

*С.И. Жилин***Решение задач дисперсионного и ковариационного анализа методом центра неопределенности***S.I. Zhilin***Solving Problems of Dispersion and Covariation Analysis Using Uncertainty Center Method**

Предложен способ решения задач дисперсионного и ковариационного анализа в рамках интервального нестатистического подхода к описанию неопределенности в данных. Способ заключается в сведении задач построения и анализа эмпирических зависимостей при необходимости учета влияния качественных факторов к задаче регрессионного анализа и ее последующем решении методом центра неопределенности.

**Ключевые слова:** нестатистический подход, интервальное оценивание, дисперсионный анализ, ковариационный анализ, метод центра неопределенности.

**Введение.** Интервальный (нестатистический) подход к обработке и анализу экспериментальной информации основывается на описании неопределенностей в данных ограниченными множествами, чаще всего задаваемыми интервалами или их декартовыми произведениями – брусами. При этом на множествах неопределенности не вводятся никаких дополнительных мер (вероятностных, нечетких и пр.). Такой взгляд на обрабатываемые данные хорошо согласуется с запросами практиков, зачастую не владеющих информацией о вероятностной структуре этих данных, особенно в случае коротких выборок.

Идейно восходя к пионерской работе Л.В. Канторовича [1] и часто совпадая содержательно, но различаясь терминологически, приемы построения и анализа эмпирических зависимостей на базе интервального подхода развиваются различными группами отечественных и зарубежных исследователей [2–9]. Выработанная техника оценивания параметров и построения прогнозов зависимостей позволяет существенно обогатить сведения, получаемые аналитиком, о восстанавливаемой зависимости и ее свойствах более традиционными статистическими методами. При этом большинство известных результатов в области интервального (нестатистического) подхода касаются постановки задачи, известной как задача регрессионного анализа, которая состоит в поиске и анализе приемлемой модели зависимости между количественными экзо-

The paper describes a technique of ANOVA-type problem solving on the base of interval non-statistical approach to data uncertainty handling. The essence of the technique is to reduce a problem of building and analyzing empirical dependencies under the influence of categorical factors to the problem of regression analysis which could be solved using uncertainty center method.

**Key words:** non-statistical approach, interval estimates, analysis of variance, analysis of covariance, uncertainty center method.

генными и количественной же эндогенной переменными. Однако на практике при построении зависимости часто приходится сталкиваться с необходимостью учета некоторых качественных факторов. Ситуацию, когда экзогенные переменные представлены исключительно качественными факторами, обычно именуют задачей дисперсионного анализа [10, 11]. Задачу же изучения зависимости, в которой наряду с качественными имеются и количественные экзогенные факторы, принято называть задачей ковариационного анализа [10, 12]. В настоящей работе предложен способ решения задач этих двух типов в рамках интервального (нестатистического) подхода. В первом разделе работы изложены основные идеи интервального подхода, при этом используется терминология метода центра неопределенности [4, 5]. Во втором разделе показано, каким образом задачи дисперсионного и ковариационного анализа могут быть решены с помощью метода центра неопределенности. Наконец, в третьем разделе приведен простой численный пример.

**1. Метод центра неопределенности.** Основу метода центра неопределенности составляет техника исследования множества допустимых значений параметров зависимости, конструируемой по таблице наблюдений за экзогенными и эндогенной переменными. При этом полагается, что значения экзогенных переменных известны точно (или с пренебрежимо малыми погрешностями), а суммарная ошибка наблюдения эндогенной переменной огра-

ничена сверху по модулю величиной  $\varepsilon$ . В частности, в случае построения линейно-параметризованной зависимости вида

$$y = \sum_{i=0}^n \beta_i x_i \quad (1)$$

по таблице экспериментальных данных, полученной в  $N$  наблюдениях,

$$T = \left\{ (y_j, x_{0j}, x_{1j}, \dots, x_{nj}) \mid j = 1, \dots, N \right\} \quad (2)$$

множество допустимых значений параметров зависимости представляет собой полиэдральное, а следовательно, и выпуклое множество

$$B = \left\{ \beta = (\beta_0, \dots, \beta_n) \mid y_j - \varepsilon_j \leq \sum_{i=0}^n \beta_i x_{ij} \leq y_j + \varepsilon_j, \right. \\ \left. j = 1, \dots, N. \right\} \quad (3)$$

При этом  $B$  ограничено тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдений  $X = (x_{ij})_{(n+1) \times N}$  равен  $n + 1$ . Содержательно неограниченность множества  $B$  может интерпретироваться как недостаток эмпирической информации. Пустота множества  $B$  говорит о противоречивости собранной информации.

Главным принципом нестатистической обработки наблюдений, определяющим все последующие алгоритмы и получаемые выводы, является отсутствие каких-либо предпочтений для элементов множества  $B$  (их равноправие при выборе в качестве оценок параметров).

Ввиду сложности полного описания множества  $B$  в ряде случаев ограничиваются некоторыми его аппроксимациями. В частности, в этой роли можно использовать брусы (гиперпараллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям), охватывающие множество неопределенности  $B$ . Наименьший из таких брусков отыскивается путем решения следующих задач линейного программирования:

$$\underline{\beta}_i = \min_{\beta \in B} \beta_i, \quad \bar{\beta}_i = \max_{\beta \in B} \beta_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (4)$$

Интервалы  $[\underline{\beta}_i, \bar{\beta}_i]$ ,  $i = 0, \dots, n$ , определяющие этот брусок, содержат в себе возможные точечные оценки параметров  $\beta_i$ , а их длины могут выступать в качестве меры точности точечных оценок.

В соответствии с главным принципом нестатистической обработки наблюдений точечной оценкой параметров  $\beta_i$  зависимости (1) в равной степени может служить любой из элементов множества  $B$ . Известен ряд подходов к выбору представительной точки из множества  $B$ , опирающихся на различные соображения [13], но одним из наиболее простых способов построения точечной оценки  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_n)$  является выбор в этом качестве средней точки охватывающего бруска, отыскиваемого при решении задач (4):

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{2}(\underline{\beta}_i + \bar{\beta}_i), \quad \Delta\beta_i = \frac{\bar{\beta}_i - \underline{\beta}_i}{2}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (5)$$

Помимо задачи точечного и интервального оценивания параметров зависимости в отношении множества  $B$  может ставиться и задача интервального оценивания выходной переменной  $y$  зависимости (1) в точке  $x$ :

$$\underline{y}(x) = \min_{\beta \in B} \beta x, \quad \bar{y}(x) = \max_{\beta \in B} \beta x. \quad (6)$$

Интервал  $[\underline{y}(x), \bar{y}(x)]$  содержит возможные значения выходной переменной  $y$  в точке  $x$  при различном выборе параметров зависимости. В качестве точечной оценки прогнозного значения зависимости (1) в точке  $x$  по аналогии с (5) может использоваться полусумма концов интервала:

$$\hat{y}(x) = \frac{1}{2}(\underline{y}(x) + \bar{y}(x)), \quad \Delta y(x) = \frac{1}{2}(\bar{y}(x) - \underline{y}(x)). \quad (7)$$

С использованием гарантированных интервальных оценок параметров и прогнозных значений зависимости довольно просто проводится анализ значимости коэффициентов зависимости [5, 6]. В случае пустоты множества допустимых параметров зависимости  $B$  возможно выявление выбросов [14] и/или построение совместных подвыборок наблюдений [15].

Таким образом, базовые приемы метода центра неопределенности позволяют исследователю решать тот же круг вопросов, которые находятся в фокусе классического регрессионного анализа.

**2. Задачи ковариационного и дисперсионного анализа.** Основной прием, позволяющий при построении зависимости ввести в рассмотрение качественные факторы, состоит в использовании фиктивных переменных. В классическом статистическом анализе хорошо известны [10–12, 16] способы применения этого аппарата для сведения задач дисперсионного анализа (все факторы качественные) и ковариационного анализа (часть факторов – количественные, а часть – качественные) к задаче регрессионного анализа. В настоящем разделе будет показано, что использование того же приема при нестатистическом подходе делает возможным решение задач дисперсионного и ковариационного анализов с помощью метода центра неопределенности.

Для учета влияния на значение выходной переменной каждого из качественных факторов  $x_i$ , принимающих значения на  $L_i$  уровнях  $X_i = \{x_{i0}, \dots, x_{iL_i-1}\}$ , в зависимость вводятся  $L_i - 1$  фиктивных переменных, значения которых в совокупности кодируют уровень фактора  $x_i$ , соответствующий каждому из наблюдений. Способ выбора фиктивных переменных не единственен. Одним из наиболее простых для реализации и интерпретации является следующий вариант сопоставления уровней фактора и значений совокупности фиктивных переменных.

Один из уровней фактора выбирается в качестве эталонного, например,  $x_{i_0}$ , а для остальных определяются фиктивные переменные  $d_{i_1}, \dots, d_{i_{(L_i-1)}}$ , принимающие значения 0 или 1. Ситуация, когда все переменные  $d_{i_1}, \dots, d_{i_{(L_i-1)}}$  равны нулю, соответствует эталонному уровню фактора  $x_{i_0}$ . Равенство единице переменной  $d_{i_k}$  при нулевых значениях остальных фиктивных переменных соответствует уровню фактора  $x_{i_k}$ .

Коэффициент  $\delta_{i_k}$  при каждой из заданных таким способом фиктивных переменных  $d_{i_k}$  представляет собой оценку так называемого чистого эффекта, т.е. разницы в значении выходной переменной, обусловленной переходом фактора  $x_i$  с эталонного уровня  $x_{i_0}$  на уровень  $x_{i_k}$  при фиксированных значениях прочих переменных, входящих в зависимость.

После пополнения фиктивными переменными структура зависимости приобретает вид

$$y = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i x_i + \sum_{i=m}^n \sum_{k=1}^{L_i-1} \delta_{i_k} d_{i_k}, \quad (8)$$

где входные переменные  $x_0, \dots, x_{m-1}$  являются количественными факторами, а качественные факторы  $x_m, \dots, x_n$  представлены группами фиктивных переменных  $d_{i_1}, \dots, d_{i_{(L_i-1)}}$ ,  $i = m, \dots, n$ .

При  $m = 0$  задача построения и анализа зависимости вида (2) соответствует задаче дисперсионного анализа, а при  $m > 0$  – задаче ковариационного анализа. Для оценивания коэффициентов  $\beta_i$  и  $\delta_{i_k}$  используются методы, изложенные в предыдущем разделе.

**3. Пример.** Данные для примера (табл., рис.) взяты из [12, с. 301] и представляют собой вес ( $y$ ) в фунтах и возраст в неделях для 13 индеек. Четыре из них выращены в штате Джорджия, четыре – в Виргинии и пять – в Висконсине. Попробуем связать вес и возраст птицы простой линейной зависимостью и выяснить, какое влияние на зависимость оказывает место ее происхождения. Для учета влияния этого качественного фактора, принимающего значение на трех уровнях, введем две фиктивные переменные  $d_1$  и  $d_2$ , определив их значения. Конструируемая зависимость имеет вид:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \delta_1 d_1 + \delta_2 d_2 + \varepsilon. \quad (9)$$

Данные об индейках

Номер опыта	Вес, фунтов (y)	Возраст, недель (x)	Место происхождения	$d_1$	$d_2$
1	13,3	28	Джорджия	1	0
2	8,9	20	Джорджия	1	0
3	15,1	32	Джорджия	1	0
4	10,4	22	Джорджия	1	0
5	13,1	29	Виргиния	0	1
6	12,4	27	Виргиния	0	1
7	13,2	28	Виргиния	0	1
8	11,8	26	Виргиния	0	1
9	11,5	21	Висконсин	0	0
10	14,2	27	Висконсин	0	0
11	15,4	29	Висконсин	0	0
12	13,1	23	Висконсин	0	0
13	13,8	25	Висконсин	0	0

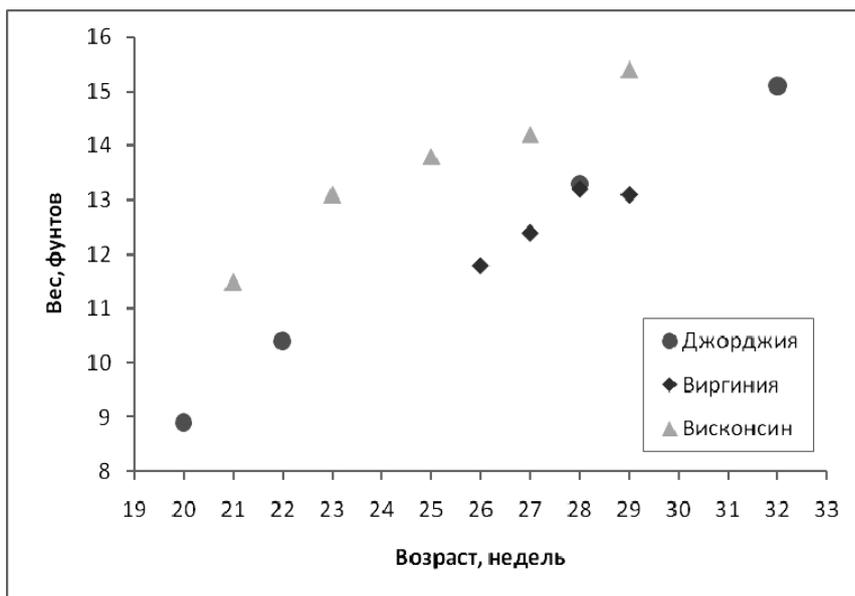


Диаграмма рассеяния для данных об индейках

Отсутствующую в первоисточнике информацию о верхней границе абсолютного значения ошибки ( $\bar{\varepsilon}$ ) измерения выходной переменной восполним, положив ее равной 1 фунту. Множество неопределенности в нашей задаче определяется неравенствами вида

$$y_j - \bar{\varepsilon} \leq \beta_0 + \beta_1 x_j + \delta_1 d_{1j} + \delta_2 d_{2j} \leq y_j + \bar{\varepsilon}, j = 1, \dots, 13, \quad (10)$$

где  $(y_j, x_j, d_{1j}, d_{2j})$  – данные из таблицы.

Используя те же процедуры метода центра неопределенности, что и при решении задачи регрессионного анализа, получаем интервальные оценки параметров зависимости:

$$\hat{\beta}_0 \in [1,750; 5,570], \hat{\beta}_1 \in [0,350; 0,450],$$

$$\hat{\delta}_1 \in [-3,350; -0,850], \hat{\delta}_2 \in [-2,600; -0,450].$$

В качестве точечной оценки примем наиболее просто вычисляемый центр прямоугольника:

$$\hat{\beta}_0 = 3,750, \hat{\beta}_1 = 0,400, \hat{\delta}_1 = -2,100, \hat{\delta}_2 = -1,525.$$

Однозначно отрицательные интервальные оценки коэффициентов  $\delta_1, \delta_2$  при фиктивных переменных указывают на различия в индейках, первая – из Джорджии и Висконсина, а вторая – из Виргинии и Висконсина соответственно. Подставляя три различных набора значений фиктивных переменных  $(d_1, d_2)$  и используя точечные оценки

параметров, получим зависимости, описывающие характеристики птиц, выращенных на трех разных территориях:

для Джорджии при  $d_1 = 1, d_2 = 0$ :

$$\hat{y} = 1,650 + 0,400x;$$

для Виргинии при  $d_1 = 0, d_2 = 1$ :

$$\hat{y} = 2,225 + 0,400x;$$

для Висконсина при  $d_1 = 0, d_2 = 0$ :

$$\hat{y} = 3,750 + 0,400x.$$

Полученные результаты не противоречат результатам обработки этих данных классическими методами регрессионного анализа [12].

**Заключение.** Таким образом, задачи учета влияния качественных факторов при построении и анализе зависимостей по экспериментальным данным, традиционно решаемые статистическими методами дисперсионного и ковариационного анализа, могут быть с успехом решены и в рамках интервального (нестатистического) подхода. Достоинствами интервального подхода являются существенно более простая система условий применимости его методов и естественная для аналитиков-практиков форма представления информации о неопределенности в данных.

## Библиографический список

1. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сиб. мат. журнал. – 1962. – Т. 3, №5.
2. Спивак С.И. Информативность эксперимента и проблема неединственности решения обратных задач химической кинетики: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Черноголовка, 1984.
3. Bounding Approaches to System Identification / Milanese M., Norton J., Walter E., editors. – London, 1996.
4. Белов В.М., Суханов В.А., Унгер Ф.Г. Теоретические и прикладные аспекты метода центра неопределенности. – Новосибирск, 1995.
5. Оскорбин Н.М., Максимов А.В., Жилин С.И. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности // Известия АлтГУ. – 1998. – №1.
6. Вошинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р. Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская лаборатория. – 1990. – Т. 56, №7.
7. Померанцев А.Л., Родионова О.Е. Построение многомерной градуировки методом простого интервального оценивания // Жур. аналит. химии. – 2006. – №61.
8. Кумков С.И. Обработка экспериментальных данных ионной проводимости расплавленного электролита методами интервального анализа // Расплавы. – 2010. – №3.
9. Подружко А.А., Подружко А.С. Интервальное представление полиномиальных регрессий. – М., 2003.
10. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М., 1976.
11. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. – М., 1980.
12. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М., 1987.
13. Жилин С.И. Нестатистические модели и методы построения и анализ эмпирических зависимостей: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Барнаул, 2004.
14. Zhilin S.I. Simple Method for Outlier Detection in Fitting Experimental Data Under Interval Error // Chemometrics and Intellectual Laboratory Systems. – 2007. – Vol. 88(1).
15. Кумков С.И. Интервальный подход к обработке зашумленных экспериментальных данных с многократными измерениями в условиях неопределенности // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: докл. Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Яненко. – Новосибирск, 2011.
16. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М., 1999.