УДК 514.75

М.А. Чешкова

Построение кривых на плоскости Лобачевского

M.A. Cheshkova

The Construction of Curves on Lobacnevsky Plane

С использованием математического пакета строятся кривые на плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре и на гиперболоиде.

Ключевые слова: псевдоевклидово пространство, интерпретация Пуанкаре, гиперболоид, орицикл, эквидистанта.

Having used mathematical package the researcher constructs curves on Lobachevsky plane which were interpreted by Poincare and realized on his hyperboloid.

Key words: pseudoeuclidean space, model of Poincare, hyperboloid, oricicle, equidistant curve.

Рассмотрим псевдоевклидово пространство V_3^1 [1]. В оробазисе скалярное произведение и длина вектора определяются формулами

$$(x,y) = -x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3,$$
$$|x|^2 = -(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Плоскость Лобачевского мы рассматриваем как сферу мнимого радиуса [2]

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1. \qquad (1)$$

С точки зрения аффинного пространства, поверхность (1) является двуполостным гиперболоидом. Будем рассматривать одну из полостей гиперболоида (полусфера $x^1 > 0$).

Это есть модель плоскости Лобачевского на двуполостном гиперболоиде. Прямыми в этой модели являются линии, которые получаются при пересечении гиперболоида плоскостями, проходящими через начало координат.

Рассмотрим стереографическую проекцию [3] сферы мнимого радиуса из южного полюса на диаметральную плоскость.

Пусть (u,v) координаты проекции.

Имеем

$$\frac{u}{x^1} = \frac{v}{x^3} = \frac{1}{x^1+1},$$
$$(u^2+v^2)(x^1+1) = x^1 - 1,$$
$$x^1 = \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2=v^2},$$
$$x^2 = \frac{2u}{1-u^2-v^2},$$
$$x^3 = \frac{2v}{1-u^2-v^2}.$$

Верхняя полость гиперболоида проектируется на внутренность круга $u^2+v^2<1$. Это есть конформная интерпретация Пуанкаре [2] внутри круга. Прямыми в этой интерпретации есть дуги окружностей, пересекающих границу круга, либо прямые, проходящие через центр окружности $u^2+v^2=1$.

Преобразование $z = \frac{1+iw}{1-iw}$ переводит верхнюю полуплоскость $Im(w) > 0, w = x+yi, y > 0$ в единичный круг $|z| = 1, z = u+vi$.

Получили конформную интерпретацию Пуанкаре в верхней полуплоскости [4].

Прямые в интерпретации Пуанкаре в верхней полуплоскости есть полуокружности, центр которых на оси Ox, либо прямые, ортогональные оси Ox.

Задание кривой в верхней полуплоскости определит кривую в круге и на гиперболоиде.

Пусть кривая в верхней полуплоскости задается системой $x = f(t), y = g(t), y > o$.

Тогда

$$u(t) = \frac{1-g(t)^2-f(t)^2}{(1+g(t))^2+f(t)^2},$$

$$v(t) = \frac{2f(t)}{(1+g(t))^2+f(t)^2}$$

– кривая в интерпретации Пуанкаре внутри круга,

$$x^1 = \frac{1+f(t)^2+g(t)^2}{2g(t)},$$

$$x^2 = \frac{1-f(t)^2-g(t)^2}{2g(t)},$$

$$x^3 = \frac{f(t)}{g(t)}$$

– кривая на гиперболоиде.

Используя матетический пакет, строим кривые в различных интерпретациях.

Пример 1. *Прямая.* Прямым $u = kv$ в круге соответствуют полуокружности $(x+k)^2 + y^2 = 1 + k^2$ в верхней полуплоскости, а прямым $x = a$ в верхней полуплоскости – окружности $u = \frac{1-a^2-t^2}{(1+t)^2+a^2}, v = \frac{2a}{(1+t)^2+a^2}$ в круге. Построим прямые при $a = -1/8, 1/8, 1/4, k = 1, 2, 3$ в различных интерпретациях (рис. 1–3).

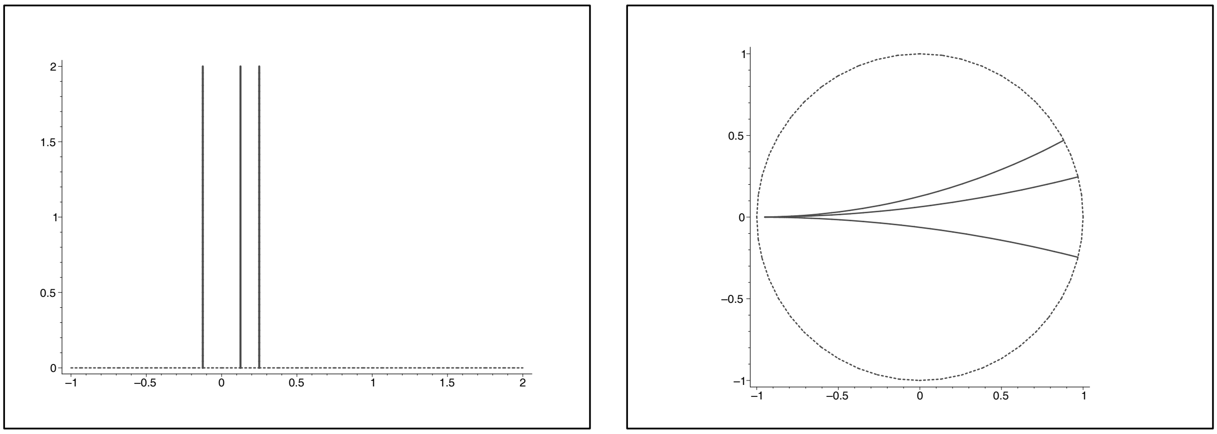


Рис. 1. Прямые $a = -1/8, 1/8, 1/4$ в верхней полуплоскости и круге

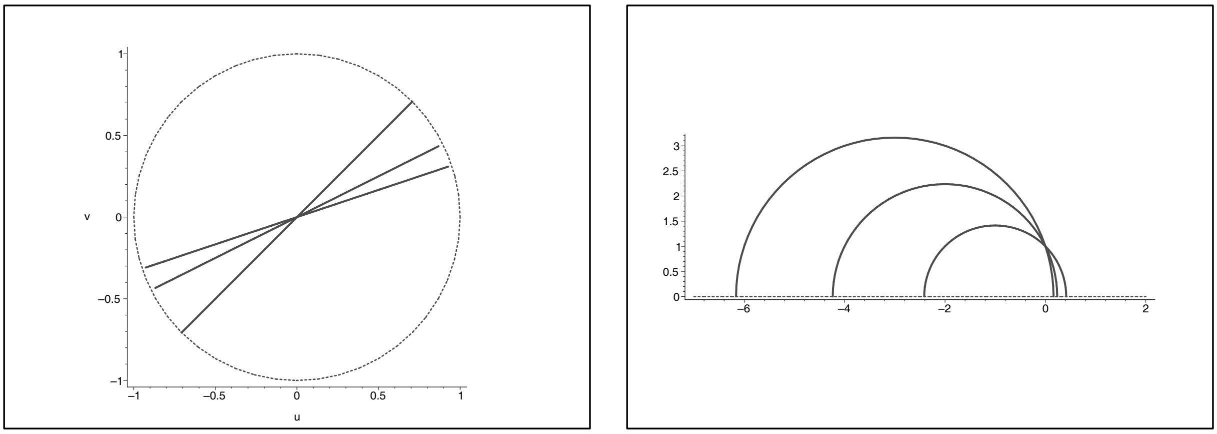
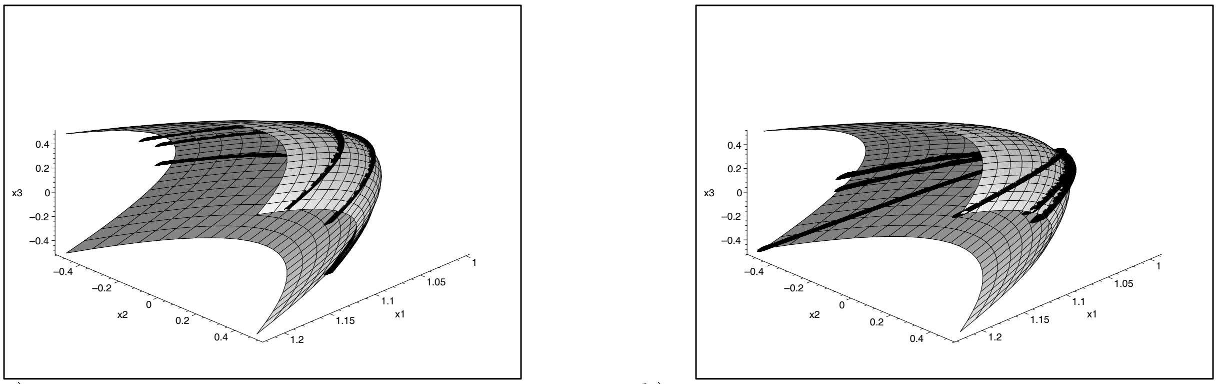


Рис. 2. Прямые $u = kv,\ k = 1, 2, 3$ в верхней полуплоскости и круге



a)

b)

Рис. 3. a) Прямые $a = -1/8, 1/8, 1/4$; в) $u = kv, k = 1, 2, 3$ на гиперболоиде

На плоскости Лобачевского различают [5] три типа пучка прямых:

1) центральный пучок – множество всех прямых. проходящих через данную точку (центр пучка);

2) пучок расходящихся прямых – множество всех прямых, перпендикулярных данной прямой;

3) пучок параллельных прямых – множество всех прямых, параллельных в данном направлении.

Ортогональные траектории пучка прямых Лобачевского с центром пучка B обладают тем свойством, что точки траектории равно удалены в метрике Лобачевского от центра B, следовательно, есть окружности по Лобачевскому.

Ортогональные траектории пучка параллельных прямых Лобачевского называются орициклами. Все орициклы данного пучка конгруэнтны.

Ортогональные траектории пучка прямых Лобачевского, ортогональных данной прямой (расходящихся прямых), называются эквидистантами.

Расстояние (по Лобачевскому) от эквидистанты до данной прямой (базы) есть величина постоянная.

Построим все три пучка.

Пример 2. *Окружность.* Определим ортогональные траектории центрального пучка прямых Лобачевского в интерпретации Пуанкаре в верхней полуплоскости.

Убедимся, что это евклидовы окружности и найдем их уравнения.

Рассмотрим пучок окружностей с полюсом $B(0, b)$.

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 + b^2. \qquad (2)$$

Дифференцируем и исключаем a.

$$(x^2 - y^2 + b^2)dx + 2xydy = 0.$$

Ортогональные траектории удовлетворяют уравнению

$$(x^2 - y^2 + b^2)dy - 2xydx = 0.$$

Откуда

$$x^2 + y^2 + b^2 - cy = 0, c = const,$$

$$x^2 + ((y - \frac{c}{2})^2 = \frac{c^2}{4} - b^2, \frac{c^2}{4} - b^2 > 0$$

– евклидовы окружности.

Построим центральный пучок и окружность, полагая $b = \sqrt{3}; a = 1, 2, 3, 4, c = 4$ (рис. 4, 5).

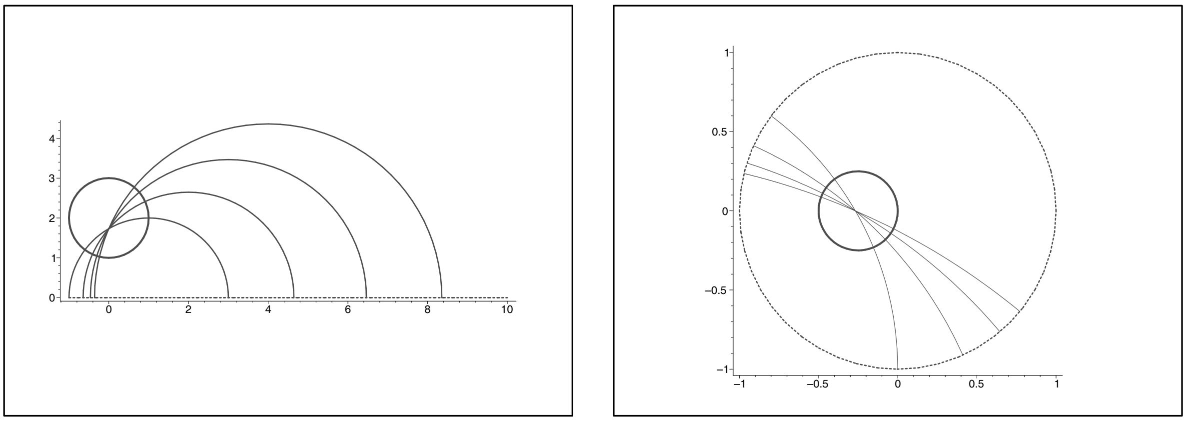


Рис. 4. Центральный пучок и окружность $b = \sqrt{3};\ a = 1, 2, 3, 4; c = 4$ в верхней полуплоскости и круге

Пример 3. *Орицикл.* Покажем, что ортогональные траектории пучка параллельных прямых Лобачевского (орициклы) в интерпретации Пуанкаре есть евклидовы окружности, касающиеся оси (Ox) в полюсе $B(b, 0)$.

Рассмотрим пучок окружностей с полюсом $B(b, 0)$ (пучок параллельных прямых Лобачевского),

$$(x-a)^2 + y^2 = (b-a)^2. \qquad (3)$$

Дифференцируем и исключаем a.

$$((x-b)^2 + y^2)dx + 2y(x-b)dy = 0.$$

Ортогональные траектории удовлетворяют уравнению

$$((x-b)^2 + y^2)dy - 2y(x-b)dx = 0.$$

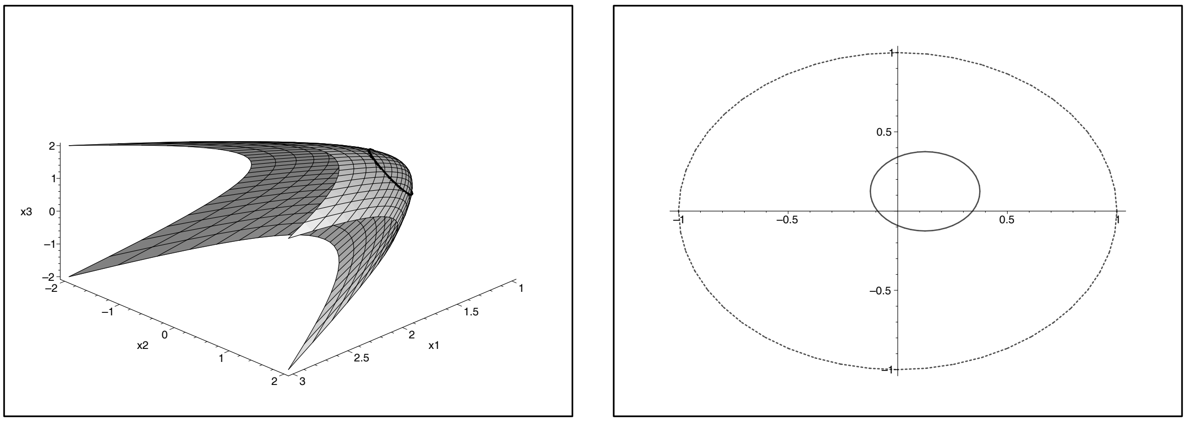


Рис. 5. Окружность $u = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}cos(t), v = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}sin(t)$

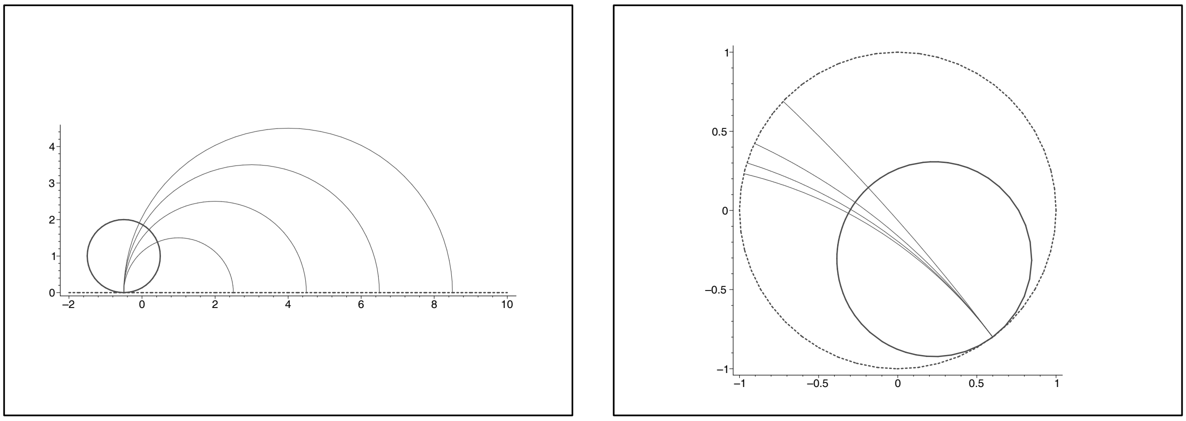


Рис. 6. Пучок параллельных прямых и орицикл $b = -1/2; a = 1, 2, 3, 4; c = 2$ в верхней полуплоскости и круге

Откуда

$$(x - b)^2 + y^2 = cy, c = const.$$

Итак, ортргональные траектории пучка окружностей (3) есть евклидовы окружности

$$(x - b)^2 + (y - \frac{c}{2})^2 = \frac{c^2}{4}. \qquad (4)$$

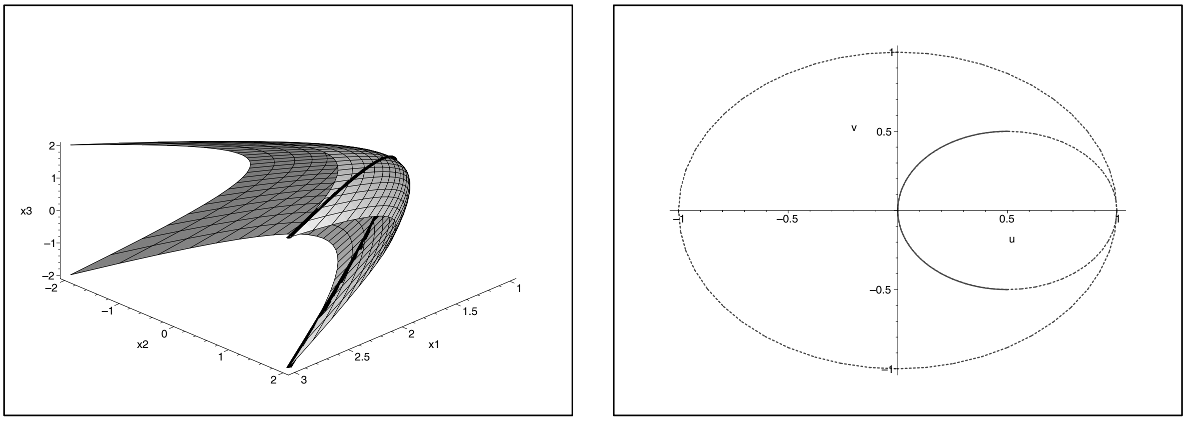


Рис. 7. Часть орицикла $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(t),\ v = \frac{1}{2}sin(t)$

Построим пучок параллельных прямых (3) и орицикл (5), полагая $b = -1/2$; $a = 1, 2, 3, 4$; $c = 2$ в различных интерпретациях (рис. 6, 7).

Пример 4. *Эквидистанта.* Покажем, что ортогональные траектории пучка прямых Лобачевского α в интерпретации Пуанкаре, ортогональных прямой (окружности: базы) γ (эквидистанты), есть евклидовы окружности, центры которых не принадлежат оси Ox и которые проходят через точки γ, принадлежащие оси Ox. Рассмотрим прямую Лобачевского$\gamma : x^2 + y^2 = r^2$ и пучок ортогональных ей прямых

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2 = a^2 - r^2, a^2 > r^2. \qquad (5)$$

Дифференцируем и исключаем a.
Имеем

$$(x^2 - y^2 - r^2)dx + 2xydy = 0.$$

Ортогональные траектории удовлетворяют уравнению

$$(x^2 - y^2 - r^2)dy - 2xydx = 0.$$

Откуда

$$y^2 d\frac{x^2}{y} = -(y^2 + r^2)dy.$$

Итак, ортогональные траектории пучка окружностей (5) есть евклидовы окружности

$$x^2 + (y - \frac{c}{2} = r^2 + \frac{c^2}{4}, c = const. \qquad (6)$$

На рисунке 8 построен пучок (5), база, эквидистанта, где $r = 1; a = 7/8, 3, 4; c = 1/2$.

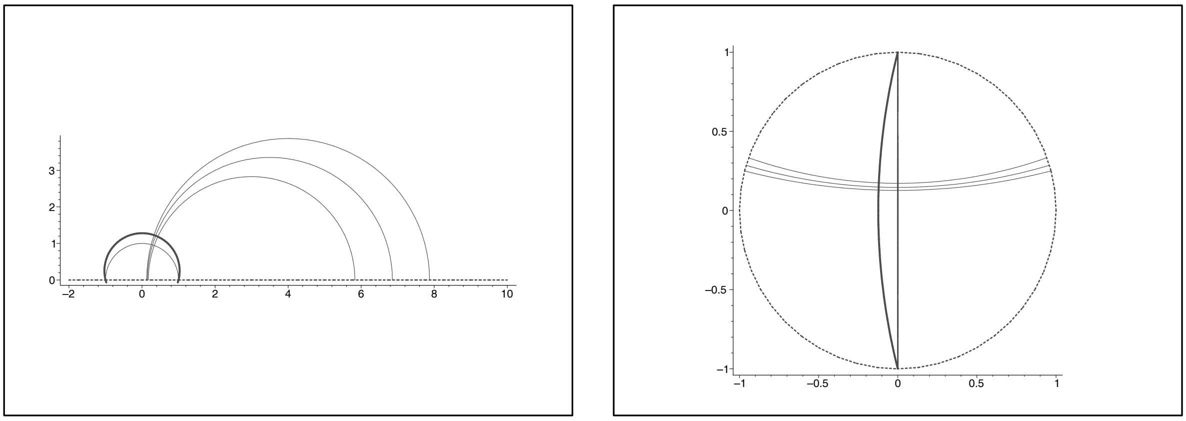


Рис. 8. Пучок прямых, ортогональных данной, эквидистанта, $r = 1$; $a = 7/8, 3, 4$; $c = 1/2$ в верхней полуплоскости и круге

Библиографический список

1. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М., 1966.
2. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. – М., 1969.
3. Дубровин Б.А., Новиков Б.А., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М., 1986.
4. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М., 1971.
5. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия 2. – М., 1975.