УДК 517.956.227

Д.И. Попов, Р.М. Утемесов

Спектральные коэффициенты операторов дифференцирования высокого порядка для ограниченных и неограниченных интервалов*

D.I. Popov, R.M. Utemesov

Spectral Coefficient of High Order Differentiation Operators for Bounded and Unbounded Intervals

Обсуждается спектральный метод для аппроксимации операторов дифференцирования второго и четвертого порядка в случае бесконечного и конечного интервалов. Методом Галеркина получены спектральные коэффициенты в базисах, использующих полиномы Чебышева. Результаты имеют прикладное значение для разработки эффективных численных методов решения дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: спектральная аппроксимация, метод Галеркина, полиномы Чебышева, пространства Соболева, дифференциальные операторы.

The spectral method of approximation of the second and the fourth order differential operators in finite and infinite intervals is concerned in the work. Spectral coefficients are produced by Galerkin method using Chebyshev polynomials base sets. The results are applied for the development of effective numerical solvers of differential equations.

Key words: spectral approximation, Galerkin method, Chebyshev polynomials, weighted Sobolev spaces, differential operators.

Введение. Обсуждается спектральный метод для решения одномерных граничных задач для уравнений второго и четвертого порядков в случае ограниченной и неограниченной областей. Обзор новых, систематических результатов по существованию и условиям сходимости разложений по ортогональным базисам для неограниченных областей можно найти, например, в работе [1]. Основная стратегия в этом случае заключается в отыскании глобально ортогонального базиса на $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ (см.: [2–4]) или отображении интервала $I=(-1,1)$ на $\mathbf{R}$ или $\mathbf{R}_+=(0,+\infty)$ (см.: [4–8]). В статье рассматривается алгебраическое преобразование координат $g:\mathbf{R}\to I$. Получены коэффициенты матриц операторов дифференцирования для однородных краевых условий в базисах, построенных с помощью полиномов Чебышева. Результаты использовались в реальных расчетах.

Преобразование координат. Рассмотрим алгебраическое отображение прямой $\mathbf{R}$ в интервал I следующего вида:

$$y=g(x)=\frac{Lx}{\sqrt{L^2+x^2}},\quad x=g^{-1}(y)\equiv f(y)=\frac{Ly}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad (1)$$

Далее масштабный множитель L положим равным единице.

Конечность нормы элемента $u\in L^2(\mathbf{R})$ определяет следующее условие:

$$\|u\|^2_{L^2(-\infty,+\infty)}=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^2dx=\int_{-1}^{1}|\tilde{u}|^2 f'(y)dy= =\int_{-1}^{1}|\tilde{u}|^2(1-y^2)^{-3/2}dy<+\infty. \qquad (2)$$

Для существования интеграла (2) достаточно, чтобы $|\tilde{u}|^2\sim(1-y^2)\psi(y)$, где $\psi(y)$ – ограниченная функция, суммируемая с весом $\omega(y)$, здесь $\omega(y)=(1-y^2)^{-1/2}$. Отсюда следует, что $|u|^2\sim 1/(1+x^2)\psi(x)$, а $\psi(x)\to const$ при $x\to\pm\infty$. Конечность нормы $\|\tilde{u}\|^2_{L^2_\omega(I)}$. Требуется выполнение условия

$$\|u\|^2_{L^2_\omega(I)}=\int_{-1}^{1}|u|^2(1-y^2)^{-1/2}dy= =\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{u}|^2(1+x^2)^{1/2}Dg(x)dx= =\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{u}|^2(1+x^2)^{-1}dx<+\infty. \qquad (3)$$

Для существования интеграла (3) будет достаточным, чтобы выполнялось $|\tilde{u}|^2/(1+x^2)\to 0$

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области механики» (2009–2013) (проект №2010-1.1-112-129-003).

при $x \to \pm\infty$, т.е. $|u| \sim xO(1+1/x)$. Таким образом, с помощью гомеоморфизма $g(x)$ установлено взаимно-однозначное соответствие пространств $L^2_{\tilde{\omega}}(\mathbf{R})$, где $\tilde{\omega}(x)=(1+x^2)^{-1}$ – весовая функция, и пространства $L^2_{\omega}(I)$. Соответствующие системы, ортогональные с весом $\omega(y)$ из $L^2_{\omega}(I)$, будут ортогональными в $L^2_{\tilde{\omega}}(\mathbf{R})$ с весом $\tilde{\omega}(x)$. В качестве полной ортогональной системы в пространстве $L^2_{\omega}(I)$, очевидно, следует выбрать полиномы Чебышева $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$. В случае однородных краевых условий для аппроксимации пространства $L^2_{\omega}(I)$ следует использовать линейные оболочки функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N}$, где $\varphi_k = T_k - T_{k+2}$ [9].

Результаты спектральной аппроксимации операторов. Рассмотрим однородные предельные условия $u(\pm 1)=0$ в ограниченном интервале I и соответствующее максимальное самосопряженное расширение оператора D^2 в пространстве $L^2(I)$. Для интерполяции пространства $L^2_{\omega}(I)$ будут применяться линейные оболочки элементов $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N}$.

При алгебраическом отображении прямой $\mathbf{R}$ на интервал I вида (1) действие оператора D^2 запишется следующим образом:

$$D^2\tilde{\varphi}_k = \rho\left[\rho\varphi_k'\right]' = \rho\rho'\varphi_k' + \rho^2\varphi_k'' = \\ = 3y(1-y^2)^2\varphi_k' + (1-y^2)^3\varphi_k'' = D_1^{(2)}\varphi_k' + D_2^{(2)}\varphi_k''. \quad (4)$$

Используя соотношение

$$(1-y^2)\varphi_n' = (1/2)n\varphi_{n-1} - (1/2)(n+2)\varphi_{n+1}, \quad (5)$$

которое будет доказано позже, можно представить спектральные коэффициенты $D_{hk}^{(2)} = (D^2\varphi_k, \varphi_h)_{\omega}$ через известные величины $A_{hk} = (\varphi_k'', \varphi_h)_{\omega}$, $C_{hk} = (\varphi_k', \varphi_h)_{\omega}$, $B_{hk} = (\varphi_k, \varphi_h)_{\omega}$ [9]. Действительно, первое слагаемое в уравнении (4) можно записать в виде

$$D_1^{(2)}\varphi_k' = (3/2)y(1-y^2)[k\varphi_{k-1} - (k+2)\varphi_{k+1}],$$

$$D_1^{(2)}\varphi_k' = (3/4)(1-y^2)[k\varphi_{k-2} - 2\varphi_k - (k+2)\varphi_{k+2})].$$

Полученную формулу целесообразно переписать в виде

$$D_1^{(2)}\varphi_k'' = (3/4)(1-y^2)[\alpha_k^{(1)}\varphi_{k-2} + \gamma_k^{(1)}\varphi_k + \beta_k^{(1)}\varphi_{k+2}],$$

где $\alpha_k^{(1)} = k$, $\gamma_k^{(1)} = -2$, $\beta_k^{(1)} = -(k+2)$.

Далее второе слагаемое аналогичным образом можно представить следующим образом:

$$D_2^{(2)}\varphi_k'' = (1/2)(1-y^2)^2[k\varphi_{k-1}' - (k+2)\varphi_{k+1}'],$$

$$D_2^{(2)}\varphi_k'' = (1/4)(1-y^2)[k[(k-1)\varphi_{k-2} - (k+1)\varphi_k] - \\ -(k+2)[(k+1)\varphi_k - (k+3)\varphi_{k+2}]],$$

$$D_2^{(2)}\varphi_k'' = (1/4)(1-y^2)[k(k-1)\varphi_{k-2} - \\ -2(k+1)^2\varphi_k + (k+2)(k+3)\varphi_{k+2}].$$

$$D_2^{(2)}\varphi_k'' = (1/4)(1-y^2)[\alpha_k^{(2)}\varphi_{k-2} + \gamma_k^{(2)}\varphi_k + \beta_k^{(2)}\varphi_{k+2}],$$

где $\alpha_k^{(2)} = k(k-1)$, $\gamma_k^{(2)} = -2(k+1)^2$, $\beta_k^{(2)} = (k+2)(k+3)$.

Таким образом, элемент $D^2\varphi_k$ окончательно запишется в виде

$$D^2\varphi_k = (1/4)(1-y^2)[(3\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)})\varphi_{k-2} + \\ +(3\gamma_k^{(1)} + \gamma_k^{(2)})\varphi_k + (3\beta_k^{(1)} + \beta_k^{(2)})\varphi_{k+2}],$$

$$D^2\varphi_k = (1/4)(1-y^2)[\alpha_k\varphi_{k-2} + \gamma_k\varphi_k + \beta_k\varphi_{k+2}].$$

Нетрудно установить следующую формулу:

$$D^2\varphi_k = (1/8)\sum_{\substack{i=k-4,\\ i+k-\text{четн}}}^{k+2} c_i\varphi_i, \quad (6)$$

$$c_{k-4} = -\frac{\alpha_k}{2},\ c_{k-2} = \alpha_k - \frac{\gamma_k}{2},\ c_k = \gamma_k - \frac{\alpha_k}{2} - \frac{\beta_k}{2},$$

$$c_{k+2} = \beta_k - \frac{\gamma_k}{2},\ c_{k+4} = -\frac{\beta_k}{2}.$$

Тогда коэффициенты спектральной матрицы $D_{hk}^{(2)} = (D^2\varphi_k, \varphi_h)_{\omega}$ будут представлены следующей формулой:

$$D_{hk}^{(2)} = (D^2\varphi_k, \varphi_h)_{\omega} = (1/8)\sum_{\substack{i=k-4,\\ i+k-\text{четн}}}^{k+2} c_i(\varphi_i, \varphi_h)_{\omega} = \\ = (1/8)\sum_{\substack{i=k-4,\\ i+k-\text{четн}}}^{k+2} c_i B_{hi}. \quad (7)$$

Рассуждая аналогичным образом, коэффициенты спектральной матрицы $D_{hk}^{(4)} = (D^4\varphi_k, \varphi_h)_{\omega}$ запишутся в виде

$$D_{hk}^{(4)} = (D^4\varphi_k, \varphi_h)_{\omega} = (1/8)^2\sum_{\substack{i=k-4,\\ i+k-\text{четн}}}^{k+2} c_i \sum_{\substack{s=i-4,\\ i+s-\text{четн}}}^{i+2} c_s B_{hs}. \quad (8)$$

В общем случае формулы типа (6–8) удается получить, налагая дополнительное требование на поведение соответствующих производных в окрестности границы. Отметим, что область применимости соотношений (6–8) ограничена функциями, убывающими на бесконечности хотя бы алгебраически.

Рассмотрим однородные предельные условия $u(\pm 1) = u'(\pm 1) = 0$ в ограниченном интервале I и соответствующее максимальное самосопряженное расширение оператора D^4 в пространстве $L^2(I)$. Для интерполяции пространства $L^2_{\omega}(I)$ будут применяться линейные оболочки элементов следующего вида:

$$\{\psi_k\}_{k=0}^{N} = \{(1-y^2)\varphi_k\}_{k=0}^{N}. \quad (9)$$

Утверждение. Производная элемента ψ_k записывается следующим образом:

$$\psi_k' = \alpha_k \varphi_{k-1} + \beta_k \varphi_{k+1},$$

где $\alpha_k = \dfrac{k-2}{2}$, $\beta_k = -\dfrac{k+4}{2}$. (10)

Доказательство. Действительно,

$$\psi_k' = -2y\varphi_k + (1-y^2)\varphi_k'.$$

Воспользуемся характеристическим уравнением для многочленов Чебышева первого рода и известным свойством полиномов

$$2T_n = \frac{T_{n+1}'}{(n+1)} - \frac{T_{n-1}'}{(n-1)}.$$

Тогда можно записать

$$(1-y^2)\left(\frac{T_{n+1}''}{(n+1)} - \frac{T_{n-1}''}{(n-1)}\right) - 2yT_n + (n+1)T_{n+1} - (n-1)T_{n-1} = 0.$$

Откуда получим формулу

$$(1-y^2)\left(\frac{T_{n+1}''}{(n+1)} - \frac{T_{n-1}''}{(n-1)}\right) = n\varphi_{n-1}, \text{ или } 2(1-y^2)T_n' = n\varphi_{n-1}.$$

Таким образом,

$$(1-y^2)\varphi_n' = (1/2)n\varphi_{n-1} - (1/2)(n+2)\varphi_{n+1}. \quad (11)$$

Тем самым доказано последнее соотношение в (5), откуда несложно установить окончательный результат (10), ч.т.д.

Используя формулу (10), можно записать выражение для спектральных коэффициентов оператора D^4.

Тогда, учитывая краевые условия и соотношения (10), проекция $D^4\psi_k$ на ψ_h в $L^2_\omega(I)$ запишется следующим образом:

$$D_{hk}^{(4)} \equiv (D^4\psi_k, \psi_h)_\omega = \int_{-1}^{1} D^4\psi_k \psi_h \omega dy = -\int_{-1}^{1} \psi_k'''(\psi_h\omega)' dy,$$

$$D_{hk}^{(4)} = -\int_{-1}^{1} \psi_k'''\psi_h'\omega dy - \int_{-1}^{1} \psi_k'''\psi_h\omega' dy,$$

$$D_{hk}^{(4)} = -\int_{-1}^{1} \psi_k'''\psi_h'\omega dy + (1/2)\int_{-1}^{1} \psi_k'''(\varphi_{h-1} + \varphi_{h+1})\omega dy,$$

$$D_{hk}^{(4)} = \int_{-1}^{1} \psi_k''[\psi_h'\omega]' dy - (1/2)\int_{-1}^{1} \psi_k''[(\varphi_{h-1} + \varphi_{h+1})\omega]' dy.$$

Используя предпоследнее выражение и формулу (10) для производной ψ_n', нетрудно получить выражение для спектральных коэффициентов:

$$D_{hk}^{(4)} = -\int_{-1}^{1} [\alpha_k\varphi_{k-1} + \beta_k\varphi_{k+1}]''[\alpha_h\varphi_{h-1} + \beta_h\varphi_{h+1}]\omega dy +$$
$$+ (1/2)\int_{-1}^{1} [\alpha_k\varphi_{k-1} + \beta_k\varphi_{k+1}]''(\varphi_{h-1} + \varphi_{h+1})\omega dy,$$

$$D_{hk}^{(4)} = -[\alpha_k\alpha_h(\varphi_{k-1}'', \varphi_{h-1})_\omega + \alpha_k\beta_h(\varphi_{k-1}'', \varphi_{h+1})_\omega] -$$
$$-[\alpha_h\beta_k(\varphi_{k+1}'', \varphi_{h-1})_\omega + \beta_k\beta_h(\varphi_{k+1}'', \varphi_{h+1})_\omega] +$$
$$+ (1/2)\alpha_k[(\varphi_{k-1}'', \varphi_{h-1})_\omega + (\varphi_{k-1}'', \varphi_{h+1})_\omega] +$$
$$+ (1/2)\beta_k[(\varphi_{k+1}'', \varphi_{h-1})_\omega + (\varphi_{k+1}'', \varphi_{h+1})_\omega],$$

$$D_{hk}^{(4)} = -[\alpha_k\alpha_h A_{h-1,k-1} + \alpha_k\beta_h A_{h+1,k-1}] -$$
$$-[\alpha_h\beta_k A_{h-1,k+1} + \beta_k\beta_h A_{h+1,k+1}] +$$
$$+ (1/2)\alpha_k[A_{h-1,k-1} + A_{h+1,k-1}] +$$
$$+ (1/2)\beta_k[A_{h-1,k+1} + A_{h+1,k+1}].$$

Таким образом, окончательно можно записать следующее выражение:

$$D_{hk}^{(4)} = -[\alpha_h - (1/2)]\alpha_k A_{h-1,k-1} - [\beta_h - (1/2)]\alpha_k A_{h+1,k-1} -$$
$$-[\alpha_h - (1/2)]\beta_k A_{h-1,k+1} - [\beta_h - (1/2)]\beta_k A_{h+1,k+1}. \quad (12)$$

Легко видеть, что число обусловленности результирующей матрицы $Cond(D^{(4)})$ мажорируется величиной $N^2 \cdot Cond(A)/4$, поскольку значения $|\alpha_k| \sim |\beta_k| \sim (k/2)$. Следует отметить, что выбору базиса в форме (9) соответствует вполне ожидаемый рост первой производной с величиной N. Для сравнения величин, описываемых соотношением (12), можно привести результаты работы [9], в которой значения аналогичных матричных элементов $D_{hk}^{(4)} \sim h^2k^2$. Теперь несложно установить выражение для спектральных матриц операторов дифференцирования младших порядков

$$D_{hk}^{(3)} \equiv (\psi_k''', \psi_h)_\omega = \int_{-1}^{1} (\alpha_k\varphi_{k-1}'' + \beta_k\varphi_{k+1}'')\psi_h\omega dy,$$

$$D_{hk}^{(3)} = (1/2)\alpha_k[A_{h,k-1} - (1/2)A_{h-2,k-1} - (1/2)A_{h+2,k-1}] +$$
$$+ (1/2)\beta_k[A_{h,k+1} - (1/2)A_{h-2,k+1} - (1/2)A_{h+2,k+1}].$$

$$D_{hk}^{(2)} \equiv (\psi_k'', \psi_h)_\omega = -\int_{-1}^{1} \psi_k'\psi_h'\omega dy + (1/2)\int_{-1}^{1} \psi_k'(\varphi_{h-1} + \varphi_{h+1})\omega dy$$

,

$$D_{hk}^{(2)} = -\alpha_k(\alpha_h - 1/2)B_{h-1,k-1} - \beta_k(\alpha_h - 1/2)B_{h-1,k+1} -$$
$$-\alpha_k(\beta_h - 1/2)B_{h+1,k-1} - \beta_k(\beta_h - 1/2)B_{h+1,k+1}.$$

Обозначим скалярное произведение элементов ψ_k в $L^2_\omega(I)$ через Ψ_{hk}, тогда

$$\Psi_{hk} = (\psi_k, \psi_h)_\omega =$$
$$= (1/4)([\varphi_k - (1/2)(\varphi_{k-2} + \varphi_{k+2})], [\varphi_h - (1/2)(\varphi_{h-2} + \varphi_{h+2})])_\omega.$$

Выразим коэффициенты Ψ_{hk} через известные величины $B_{hk} = (\varphi_k, \varphi_h)_\omega$ (см.: [9])

$$\Psi_{hk} = (1/4)[B_{hk} - 0,5B_{h,k-2} - 0,5B_{h,k+2} - 0,5B_{h-2,k} +$$
$$+ 0,25B_{h-2,k-2} + 0,25B_{h-2,k+2} - 0,5B_{h+2,k} +$$
$$+ 0,25B_{h+2,k-2} + 0,25B_{h+2,k+2}].$$

Для приложений полезно знать представление квадратичных нелинейных слагаемых $u \cdot Du$. При разложении $u_N = \sum_{k=0}^{N} a_k e_k$, где $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ – некоторая ортогональная система, проекцию $u_N \cdot Du_N$ на элемент e_h можно рассчитывать по формулам типа $b_h = \sum_{k+s=h} a_k a_s$. Здесь приведем выражение, необходимое для расчета вклада слагаемого $u_N \cdot Du_N$ при разложении по элементам $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N}$. Слагаемое $\varphi_k \cdot D\varphi_s$ можно записать в виде

$$\varphi_k \cdot D\varphi_s = s[sign(s-k)\varphi_{|s-k|-1} - \varphi_{s+k+1}] - 2\sum_{\substack{j=|s-k-1|,\\ j+s+k-odd}}^{s+k+1} \varphi_j.$$

Тогда b_h запишется следующим образом:

$$b_h=\begin{cases} s\cdot sign(s-k)a_k a_s-2\cdot a_k a_s,\ h=\left|s-k\right|-1;\\ -s\cdot a_k a_s-2\cdot a_k a_s,\ h=s+k+1;\\ -2\cdot a_k a_s,\ h=\left|s-k\right|+1,\ldots,s+k-1;\ j+s+k-odd.\end{cases}$$

Численные результаты. В качестве примера уравнения четвертого порядка рассмотрим уравнение Орра-Зоммерфельда (см.: [10]), которое записывается с граничными условиями в следующем виде:

$$(D^2-\alpha^2)^2 u - i\alpha R[q(y)(D^2-\alpha^2)-q''(y)]u =$$
$$=-i\alpha R\lambda(D^2-\alpha^2)u,$$
$$u(\pm 1)=u'(\pm 1)=0\ .$$

Здесь $D=d/dy$, $\alpha\neq 0$ – волновое число; R – число Рейнольдса; λ – спектральный параметр; $q(y)=1-y^2$ – профиль сдвигового течения.

Для аппроксимации применялся базис в виде (10). В результате рассматривается обобщенная алгебраическая задача на собственные значения, сравнение полученной величины λ производилось в точке Томаса $\alpha=1$, $R=10^4$ (см. табл.) с результатами работ [11, 12]. Из таблицы видно, что наилучшее совпадение знаков наблюдается в сравнении с работой [12], где применялся спектральный метод Петрова-Галеркина.

Значение λ при $\alpha=1$, $R=10^4$ (наиболее опасная мода)

λ =0.23752649	+0.00373967i	Orszag [11]
λ =0.23752708	+0.00373980i	Dongarra [11]
λ =0.2375264888204	+0.0037396706229i	Pop (N = 96, N = 512) [12]
λ=0.2375264888206	+0.0037396706230i	Псевдоспектральный метод N = 64
λ =0.2375264888204	+0.0037396706229i	N = 64

Библиографический список

1. Shen J. and Wang L. Some recent advances on spectral methods for unbounded domains // Commun. Comput. Phys. – 2009. – Vol. 5, No. 2–4.
2. Guo B.-Y., Shen J. and Xu C.-L. Generalized Laguerre approximation and its applications to exterior problems // J. Comput. Math. – 2005. – Vol. 23(2).
3. Christov C.I. A complete orthonormal system of functions in $L_2(-\infty,+\infty)$ space // SIAM J. Appl. Math. – 1982. – Vol. 42(6).
4. Boyd J.P. Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval // J. Comput. Phys. – 1987. – Vol. 69.
5. Guo B.-Y. and Wang Z.-Q. Legendre rational approximation on the whole line // Sci. China Ser. A. – 2004. – Vol. 47(suppl.).
6. Shen J. and Wang L.-L. Error analysis for mapped Legendre spectral and pseudospectral methods // SIAM J. Numer. Anal. – 2004. – Vol. 42.
7. Guo B.-Y., Shen J. and Wang Z.-Q. Chebyshev rational spectral and pseudospectral methods on a semi-infinite interval // Internat. J. Numer. Methods Engrg. – 2002. – Vol. 53(1).
8. Boyd J.P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. – Mineola; NY., 2001.
9. Shen J. Efficient spectral-Galerkin methods II. Direct solvers of second and fourth order equations by using Chebyshev polinomials // SIAM J. Sci. Comput. – 1995. – Vol. 16, No.1.
10. Drazin P.G. & Reid W.R. Hydrodynamic stability. – Cambridge, 1981.
11. Dongarra J.J. & Straughan B. & Walker D.W. Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems, Appl. // Numer. Math. 1996. – Vol. 22.
12. Pop I.S. & Gheorghiu C.I. A Chebyshev-Galerkin method for fourth order problems // Approximation and Optimization, Proceedings of the International Conference on Approximation and Optimization / D.D. Stancu et al. (eds.). – Transilvania, 1997. – Vol. II.