УДК 517.929.2

В.В. Пухначев

Нестационарные аналоги решения Бириха*

V.V. Pukhnachev

Non-stationary Analogues of the Birikh Solution

Построены новые точные решения уравнений Обербека-Буссинеска, описывающие движения в горизонтальной полосе и круглой вращающейся трубе. При этом существенно, что продольный градиент температуры зависит от времени.

Ключевые слова: конвективное движение, уравнения Обербека-Буссинеска, решение Бириха.

The author constructed new exact solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations describing unsteady flow of viscous incompressible fluid in a horizontal strip and in a rotating tube. Herewith, it is sufficient that longitudinal temperature gradient depends on time.

Key words: convective motion, Oberbeck-Boussinesq equations, Birikh solution.

1. Введение. Объект нашего изучения – уравнения Обербека-Буссинеска

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_t+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=-\rho^{-1}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{v}-\beta\theta\mathbf{g},\\ &\nabla\cdot\mathbf{v}=0,\ \theta_t+\mathbf{v}\cdot\nabla\theta=\chi\Delta\theta, \end{aligned} \tag{1.1}$$

описывающие конвективные движения вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в поле тяжести с ускорением $\mathbf{g}=(-g, 0, 0)$. Сейчас мы предполагаем, что $g = const$, но в дальнейшем это ограничение будет устранено. В системе (1.1) $\mathbf{v}$ – это вектор скорости; p – отклонение давления от гидростатического; θ – отклонение температуры от ее среднего значения; ρ – средняя плотность жидкости; ν – кинематический коэффициент вязкости; β – коэффициент объемного теплового расширения; χ – коэффициент температуропроводности. Далее величины ρ, ν, β, χ считаются постоянными.

Система является нелинейной, она имеет высокий порядок и не относится к какому-либо из классических типов. Все это повышает роль точных решений указанной системы, в которых понижается их размерность, порядок редуцируемых уравнений, а в ряде случаев происходит их линеаризация. Пример такого решения – решение Р.В. Бириха [1], описывающее стационарное конвективное течение в горизонтальной полосе. Это решение, строящееся в настоящей работе, является обобщением решения Бириха на случай, когда продольный градиент температуры зависит от времени. Аналогичное обобщение допускает решение задачи об осевом конвективном движении во вращающейся трубе [2], а также задач о движении двух несмешивающихся жидкостей с плоской или цилиндрической границей раздела [3–5].

Систематический анализ точных решений основан на применении методов группового анализа дифференциальных уравнений [6]. Применительно к системе (1.1) это было сделано в работе [7], где рассмотрен плоский стационарный случай, и в работе [8], где изучен общий случай и, кроме того, исследована задача групповой классификации уравнений конвекции с коэффициентами переноса, зависящими от температуры. Групповая природа решения Бириха выявлена в статьях [7, 9]. Во второй из них дано обобщение решения Бириха на трехмерный случай. Другие применения теоретико-групповых методов в задачах конвекции описаны в монографиях [10–12].

Решения системы (1.1), найденные в работах [1, 3–5], допускают интерпретацию в виде течений в плоском горизонтальном или наклонном канале. В статье [9] рассмотрено нестационарное движение жидкости в горизонтальной цилиндрической трубе. Все эти решения объединяет следующее обстоятельство: поле температуры в них представимо в виде $\theta = -Az + T$, где $A = const$, а функция T не зависит от продольной координаты z. Впервые решения уравнений Обербека-Буссинеска, обладающие этим свойством, были найдены Г.А. Остроумовым [13] при исследовании задачи об устойчивости равновесия жидкости в вертикальной трубе при наличии продольного градиента температуры. В этой задаче возникающие вторичные течения имеют простую природу: в них горизонтальные компоненты скорости равны нулю, а вертикальная компонента и температура находятся из линейной системы уравнений. Возникает естественный вопрос: нельзя ли отказаться от предположения $A = const$, сохранив

* Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (проекты №64 и №116), РФФИ (проект №10-01-00007) и Федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры инновационной России» (проект №14.740.11.0355).

относительно простую структуру течения? Ниже дается утвердительный ответ на этот вопрос в случае плоского течения в горизонтальной полосе. Подобное обобщение допускает решение с вращательной симметрией, полученное в работе [2]. Однако построить аналог решения Остроумова для случая, когда $\theta_z \neq const$, не удается.

2. Плоское движение в горизонтальной полосе. Рассматривается плоское слоистое движение в горизонтальной полосе ширины *h*. Ниже через *z* и *x* обозначаются горизонтальная и вертикальная координаты, а через *w* и *u* – проекции вектора **v** на оси v и *x* соответственно. Третья компонента скорости *v* равна нулю, а остальные искомые функции *u*, *w*, *p*, θ не зависят от переменной *y*. Сила тяжести с ускорением *g* действует в отрицательном направлении оси *x*. Слоистый характер движения обеспечен равенством $u=0$. Тогда из второго уравнения системы (1.1) следует, что функция *w* не зависит от переменной *z*.

В силу сделанных предположений уравнения Обербека-Буссинеска существенно упрощаются и приводятся к следующему виду:

$$w_z=0,\ w_t=\nu w_{xx}-\rho^{-1}p_z,$$
$$p_x=\rho g\beta\theta,\ \theta_t+w\theta_x=\chi(\theta_{xx}+\theta_{zz}). \tag{2.1}$$

Система (2.1) является переопределенной. Ее стационарный вариант изучен Р.В. Бирихом [1]. Он показал, что в стационарном случае функция *w* является кубическим полиномом, а остальные искомые функции представимы в виде $\theta=-Az+T(x),\ p=-A\rho g\beta xz+q(x)$, где *T* и *q* – полиномы пятой и шестой степени соответственно. Позже выяснилось [7], что решение Бириха имеет теоретико-групповую природу: оно является инвариантным решением системы (1.1) относительно допускаемой ею группы с базисными операторами $\partial_z-A(\partial_\theta+\rho g\beta x\partial_p),\partial_t,\partial_y$, где *A* = *const*. Ниже вопрос о совместности системы уравнений (2.1) решается в общем виде. При этом оказывается, что множество ее решений, дополненное равенствами *u* = *v* = 0, не исчерпывается инвариантными решениями исходных уравнений Обербека-Буссинеска.

Из первых двух уравнений системы (2.1) следует, что *p* линейно зависит от переменной *z*, а из третьего уравнения – что тем же свойством обладает функция θ. Положим

$$w=w(x,t),\ \theta=-A(x,t)z+T(x,t),$$
$$p=-B(x,t)z+q(x,t). \tag{2.2}$$

Подстановка выражений (2.2) в систему (2.1) приводит к уравнениям

$$A_t=\chi A_{xx},\ B_x=\rho g\beta A,\ w_t=\nu w_{xx}+\rho^{-1}B,$$
$$T_t=\chi T_{xx}+Aw,\ q_x=\rho g\beta T. \tag{2.3}$$

В отличие от системы (2.1) число уравнений в системе (2.3) совпадает с числом искомых функций. Эта система является рекуррентной, а ее последовательно решаемые уравнения линейны относительно новых искомых функций. Однако наличие члена *Aw* в четвертом уравнении системы вносит в нее элемент нелинейного взаимодействия полей температуры и скорости.

Система (2.3) рассматривается в области $D=\{x,t:-h<x<0,t>0\}$. Решение первого уравнения (2.3) однозначно определяется заданием начального и краевых условий. Зная функцию *A*, мы находим взятием квадратуры функцию *B* из второго уравнения этой системы. После этого система для определения функций *w*, *T*, *q* становится замкнутой. В частности, для функции *w* будем иметь:

$$w_t-\nu w_{xx}=g\beta\int_{-h}^{x}A(s,t)ds-\rho^{-1}C(t),\ (x,t)\in D. \tag{2.4}$$

Здесь *C* – заданная функция *t*, которая определяет дополнительное слагаемое в линейной зависимости давления от переменной *z*, не связанное с процессом конвекции. Уравнение (2.4) требует постановки начального условия:

$$w=w_0(x),\ -h\le x\le 0,\ t=0, \tag{2.5}$$

и краевых условий, в качестве которых наиболее естественно взять условия прилипания:

$$w=0,\ \ x=-h\ \text{и}\ x=0,\ t>0. \tag{2.6}$$

Решение задачи (2.4)–(2.6) определяется однозначно. Мы не обсуждаем здесь свойства гладкости этого решения – их можно получить на основе хорошо известных результатов теории линейных параболических уравнений [14], задавшись нужной гладкостью функций *A*, w_0 и *Q*. Теперь мы в состоянии найти функцию *T* из решения начально-краевой задачи для четвертого уравнения системы (2.3) и после этого – функцию *q* из последнего уравнения взятием квадратуры.

Заметим, что первое уравнение (2.3) всегда имеет решение *A* = *const*. Если при этом функция *w* не зависит от *t*, мы приходим к классическому решению Бириха [1]. Если же *A*(*x*, *t*) – произвольное решение уравнения теплопроводности, то получается новый класс решений уравнений Обербека-Буссинеска, описывающих нестационарные конвективные движения в полосе, который обладает широким функциональным произволом. Отметим еще, что при выводе уравнения (2.4) предположение о постоянстве *g* не использовалось. Полагая *g* = *g*(), мы приходим к дальнейшему обобщению решения Бириха.

Помимо задачи (2.4)–(2.6), представляет интерес задача, в которой вместо функции *C*(*t*) задается расход жидкости через поперечное сечение полосы

$$\int_{-h}^{0}w(x,t)\,dx=Q(t). \tag{2.7}$$

В задаче (2.4)–(2.7) функция *C* также искомая, наряду с функцией *w*. Поэтому данная задача относится к классу обратных задач. Она является одномерным аналогом задачи, рассмотренной в работе [15]. Используя методы данной работы, можно доказать однозначную разрешимость задачи (2.4)–(2.7) в подходящих классах Гёльдера. Однако в силу одномерности этой задачи здесь удобен другой подход, основанный на сведении ее к операторному уравнению Вольтерра.

Для решения обратной задачи проинтегрируем уравнение (2.4) по переменной *x* на интервале (-*h*, 0). Используя равенство (2.7) и вводя обозначение

$$\rho g \beta h^{-1}\{\int_{-h}^{0}[\int_{-h}^{x} A(s,t)ds]\,dx\} - \rho h^{-1}Q'(t) = f(t),$$

мы получим соотношение

$$C(t) = f(t) + \rho \nu h^{-1}[w_x(0,t) - w_x(-h,t)], \qquad (2.8)$$

которое можно трактовать как линейное операторное уравнение относительно функции *C*. Предположим, что заданные функции $A(x,t), Q(t)$ принадлежат следующим классам Гёльдера: $A \in C^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}([-h,0]\times[0,l])$, $Q \in C^{1+\alpha/2}[0,l]$, $0<\alpha<1$. Пусть выполнены условия гладкости и согласования на входные данные задачи (2.4)–(2.6):

$$w_0 \in C^{2+\alpha}[-h,0],\; w_0(-h) = w_0(0) = 0,\; \nu w_0''(0) = C(0),$$

$$\nu w_0''(-h) = C(0) - g\beta\int_{-h}^{0} A(x,0)\,dx = 0.$$

Из общих результатов теории параболических уравнений [14] вытекает, что задача (2.4)–(2.6) имеет единственное решение: $w \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}([-h,0],[0,l])$. Определим линейный оператор, ставящий в соответствие функции *C*(*t*) функцию $w_x(0,t) - w_x(-h,t)$. Этот оператор действует из пространства $C^{\alpha/2}[0,l]$ в пространство $C^{(1+\alpha)/2}[0,l]$ и является непрерывным оператором типа Вольтерра. Отсюда следует однозначная разрешимость уравнения (2.8) в пространстве $C^{\alpha/2}[0,l]$ при любом $l>0$.

3. Слоистое движение несмешивающихся жидкостей. Рассмотрим систему двух несмешивающихся жидкостей, разделенных линией $x=0$. Параметры жидкости, которая движется в полосе $0<x<h_1, z\in\mathbb{R}$, будем обозначать индексом «1», а параметры жидкости, движущейся в полосе $-h_2<x<0$, – индексом «2». В изучаемом плоском движении компоненты скорости u_1, u_2 равны нулю, а компоненты скорости w_1, w_2 не зависят от *z*. Действуя по аналогии с построениями предыдущего раздела, будем искать решения уравнений Обербека-Буссинеска в виде

$$w_i = w_i(x,t),\; \theta_i = -A_i(x,t)z + T_i(x,t),\quad p_i = -B_i(x,t)z + q_i(x,t),\; i=1,2. \qquad (3.1)$$

Здесь в качестве A_i, T_i могут быть взяты любые решения уравнений теплопроводности:

$$A_{i,t} = \chi_i A_{i,xx},\; T_{i,t} = \chi_i T_{i,xx},\; i=1,2, \qquad (3.2)$$

связанные условиями теплового контакта на границе раздела:

$$A_1 = A_2,\; k_1 A_{1,x} = k_2 A_{2,x},\; x=0,\; t>0. \qquad (3.3)$$

Функции A_i и B_i, T_i и q_i $(i=1,2)$ связаны соотношениями

$$B_i(x,t) = \rho_i g \beta_i \int_0^x A_i(s,t)ds - C_i(t),\quad q_i = \rho_i g\beta_i\int_0^x T_i(s,t)ds, \qquad (3.4)$$

где C_i – пока произвольные функции *t*. Здесь и далее через $\rho_i, \nu_i, \beta_i, \chi_i, k_i$ обозначены соответственно плотности, коэффициенты вязкости, теплового расширения, температуро-проводности и теплопроводности жидкости с индексом «*i*». Как и ранее, эти параметры считаются положительными постоянными. На них априори не накладывается никаких других ограничений. Однако если мы хотим обеспечить устойчивость стратификации, то следует считать $\rho_1<\rho_2$.

Введем обозначения $D_1 = \{x,t: 0<x<h_1,\, t>0\}$, $D_2 = \{x,t: -h_2<x<0,\, t>0\}$. Функции w_1 и w_2 удовлетворяют уравнениям

$$w_{i,t} - \nu_i w_{i,xx} = g\beta_i\int_0^x A_i(s,t)ds - \rho_i^{-1}C_i(t),\quad (x,t)\in D_i,\; i=1,2. \qquad (3.5)$$

Для системы (3.5) задаются начальные условия:

$$w_1 = w_{0,1}(x),\; 0\le x\le h_1,\; t=0;\quad w_2 = w_{0,2}(x),\; -h_2\le x\le 0,\; t=0; \qquad (3.6)$$

условия прилипания на твердых границах области течения:

$$w_1 = 0,\; x=h_1,\; t\ge 0;\; w_2 = 0,\; x=-h_2,\; t\ge 0, \qquad (3.7)$$

и условия на границе раздела, которые в общем виде сформулированы в монографиях [10–12]. Одно из них – условие непрерывности скорости:

$$w_1 = w_2,\; x=0,\; t>0. \qquad (3.8)$$

Другое условие требует, чтобы скачок нормального напряжения при переходе через границу раздела равнялся капиллярному давлению, пропорциональному средней кривизне поверхности раздела. В изучаемом нами случае плоской границы раздела нормальное напряжение непрерывно. Более того, в силу равенств $u_1 = u_2 = 0$ отсюда получается, что $p_1 = p_2$ при $x=0$. Последнее условие вместе с соотношениями (3.1)–(3.4) влечет равенство $C_1 = C_2 \equiv C$. Еще одно динамическое условие имеет вид

$$\rho_1\nu_1 w_{1,x} - \rho_2\nu_2 w_{2,x} = \kappa A,\; x=0,\; t\ge 0, \qquad (3.9)$$

где $A(t)$ – общее значение функций A_1 и A_2 на линии $x=0$; $\kappa = const>0$ – коэффициент в равенстве

$$\sigma = \sigma_0 - \kappa(\theta - \bar{\theta}), \qquad (3.10)$$

выражающем зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры (здесь σ_0 и $\bar{\theta}$ – положительные постоянные). Вследствие (3.1) и (3.11) условие (3.9) означает, что разность касательных напряжений на границе раздела равна касательной производной коэффициента поверхностного натяжения. Наконец, кинематическое условие на линии раздела выполнено тождественно, что является общим свойством слоистых движений.

Пусть функции A_1, A_2 и C известны. Тогда соотношения (3.6)–(3.9) определяют корректно поставленную задачу для системы (3.5). Если эта задача решена, мы можем найти функции T_i из уравнений

$$T_{i,t} = \chi_i T_{i,xx} + A_i w_i,\ i = 1,2$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями. После этого взятием квадратур из соотношений (3.4) восстанавливаются функции q_1 и q_2.

4. Нестационарная осевая конвекция во вращающейся трубе. Пусть жидкость заполняет круглую трубу радиуса a, вращающуюся вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega(t)$. Обозначим через r, φ, z цилиндрические координаты, и пусть ось трубы совпадает с осью z. Далее u и w обозначают радиальную и осевую компоненты вектора скорости, v – разность между окружной скоростью и скоростью вращения жидкости как твердого тела ωr, p – отклонение давления от его равновесного значения $\rho\omega^2 r^2/2$, θ – отклонение температуры от среднего значения $\overline{\theta}$. Ниже мы ограничимся случаем вращательно симметричных движений. Это означает, что все искомые функции не зависят от угла φ. В принятых обозначениях уравнения вращательно симметричного конвективного движения в поле центробежных сил записываются в виде [2]

$$\begin{gathered} u_t + uu_r + wu_z - 2\omega v - \frac{v^2}{r} = \\ = -\frac{1}{\rho}p_r + \nu\Big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - \frac{u}{r^2} + u_{zz}\Big) - \omega^2\beta r\theta, \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$v_t + uv_r + wv_z + 2\omega u + \dot{\omega}r + \frac{uv}{r} = $$

$$= \nu\Big(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{v}{r^2} + v_{zz}\Big),$$

$$w_t + uw_r + ww_z = -\frac{1}{\rho}p_z + \nu\Big(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + w_{zz}\Big),$$

$$u_r + \frac{u}{r} + w_z = 0,$$

$$\theta_t + u\theta_r + w\theta_z = \chi\Big(\theta_{rr} + \frac{1}{r}\theta_r + \theta_{zz}\Big).$$

В работе [2] рассмотрены решения системы (4.1), в которых функция w не зависит от переменной z, а функция θ имеет вид $\theta = -Az + T(r,t)$, где $A = const$. Ниже изучаются решения более общего вида, в которых

$$\begin{gathered} w = w(r,t),\ v = v(r,t),\ \theta = -A(r,t)z + T(r,t), \\ p = -B(r,t)z + q(r,t). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Тогда из предпоследнего уравнения системы (4.1) и предположения об отсутствии стоков и источников на оси трубы вытекает, что $u = 0$. Исследование совместности оставшихся уравнений системы (4.1) с соотношениями (4.2) приводит к следующим результатам. Функция A удовлетворяет радиальному уравнению теплопроводности:

$$A_t = \chi\Big(A_{rr} + \frac{1}{r}A_r\Big). \tag{4.3}$$

Функция v подчиняется уравнению

$$v_t + \dot{\omega}r = \nu\Big(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{v}{r^2}\Big). \tag{4.4}$$

Для функции w получается уравнение

$$w_t - \nu\Big(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r\Big) = g\beta\int_0^r sA(s,t)\,ds - \frac{1}{\rho}C(t), \tag{4.5}$$

где C – произвольная функция t, а для функции T – уравнение

$$T_t = \chi\Big(T_{rr} + \frac{1}{r}T_r\Big) + Aw. \tag{4.6}$$

Отметим, что уравнения (4.3)–(4.5) линейны, и для них можно исследовать задачи, подобные той, что рассмотрена в разделе 1. Уравнения (4.3) и (4.4) не связаны между собой. Если функция A найдена, функции w, T находятся из решаемых последовательно уравнений (4.5), (4.6). При известных А, T и v функции B и q даются равенствами

$$\begin{gathered} B(r,t) = \rho g\beta\int_0^r sA(s,t)\,ds - C(t),\ q(r,t) = \\ = \rho\Big\{\int_0^r \Big[2\omega(t)v(s,t) + \frac{v^2(s,t)}{s} + g\beta sT(s,t)\Big]ds\Big\}. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Таким образом, мы получили существенно нестационарный аналог решения, изученного в статье [2]. Добавим еще, что наряду с прямой для уравнения (4.5) можно рассматривать обратную задачу, аналогичную сформулированной в разделе 1.

5. Движение несмешивающихся жидкостей во вращающейся трубе. Задача, рассмотренная в предыдущем разделе, допускает обобщение на случай движения двух несмешивающихся жидкостей с цилиндрической границей раздела. Решение уравнений конвекции в этом случае ищется в виде, аналогичном (4.2):

$$\begin{gathered} w_i = w_i(r,t),\ v_i = v_i(r,t),\ \theta_i = -A_i(r,t)z + T_i(r,t), \\ p_i = -B_i(r,t)z + q_i(r,t),\ i = 1,2. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Здесь через A_i $(i = 1,2)$ обозначены решения радиальных уравнений теплопроводности с коэффициентами χ_i, связанные условиями теплового баланса

$$A_1 = A_2,\ k_1 A_{1,r} = k_2 A_{2,r},\ r = b,\ t \ge 0.$$

Совпадающие значения функций A_1 и A_2 на границе раздела обозначим через A. Не выписывая всех уравнений нашей задачи, сформулируем соотношения, определяющие скорости осевого движения контактирующих жидкостей.

Пусть уравнение поверхности раздела имеет вид $r = b = const < a$, где a – радиус трубы. Индексом «1» будем снабжать характеристики жидкости, находящейся в цилиндре, $r < b$, а индексом «2» – характеристики жидкости, заполняющей цилиндрический слой: $b < r < a$. Далее предположим, что

$\rho_1 < \rho_2$. Это позволит нам избежать неустойчивости Рэлея-Тейлора. Обозначим $D_1 = \{r, t: 0 < x < b, t > 0\}$, $D_2 = \{r, t: b < r < a, t > 0\}$. Функции w_1 и w_2 удовлетворяют уравнениям

$$w_{i,t} - \nu_i (w_{i,rr} + \frac{1}{r} w_{i,r}) = g\beta_i \int_b^r s A_i(s,t) ds - \frac{1}{\rho_i} C_i(t), \quad (r,t) \in D_i,\ i = 1, 2, \tag{5.2}$$

начальным условиям

$$\begin{gathered} w_1 = w_{0,1}(r), 0 \le r \le b, t = 0; \\ w_2 = w_{0,2}(r), b \le r \le a, t = 0, \end{gathered} \tag{5.3}$$

условию прилипания на поверхности трубы

$$w_2 = 0,\ r = a,\ t \ge 0, \tag{5.4}$$

условию ограниченности w_1 при $r \to 0$, условию непрерывности скорости при переходе через границу раздела

$$w_1 = w_2,\ r = b,\ t \ge 0 \tag{5.5}$$

и условию баланса касательных напряжений с учетом термокапиллярного эффекта на границе раздела

$$\rho_1 \nu_1 w_{1,r} - \rho_2 \nu_2 w_{2,r} = \kappa A,\ r = b,\ t \ge 0. \tag{5.6}$$

Здесь κ – коэффициент в зависимости (3.10) поверхностного натяжения от температуры. Функции C_i, входящие в правые части уравнения (5.1), возникают в процессе получения решения системы (4.1) в форме (5.1). Они связаны с функциями A_i и B_i равенствами

$$B_i(r,t) = \rho_i g \beta_i \int_0^r s A_i(s,t) ds - C_i(t),\ i = 1, 2. \tag{5.7}$$

Эти функции задают дополнительные слагаемые в линейной зависимости давления от осевой координаты, не имеющие конвективной природы. В отличие от плоской задачи, рассмотренной в разделе 2, здесь функции C_1 и C_2 не совпадают. Причина состоит в наличии дополнительного слагаемого (капиллярного давления) в условии равенства нормальных напряжений на поверхности раздела. Вследствие равенств $u_1 = u_2 = 0$ это условие записывается в виде

$$p_1 = p_2 + b^{-1}\sigma,\ r = b,\ t \ge 0.$$

Подставим в последнее равенство выражения (5.1) для функций p_1, p_2 и выражение (3.10) для функции σ, используем равенства (5.7), а затем выделим в полученном равенстве члены, линейные относительно z. В результате будем иметь:

$$C_1 = C_2 + \kappa b^{-1} A,\ t \ge 0.$$

При этом одну из функций C_1 или C_2 можно задать произвольно.

Итак, мы получили замкнутую формулировку (5.2)–(5.6) задачи об определении осевых скоростей во вращающейся двухслойной системе при совместном действии центробежной силы и осевых градиентов температуры и давления. Как и в задаче, рассмотренной в статье [2], зависимость температуры в каждом из слоев от осевой координаты z линейна. Однако, в отличие от [2], коэффициент в этой зависимости не постоянен, а является функцией переменных r и t. Указанная зависимость обладает функциональным произволом. В частности, мы можем задать температуру на поверхности трубы в виде

$$\theta_2 = -\gamma(t) z + \delta(t),\ r = b,\ t \ge 0,$$

где γ и δ – произвольные функции времени.

6. Трехмерные аналоги решения Бириха. Далее S обозначает ограниченную область на плоскости x, y, а Ω – цилиндр: $\Omega = \{x, y, z: (x, y) \in S,\ z \in \mathbb{R}\}$. В работе [9] был найден класс решений системы уравнений Обербека-Буссинеска (1.1), описывающий нестационарные движения в цилиндре. Эти решения являются трехмерным аналогом решения Бириха и имеют вид

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = (u(x,y,t), v(x,y,t), w(x,y,t)), \\ p = -\rho g \beta A x z + q(x,y,t), \\ \theta = -Az + T(x,y,t), \end{gathered} \tag{6.1}$$

где $A = const$.

Решения (6.1) системы (1.1) являются инвариантными решениями ранга три относительно оператора $\partial_z - A(\partial_\theta + \rho g \beta x \partial_p)$, допускаемого этой системой. Они были получены в работе [9]. В этой работе исследовались вопросы разрешимости начально-краевых задач для редуцированной двумерной системы, которой подчиняются функции $\mathbf{v}$, q и T. Подобно начально-краевой задаче для уравнений Навье-Стокса в плоском случае [16], здесь справедлива теорема существования и единственности решения в целом по времени. Тем самым трехмерное конвективное движение в цилиндре Ω описывается в терминах решений двумерной задачи. Для стационарной задачи имеют место лишь локальные результаты. При малых значениях числа Грасгофа $Gr = g\beta A d^4 \nu^{-2}$, где d – диаметр области S, строится сходящийся итерационный процесс. Он состоит в решении стандартных краевых задач для рекуррентной системы эллиптических уравнений в плоской области S. Если S – круг, в сечении цилиндра Ω возникает характерная четырехвихревая структура, на которую накладывается спиралевидное движение в направлении оси z. Более детальный анализ стационарных решений вида (6.1) и их устойчивости в случае, когда область S является прямоугольником, проведен в работе [17].

Возникает естественный вопрос: нельзя ли получить обобщения решений (6.1) на случай, когда коэффициент A не является постоянной величиной? Оказывается, что этого можно достичь лишь ценой значительного упрощения кинематики течения.

Будем искать решения системы (1.1), дополненные соотношениями

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_z = 0, \theta = -A(x,y,t)z + T(x,y,t), \\ p = -B(x,y,t)z + q(x,y,t). \end{gathered} \tag{6.2}$$

Среди этих решений содержатся решения вида (6.1), но не только они. Подстановка выражений (6.2) в систему (1.1) приводит к соотношениям

$$u_t+uu_x+vu_y=-\rho^{-1}q_x+\nu(u_{xx}+u_{yy})+ \\ +g\beta T+z(\rho^{-1}B_x-g\beta A), \tag{6.3}$$

$$v_t+uv_x+vv_y=-\rho^{-1}q_y+\nu(v_{xx}+v_{yy})-z\rho^{-1}B_y,$$

$$w_t+uw_x+vw_y=-\rho^{-1}B+\nu(w_{xx}+w_{yy}),$$

$$u_x+v_y=0,$$

$$T_t+uT_x+vT_y-wA-z(A_t+uA_x+vA_y)= \\ =\chi(T_{xx}+T_{yy})-z\chi(A_{xx}+A_{yy}).$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при первой и нулевой степенях z в уравнениях (6.3), получаем:

$$B_x=\rho g\beta A,\ B_y=0,$$

$$A_t+uA_x+vA_y=\chi(A_{xx}+A_{yy}), \tag{6.4}$$

$$u_t+uu_x+vu_y=-\rho^{-1}q_x+\nu(u_{xx}+u_{yy})+g\beta T,$$

$$v_t+uv_x+vv_y=-\rho^{-1}q_y+\nu(v_{xx}+v_{yy}), \tag{6.5}$$

$$w_t+uw_x+vw_y=-\rho^{-1}B+\nu(w_{xx}+w_{yy}),\ u_x+v_y=0,$$

$$T_t+uT_x+uT_y-wA=\chi(T_{xx}+T_{yy}).$$

Из первых двух уравнений (6.4) следует, что функция A не зависит от y. Это позволяет переписать третье уравнение (6.4) в виде

$$A_t+uA_x=\chi A_{xx}. \tag{6.6}$$

Имеются две возможности. Либо $u_y\neq 0$, и тогда $A=const$, что приводит к решениям (6.1). Если же $u_y=0$, то вследствие предпоследнего уравнения (6.5) функция v линейно зависит от y. Далее мы ограничимся случаем, когда эта зависимость однородна, так что

$$u=u(x,t),\ v=-yu_x. \tag{6.7}$$

Подставляя выражения (6.7) в уравнения (6.5), получаем:

$$u_t+uu_x=-\rho^{-1}q_x+\nu u_{xx}+g\beta T,$$

$$y(u_{xt}+uu_{xx}-u_x^2)=\rho^{-1}q_y+\nu y u_{xxx}, \tag{6.8}$$

$$w_t+uw_x-yu_xw_y=-\rho^{-1}B+\nu(w_{xx}+w_{yy}),$$

$$T_t+uT_x-yu_xT_y-wA=\chi(T_{xx}+T_{yy}).$$

Из второго уравнения (6.8) вытекает, что функция q квадратично зависит от переменной y, а из первого уравнения указанной системы – что этим же свойством обладает функция T. Обращаясь к последнему уравнению (6.8), мы видим, что и функция w квадратично зависит от y. Ниже для простоты предположим, что зависимости функций q, T, w от переменной y являются четными:

$$q=\xi y^2+\varphi,\ T=\eta y^2+\vartheta,\ w=\varsigma y^2+\psi, \tag{6.9}$$

где $\xi,\phi,\eta,\vartheta,\varsigma,\psi$ – искомые функции переменных x, t. Уравнения для их определения получаются в результате подстановки выражений (6.9) в систему (6.8). После несложных преобразований мы приходим к следующей системе уравнений:

$$u_{xxt}+uu_{xxx}-u_xu_{xx}=\nu u_{xxxx}+2g\beta\eta, \\ \eta_t+u\eta_x-2u_x\eta-\varsigma A=\chi\eta_{xx}, \\ \varsigma_t+u\varsigma_x-2u_x\varsigma=\chi\varsigma_{xx}, \tag{6.10}$$

$$\vartheta_t+u\vartheta_x-\psi A=\chi(\vartheta_{xx}+2\eta), \\ \psi_t+u\psi_x=-\rho^{-1}B+\nu(\psi_{xx}+2\varsigma); \tag{6.11}$$

$$\xi_x=\rho g\beta\eta,\ \varphi_x=\rho(g\beta\vartheta-u_t-uu_x). \tag{6.12}$$

Соотношения (6.6), (6.10) образуют замкнутую систему квазилинейных уравнений для определения функций A,u,η,ς переменных x, t. Из них три уравнения являются параболическими, а оставшееся (первое уравнение системы (6.10)) имеет составной тип. Если функции A,u,η,ς найдены, то функции ϑ,ψ определяются из системы линейных параболических уравнений (6.11). Затем оставшиеся функции ξ,φ,B восстанавливаются квадратурами из соотношений (6.12) и первого уравнения системы (6.4) с точностью до произвольных аддитивных функций времени. Две из них не влияют на поле скоростей, а третья (входящая в определение B) участвует в формировании осевой скорости w.

Далее предположим, что поперечное сечение трубы S является прямоугольником, $S=\{x,y:|x|<h,\ |y|<d\}$. Сформулируем начально-краевую задачу для системы (6.6), (6.10).

На верхней и нижней сторонах прямоугольника S, т.е. при $x=\pm h$, естественно задать условия прилипания, которые вследствие (6.7), (6.9) записываются в виде

$$u=0,\ u_x=0,\ \varsigma=0,\ x=|h|,\ t\geq 0. \tag{6.13}$$

В качестве температурных условий зададим значения функций A,η на горизонтальных сторонах S, предполагая для простоты их совпадающими на обеих сторонах:

$$A=\gamma(t),\ \eta=\delta(t),\ |x|=h,\ t>0. \tag{6.14}$$

Формулировка задачи замыкается заданием начальных условий:

$$A=A_0(x),\ u=u_0(x),\ \eta=\eta_0(x), \\ \varsigma=\varsigma_0(x),\ |x|\leq h,\ t=0. \tag{6.15}$$

Задача (6.6), (6.10), (6.13)–(6.15) достаточно сложна. Сравнительно просто для нее устанавливается теорема единственности классического решения. Что касается теоремы существования решения «в целом», то ее получению препятствует отсутствие априорных оценок. Доказательство существования решения этой задачи на малом интервале времени может быть получено на основе методов, развитых в монографии [14].

Достоинством полученного решения является возможность задания продольного градиента температуры на горизонтальных границах канала в виде произвольной функции времени, а неустранимым дефектом – то, что на его вертикальных границах не удается удовлетворить естественным краевым условиям прилипания. Физическая реализация данного решения требует специального распределения скорости и температуры на линиях $y=\pm d$, которое согласовано с формулами (6.7), (6.9).

7. О решениях Остроумова. Г.А. Остроумов [13] нашел класс решений уравнений конвекции, которые описывают течения в цилиндрических трубах, индуцированные продольным градиентом температуры. Пусть S – ограниченная область плоскости x, y и Ω – цилиндр поперечного сечения S с образующими, параллельными оси z. В этом разделе нам удобно считать, что сила тяжести с ускорением g действует в отрицательном направлении оси z.

В сделанных предположениях координатная запись уравнений (1.1) такова:

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -\rho^{-1}p_x + \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -\rho^{-1}p_y + \nu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}),$$

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -\rho^{-1}p_z + \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \rho g\theta,$$

$$u_x + v_y + w_z = 0,$$

$$\theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z = \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}). \quad (7.1)$$

Уравнения (7.1) допускают оператор $\partial_z - A(\partial_\theta + \rho g\beta z\partial_p)$, где $A = const$. Это позволяет строить ее инвариантные решения вида

$$\mathbf{v} = (u(x,y,t), v(x,y,t), w(x,y,t)),$$

$$p = -\rho g\beta Az^2/2 + q(x,y,t), \quad (7.2)$$

$$\theta = -Az + T(x,y,t).$$

Подстановка выражений (7.2) в уравнения (7.1) приводит к системе

$$u_t + uu_x + vu_y = -\rho^{-1}q_x + \nu(u_{xx} + u_{yy}),$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -\rho^{-1}q_y + \nu(v_{xx} + v_{yy}),$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (7.3)$$

$$w_t + uu_x + vu_y = \nu(w_{xx} + w_{yy}) + \rho gT,$$

$$T_t + uT_x + vT_y - Aw = \chi(T_{xx} + T_{yy}). \quad (7.4)$$

Мы видим, что функции u, v, q удовлетворяют уравнениям плоского движения вязкой несжимаемой жидкости, теория которых хорошо разработана. При известных функциях u, v оставшиеся искомые функции w, T определяются из системы линейных уравнений (7.4).

Система (7.3) имеет тривиальное решение: $u = v = 0,\ q = q(t)$. Уравнения (7.4) при этом упрощаются и в стационарном случае приводят к спектральным задачам, в которых градиент температуры A играет роль спектрального параметра. Наиболее простая из них соответствует краевым условиям первого рода:

$$w = 0,\ T = 0,\ (x,y) \in \partial S.$$

Другие задачи соответствуют условию второго рода для функции T, а также условиям теплового контакта конвектирующей жидкости с окружающим твердым массивом. Эти задачи исследованы в монографиях [13, 18]. Во второй из них изучена устойчивость стационарных решений Остроумова.

Если в качестве коэффициентов u, v линейной системы (7.4) взять любое зависящее от времени решение системы (7.3), мы получим семейство решений уравнений (1.1), которые можно назвать нестационарными аналогами решения Остроумова. Однако такое обобщение данных решений связано с предположением, что величина $\theta_z = A$ является постоянной. Попытка заменить эту величину функцией переменных x, y, t к успеху не приводит. Доказательство данного утверждения предоставляется читателю.

8. Заключительные замечания

1. Решения плоских и осесимметричных задач конвекции, приведенные в разделах 2–5, являются существенным обобщением известных решений [1, 2] на случай, когда осевой градиент температуры – произвольная функция времени. В отличие от решения Бириха, теоретико-групповая природа этих решений пока не выяснена, что не следует считать их недостатком.

2. Обратная задача, аналогичная изученной в разделе 2, может быть рассмотрена для двухслойного течения, описанного в разделе 3. В этом случае можно задать расход лишь одной из жидкостей как функцию времени, так как продольные градиенты давления в обоих слоях одинаковы.

3. Экспериментальная реализация термогравитационных и термокапиллярных конвективных течений в горизонтальных слоях под действием продольного градиента температуры (в том числе и нестационарных) осуществлена в работах [19, 20].

4. Задача (6.6), (6.10), (6.13)–(6.15) допускает значительное упрощение, если в условии (6.15) $\varsigma_0 = 0$. В этом случае функция ς равна нулю тождественно. Для функций u, η получается система двух уравнений (6.10). Если ее решение известно, функция A находится из линейного уравнения (6.6).

5. Пример нестационарного аналога решения Остроумова дает задача о конвекции в зазоре между двумя несоосными цилиндрами. Внутренний цилиндр вращается вокруг своей оси с заданной угловой скоростью, которая может зависеть от времени.

Библиографический список

1. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. – 1966. – №3.

2. Бирих Р.В., Пухначёв В.В. Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // ДАН. – Т. 436, №3.

3. Репин И.В. Стационарные течения двухслойной жидкости: магистерская дис. – Красноярск, 2003.

4. Андреев В.К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: препринт. – Красноярск, 2010. – №1–10.

5. Гончарова О.Н., Кабов О.А. Гравитационно-термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое при спутном потоке газа // ДАН. – Т. 426, №2.

6. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М., 1978.

7. Катков В.Л. Точные решения некоторых задач конвекции // ПМТФ. – 1968. – №3.

8. Гончарова О.Н. Групповая классификация уравнений свободной конвекции // Динамика сплошной среды.– Новосибирск, 1987. – Вып. 79.

9. Пухначёв В.В. Теоретико-групповая природа решения Бириха и его обобщения // Симметрия и дифференциальные уравнения: труды II Междунар. конф. – Красноярск, 2000.

10. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. – Dordrecht; Boston; London, 1998.

11. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначёв В.В. Современные математические модели конвекции. – М., 2008.

12. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. – Красноярск, 2010.

13. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М., 1952.

14. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

15. Пилецкас К., Кебликас В. О существовании нестационарного решения Пуазейля // СМЖ. – 2005. – Т. 46, №3.

16. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М., 1970.

17. Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Morozov V.A., Scurdin R.V., Ben Hadid H., Henry D. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient Part 1. Effect of aspect ratio and Prandtl number // J. Fluid Mech. – 2009. – Vol. 635.

18. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М., 1972.

19. Kirdyashkin A.G. Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1984. – Vol. 27, №8.

20. Кирдяшкин А.Г. Термокапиллярные периодические движения. – Новосибирск, 1985.