пусть G – произвольная группа из квазимногообразия qH, содержащая H в качестве подгруппы. Согласно [8], G вложима в декартову степень группы H. Поскольку $H\leq G$, то существует проектирование $\pi:G\to H$ на одну из компонент декартова произведения, удовлетворяющее условию $[\pi(x),\pi(y)]\neq e$, где x, y – элементы группы G, порождающие ее подгруппу H. По лемме 1 $H=gr(\pi(x),\pi(y))$, и сужение $\pi|_H$ является изоморфизмом. Обозначим $a=\pi(x)$, $b=\pi(y)$. Ясно, что $\pi(g)\in gr(a,b)$ для любого $g\in G$.

Используя гомоморфизм π, построим отображение $\varphi:G\to G$ по следующему правилу: $\varphi(x)=x$, $\varphi(y)=y$, и вообще, $\varphi(g)=r(x,y)$, где r такое, что $\pi(g)=r(a,b)$. Очевидно, что φ – гомоморфизм, совпадающий с тождественным гомоморфизмом $\varepsilon:G\to G$ на подгруппе H и не совпадающий с ε на элементах группы G, не принадлежащих подгруппе H.

Значит, доминион подгруппы H группы G в квазимногообразии qH совпадает с H, т.е. H абсолютно замкнута в qH.

Утверждение следующей леммы легко проверяется.

Лемма 2. *В группе H_p истинны следующие квазитождества и тождества:*

$$\varphi_n=(\forall x)(x^n=1\to x^p=1),\quad n=1,2,\ldots;$$

$$\varphi=(\forall x)(\forall y)([x,y]^p=1);\quad \psi=(\forall x)(\forall y)([x^p,y]=1).$$

Теорема 2. *Любая полная группа из квазимногообразия qH_p абсолютно замкнута в квазимногообразии qH_p.*

Доказательство. Пусть $G\in qH_p$, и Q – полная подгруппа группы G. Так как в G истинно квазитождество ψ, то $Q\subseteq Z(G)$.

Легко видеть, что Q – группа без кручения. Действительно, пусть $g\in Q$ и $g^k=e$, $k\neq 0$. Поскольку $g=f^p$ для некоторого $f\in Q$, то $f^{pk}=e$. Применяя лемму 2, получаем $f^p=g=e$.

Поскольку $QG^{'}/G^{'}$ – полная группа, то, согласно [7], она выделяется в группе $G/G^{'}$ прямым сомножителем: $G/G^{'}=QG^{'}/G^{'}\times T/G^{'}$. Отсюда $G=QT$. Из истинности в группе G квазитождества φ вытекает, что $Q\cap G^{'}=\{e\}$. Следовательно, $Q\cap T\subseteq Q\cap G^{'}=\{e\}$. Кроме того, из $Q\subseteq Z(G)$, $G^{'}\subseteq T$ получаем, что $Q\lhd G$, $T\lhd G$. Таким образом, G раскладывается в прямое произведение групп: $G=Q\times T$. Из этого факта легко вытекает, что доминион подгруппы Q группы G в квазимногообразии qH_p совпадает с Q, т.е. Q абсолютно замкнута в qH_p.

Библиографический список

1. Isbell J.R. Epimorphisms and Dominions // Proceedings of the Conference on Categorical Algebra. – New York, 1965.

2. Saracino D. Amalgamation bases for nil2 groups // Algebra Universalis. – 1983. – Vol. 16.

3. Magidin A. Amalgams of nilpotent groups of class two // arXiv:math. GR/0105233.

4. Magidin A. Amalgamation bases for nil-2 groups of odd exponent // arXiv:math. GR/0006065.

5. Будкин А.И. Доминионы в квазимногообразиях метабелевых групп // Сибирский математический журнал. – 2010. – №3(51).

6. Федоров А.Н. Квазитождества конечных 2-нильпотентных групп. – М., 1987. – Деп. в ВИНИТИ, №5489 В87.

7. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М., 1982.

8. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М., 1970.

9. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. – Барнаул, 2002.

10. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. – Новосибирск, 1999.