УДК 532.12

А.А. Папин, М.А. Токарева

Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде*

A.A. Papin, M.A. Tokareva

The Sum about Movement of a Compressible Fluid in a Deformable Porous Medium

Рассматривается задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде. Доказаны существование локального классического решения и теорема единственности.

The problem of moving compressible fluid in a deformable porous medium is considered. The existence of local classical solutions and the uniqueness theorem are proved.

Ключевые слова: фильтрация, пористость, сжимаемость, деформируемая среда, разрешимость.

Key words: filtration, porosity, compressibility, deformable medium, solvability.

1. Основная модель. В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа [1, 2]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \nabla\cdot((1-\phi)\rho_s\vec{v_s}) = 0, \qquad \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_f\phi\vec{v_f}) = 0, \tag{1}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_s = -\frac{\phi^m}{\nu}p_e - \phi^b\beta_\phi\frac{dp_e}{dt}, \tag{3}$$

$$p_{tot} = p_0 - \rho_s g z = \phi p_f + (1-\phi)p_s; \qquad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f). \tag{4}$$

решаемая в области $(\vec{x}, t) \in Q_T = \Omega\times(0,T)$, $\Omega \in R^3$.

Данная начально-краевая задача описывает движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой деформируемой пористой среде. Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз (f – жидкость, s – твердые частицы); ϕ – пористость; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ – плотность массовых сил; k – проницаемость, μ – динамическая вязкость жидкости ; η, β_ϕ, b, m – неотрицательные параметры среды, $p_{tot} = p_0 + \rho_s g(H - x_3)$ – общее давление (заданная функция). Задача записана в эйлеровых координатах $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, t (начало отсчета – на глубине H от поверхности земли, ось x_3 направлена вверх, т.е. движение происходит при $x_3 > 0$), $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v_s}\cdot\nabla$. Истинная плотность горной породы ρ_s принимается постоянной. Искомыми являются величины ϕ, ρ_f, v_s, v_f, p_f.

В одномерном случае система (1)–(4) замкнута, если $p_f = p(\rho_f)$ или $\rho_f = const$. В общем случае к системе (1)–(4) добавляется уравнение сохранения импульса системы «твердая матрица – поровая жидкость» [1].

Локальная классическая разрешимость задачи Коши для системы (1)–(4) в случае, когда ρ_f – функция давления, а также разрешимость «целом» по времени при постоянстве ρ_f доказаны в работе [3].

Особенностью системы (1)–(4) является необходимость обоснования физического принципа максимума для пористости ϕ и плотности ρ_f: $0 < \phi < 1$, $0 < \rho_f < \infty$.

2. Одномерная задача

2.1. Постановка задачи. Далее рассмотрим одномерную задачу с условиями: $p_f = R\rho_f, R = const > 0, p_0 = 0, g = 0$. Система уравнений (1)–(4) примет вид:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left((1-\phi)v_s\rho_s\right) = 0, \tag{5}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» (проект № 2.2.2.4/4278), а также при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственные контракты №14.740.11.0355, №14.740.11.0878).

$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi v_f)=0, \qquad (6)$$

$$\phi(v_f-v_s)=-\frac{k\phi^n}{\mu}\frac{\partial p_f}{\partial x}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}=-\frac{\phi^m}{\eta}p_e-\phi^b\beta_\phi\frac{dp_e}{dt}, \qquad (8)$$

$$\phi p_f+(1-\phi)p_s=0; p_e=(1-\phi)(p_s-p_f). \quad (9)$$

Данная система дополняется начально-краевыми условиями

$$v_s\mid_{x=0,x=1}=0, \quad v_f\mid_{x=0,x=1}=0,$$

$$v_s\mid_{t=0}=v_s^0(x), \quad v_f\mid_{t=0}=v_f^0(x), \qquad (10)$$

$$\phi\mid_{t=0}=\phi^0(x), \quad \rho_f\mid_{t=0}=\rho^0(x).$$

Определение 1. Классическим решением задачи (5)–(10) называется совокупность функций $(\phi,\ v_i,\ \ p_i,\ \rho_f)$, $i=f,s$, $\phi\in C^{1+\alpha}(Q_T)$, $(v_i,\,p_i,\,\rho_f)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, удовлетворяющих уравнениям (5)–(9) и начальным и граничным условиям (10) как непрерывные в $\overline{Q_T}$ функции.

В случае постоянства истинной плотности второй фазы система уравнений (5)–(9) становится замкнутой относительно неизвестных функций ϕ, v_i, p_i, ρ_f, $i=f,s$.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть данные задачи (5)–(10) подчиняются следующим условиям гладкости: $\phi^0\in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $(v_f^0,v_s^0,\rho^0)\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, условиям согласования: $v_i^0\mid_{x=0,x=1}=\frac{d\rho^0}{dx}\mid_{x=0,x=1}=0$, а также удовлетворяют неравенствам

$$0<m_0\le\phi^0(x)\le M_0<1,$$

$$0<m_1\le\rho^0(x)\le M_1<\infty, x\in\overline{\Omega},$$

где m_0, M_0, m_1, M_1 – известные положительные постоянные.

Тогда задача (5)–(10) имеет классическое локальное решение, т.е. существует значение t_0 такое, что

$$\phi(x,t)\in C^{1+\alpha}(\overline{Q_{t_0}}),(v_i(x,t),p_i(x,t),\rho_f)\in$$

$$\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{t_0}}),i=f,s.$$

Более того $0<\phi(x,t)<1$, $\rho_f(x,t)>0$ в $\overline{Q_{t_0}}$.

2.2. Локальная разрешимость. При доказательстве теоремы 1 удобно использовать переменные Лагранжа [4; 5, с. 47].

Можно однозначно построить траекторию движения частиц $\bar{x}=\bar{x}(\tau,x,t)$, как решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=v_s(\bar{x},t), \quad \bar{x}\mid_{\tau=t}=x.$$

Это решение обладает свойствами

$$\bar{x}(\tau;0,t)=0, \quad \bar{x}(\tau;1,t)=1, \quad \bar{x}(\tau;x,t)\in(0,1),$$

$$\forall\tau\in[0,T], \quad x\in(0,1).$$

Точка $(\hat{x},t)=(\bar{x}(0;x,t),t)$ – лагранжева координата точки (x,t). Обратный переход от $(\hat{x},t)$ к $(x,t):x(\hat{x},t)=\bar{x}(t,\hat{x},0),t(\hat{x},t)=t$.

Уравнения (5)–(9) в переменных Лагранжа принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\rho}_f\frac{\hat{\phi}}{1-\hat{\phi}}\right)+\hat{J}/(1-\hat{\phi})\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{\rho}\hat{\phi}(\hat{v}_f-\hat{v}_s))=0,$$

$$\frac{\partial(1-\hat{\phi})}{\partial t}+(1-\hat{\phi})\hat{J}\frac{\partial\hat{v}_s}{\partial\hat{x}}=0,$$

$$\hat{\phi}(\hat{v}_s-\hat{v}_f)=k(\hat{\phi})\left(\hat{J}\frac{\partial\hat{p}_f}{\partial\hat{x}}\right),$$

$$\hat{J}\frac{\partial\hat{v}_s}{\partial\hat{x}}=-a_1(\hat{\phi})\hat{p}_e-a_2(\hat{\phi})\frac{\partial\hat{p}_e}{\partial t},$$

где $\hat{J}(\hat{x},t)=\frac{\partial\hat{x}}{\partial x}(\hat{x},t)$ – якобиан перехода от переменных (x,t) к $(\hat{x},t)$, $k(\phi)=k\phi^n/\mu,a_1(\phi)=\phi^m/\nu,a_2(\phi)=\phi^b\beta_\phi$.

По определению производной по времени в переменных Лагранжа имеем

$$\frac{\partial(1-\hat{\phi})}{\partial t}=\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+v_s\frac{\partial(1-\phi)}{\partial x}$$

и, следовательно, из (5) выводим

$$1-\hat{\phi}(x,t)=$$

$$=(1-\phi_0(\bar{x}(0;x,t)))\,exp\{-\int\limits_0^t\frac{\partial v_s}{\partial\bar{x}}(\bar{x}(\tau;x,t),\tau)d\tau\}.$$

Тем самым приходим к представлению

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}(\tau;x,t)=exp\{-\int\limits_\tau^t\frac{\partial v_s}{\partial x}(\bar{x}(l;x,t),l)dl\}$$

Откуда получаем, что

$$\hat{J}(\hat{x}(x,t),t)=exp\{-\int\limits_0^t\frac{\partial v_s}{\partial\bar{x}}(\bar{x}(\tau;x,t),\tau)d\tau\}.$$

Таким образом, $1-\hat{\phi}(\hat{x},t)=(1-\phi_0(\hat{x}))\hat{J}(x,t)$. Далее, опуская «крышки», получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\frac{\phi}{1-\phi}\right)+\frac{1}{1-\phi_0}\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi(v_f-v_s))=0,$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+\frac{(1-\phi)^2}{1-\phi_0}\frac{\partial v_s}{\partial x}=0,$$

$$\phi(v_s-v_f)=k(\phi)\left(\frac{1-\phi}{1-\phi_0}\frac{\partial p_f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{1-\phi}{1-\phi_0}\frac{\partial v_s}{\partial x}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}.$$

Наконец, переходя от $(\hat{x},t)$ к массовым переменным Лагранжа (y,t) по правилу

$$(1-\phi_0(\hat{x}))d\hat{x}=dy, y(\hat{x})=\int\limits_0^{\hat{x}}(1-\phi_0(\eta))d\eta\in[0,1]$$

и формально заменяя y на x, учитывая, что $p_e=-R\rho_f$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\frac{\phi}{1-\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi(v_f-v_s))=0,$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+(1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x}=0,$$

$$\phi(v_s-v_f)=k(\phi)\left((1-\phi)R\frac{\partial\rho_f}{\partial x}\right),$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}=a_1(\phi)\rho_f+a_2(\phi)\frac{\partial\rho_f}{\partial t}.$$

Используя первое и третье уравнения данной системы, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\frac{\phi}{1-\phi}\right)-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f k(\phi)\left((1-\phi)R\frac{\partial\rho_f}{\partial x}\right))=0.$$

Из второго уравнения системы следует, что

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}=-\frac{1}{(1-\phi)^2}\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}.$$

Подставляя $\frac{\partial v_s}{\partial x}$ в четвертое, выводим:

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t}=a_1(\phi)\rho_f+a_2(\phi)\frac{\partial\rho_f}{\partial t}.$$

Тем самым приходим к следующей задаче для функций ρ_f,ϕ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\frac{\phi}{1-\phi}\right)-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f k(\phi)\left((1-\phi)R\frac{\partial\rho_f}{\partial x}\right))=0,$$

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t}=a_1(\phi)R\rho_f+a_2(\phi)R\frac{\partial\rho_f}{\partial t},$$

$$k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial\rho_f}{\partial x}\mid_{x=0,x=1}=0,$$

$$\rho_f\mid_{t=0}=\rho^0(x),\quad \phi\mid_{t=0}=\phi^0(x).$$

Далее для любого $\eta\in(0,1]$ рассмотрим следующую вспомогательную задачу A_η:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f^\eta\frac{\phi^\eta}{1-\phi^\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_f^\eta k(\phi^\eta)(1-\phi^\eta)R\frac{\partial\rho_f^\eta}{\partial x}\right)=0,$$

$$\frac{1}{1-\phi^\eta}\frac{\partial\phi^\eta}{\partial t}=a_1(\phi^\eta)R\rho_f^\eta+(a_2(\phi^\eta)+\eta)R\frac{\partial\rho_f^\eta}{\partial t},$$

$$k(\phi^\eta)(1-\phi^\eta)\frac{\partial\rho_f^\eta}{\partial x}\mid_{x=0,x=1}=0, \rho_f^\eta\mid_{t=0}=\rho^0(x),$$

$$\phi^\eta\mid_{t=0}=\phi^0(x)$$

Для удобства индекс η будет временно опущен. Тогда уравнение для ϕ можно представить в виде

$$\frac{\partial(G(\phi)-\rho_f)}{\partial t}=\frac{a_1(\phi)}{a_2(\phi)}\rho_f,$$

$$G(\phi)=\int\limits_{\phi^0}^{\phi}\frac{1}{(1-s)Ra_2(s)}ds.$$

После интегрирования по времени получим

$$G(\phi)=\rho_f-\rho^0(x)+\int\limits_0^t\frac{a_1(\phi)}{a_2(\phi)}\rho_f dt.$$

Положим

$$a(\phi)=\frac{\phi}{1-\phi}, b(\phi)=k(\phi)(1-\phi)R, d(\phi)=\frac{a_1(\phi)}{a_2(\phi)}.$$

Система для ρ_f и ϕ принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\phi)\rho_f\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(b(\phi)\rho_f\frac{\partial\rho_f}{\partial x}\right),$$

$$G(\phi)=\rho_f-\rho^0(x)+\int\limits_0^t d(\phi)\rho_f dt.$$

Полагая $\rho(x,t)=\rho_f(x,t)-\rho^0(x)$, приходим к следующей задаче для (ρ,ϕ)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\phi)(\rho+\rho^0)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(b(\phi)(\rho+\rho^0)\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x}\right), \tag{11}$$

$$G(\phi)=\rho+\int\limits_0^t d(\phi)(\rho+\rho^0)dt, \tag{12}$$

$$\rho\mid_{t=0}=k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial\rho}{\partial x}\mid_{x=0,x=1}=0, \phi\mid_{t=0}=\phi^0(x). \tag{13}$$

Разрешимость задачи (11)–(13) устанавливается с помощью теоремы Тихонова-Шаудера о неподвижной точке: если V – компактное выпуклое замкнутое множество банахова пространства B и оператор Λ отображает V в себя непрерывно в норме B, то на V имеется неподвижная точка [6].

В качестве банахова пространства выберем пространство $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q_{t_0}})$, где β – любое число из отрезка $(0,\alpha)$, $\alpha\in[0,1)$. Положим

$$V=\{(\bar\phi(x,t),\bar\rho(x,t))\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{t_0}})|$$

$$\bar\rho\mid_{t=0}=\frac{\partial\bar\rho}{\partial x}\mid_{x=0,x=1}=0,\quad \bar\phi\mid_{t=0}=\phi^0(x),$$

$$0<\frac{m_1}{2}-\rho^0(x)\le\bar\rho(x,t)\le 2M_1-\rho^0(x)<\infty,$$

$$0<\frac{m_0}{2}\le\bar\phi(x,t)\le\frac{M_0+1}{2}<1,\quad (x,t)\in Q_{t_0}.$$

$$(|\bar\phi|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}},|\bar\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}})\le K_1,$$

$$(|\bar\phi|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}},|\bar\rho|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}})\le K_1+K_2\},$$

где K_1 – произвольная положительная постоянная, а положительная постоянная K_2 будет указана позже.

Построим оператор Λ, отображающий V в V. Пусть $\bar\phi,\bar\rho\in V$. Используя (11), определим функцию $\rho(x,t)$ как решение задачи (здесь и далее предполагается, что начальные и граничные условия согласованы):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\bar\phi)(\rho+\rho^0)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(b(\bar\phi)(\bar\rho+\rho^0)\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x}\right),\tag{14}$$

$$\rho\mid_{t=0}=\frac{\partial\rho_f}{\partial x}\mid_{x=0,x=1}=0.$$

Уравнение для $\rho(x,t)$ является равномерно параболическим. С учетом свойств $\bar\phi(x,t)$ и $\rho^0(x)$ задача (14) имеет классическое решение [7]. Кроме того, имеем следующую оценку:

$$|\frac{1}{a(\bar\phi)}\frac{\partial a(\bar\phi)}{\partial t}|\le C_0(m_0,M_0,K_1,K_2).$$

При дополнительном условии малости на величину интервала времени справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. При малых $t_0\le t_1$, $t_1=ln2/C_0(m_0,M_0,K_1,K_2)$ классическое решение задачи (14) удовлетворяет в Q_{t_0} неравенству $0<\frac{m_1}{2}\le\rho(x,t)+\rho^0(x)\le 2M_1<\infty$.

Доказательство. Полагая $U(x,t)=\rho(x,t)+\rho^0(x)$, $U_0(x,t)=\bar\rho(x,t)+\rho^0(x)$, задачу (14) представим в виде

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial}{\partial t}(a(\bar\phi)U)=\tfrac{\partial}{\partial x}(b(\bar\phi)U_0\tfrac{\partial U}{\partial x}),\\ &\tfrac{\partial U}{\partial x}\mid_{x=0,x=1}=0,\quad U\mid_{t=0}=\rho^0(x).\end{aligned}\tag{15}$$

Сначала покажем, что $U(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in Q_{t_0}$. В уравнении (15) сделаем замену $U(x,t)=-z(x,t)$. Тогда

$$z\frac{\partial a}{\partial t}+a\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(bU_0\frac{\partial z}{\partial t}).$$

Положим

$$z^{(0)}(x,t)=\max\{z,0\},$$

$$z^{(0)}(x,t)\mid_{t=0}=\max\{-\rho^0,0\}=0,$$

$$\sigma_\varepsilon(x,t)=z^{(0)}(x,t)(|z^{(0)}(x,t)|^2+\varepsilon)^{-1/2},\epsilon>0.$$

Уравнение для функции z умножим на σ_ε и результат проинтегрируем по Ω. Получим равенство

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\int_0^1 a(|z^{(0)}|^2+\varepsilon)^{1/2}dx+\int_0^1\frac{\partial a}{\partial t}(z\sigma_\varepsilon-(|z^{(0)}|^2+\\ &+\varepsilon)^{1/2})dx+\varepsilon\int_0^1\rho_0 b\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z^{(0)}}{\partial x}(|z^{(0)}|^2+\varepsilon)^{-3/2}dx=0.\end{aligned}\tag{16}$$

Положим

$$A^+(t)=\{x\in\Omega|\,z(x,t)>0\},$$

$$A^-(t)=\{x\in\Omega|\,z(x,t)\le 0\}.$$

Тогда

$$\int_0^1\frac{\partial a}{\partial t}(z\sigma_\varepsilon-(|z^{(0)}|^2+\varepsilon)^{1/2})dx=$$

$$=-\varepsilon\int_{A^+(t)}\frac{\partial a}{\partial t}(|z|^2+\varepsilon)^{-1/2}dx-\varepsilon^{1/2}\int_{A^-(t)}\frac{\partial a}{\partial t}dx,$$

$$\int_0^1 a(|z^{(0)}|^2+\varepsilon)^{1/2}dx=\int_{A^+(t)}a(|z|^2+\varepsilon)^{1/2}dx+$$

$$+\varepsilon^{1/2}\int_{A^-(t)}adx,$$

$$\int_0^1 a(|z^{(0)}|^2+\varepsilon)^{1/2}\mid_{t=0}dx=\varepsilon^{1/2}\int_0^1 a\mid_{t=0}dx,$$

$$\int_{A^+(t)}a(|z|^2+\varepsilon)^{1/2}dx\ge\int_{A^+(t)}a|z|dx=\int_0^1 az^{(0)}dx.$$

Проинтегрировав равенство (16) по времени, получим

$$\int_0^1 a(|z|^2+\varepsilon)^{1/2}dx+\varepsilon^{1/2}\int_0^1 adx+$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_{A^+(\tau)} \rho_0 b |\frac{\partial z^{(0)}}{\partial x}|^2 dx d\tau =$$

$$= \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_{A^+(\tau)} \frac{\partial a}{\partial \tau} (|z|^2 + \varepsilon)^{-1/2} dx d\tau +$$

$$+\varepsilon^{1/2} \int\limits_{A^-(\tau)} \frac{\partial a}{\partial \tau} dx d\tau + \varepsilon^{1/2} \int\limits_0^1 a \mid_{t=0} dx.$$

Следовательно,

$$\min_{0\le x\le 1} a \int\limits_0^1 z^{(0)} dx \le \int\limits_0^1 a z^{(0)} dx \le \varepsilon^{1/2} \int\limits_{A^-(t)} a dx +$$

$$+\varepsilon^{1/2} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |\frac{\partial a}{\partial \tau}| dx d\tau + \varepsilon^{1/2} \int\limits_0^1 a \mid_{t=0} dx.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим, что $z^{(0)} = 0$, т.е. $U \ge 0$.

Уравнение (15), после умножения на $U^{l-1}(x,t), l > 2$, можно представить в виде:

$$\frac{1}{l} \frac{\partial (aU^l)}{\partial t} + (l-1) b U_0 U^{l-2} (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2 + \frac{l-1}{l} U^l \frac{\partial a}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (b U_0 U^{l-1} \frac{\partial U}{\partial x}).$$

Тогда

$$\frac{1}{l} \frac{d}{dt} \int\limits_0^1 a U^l dx \le \frac{l-1}{l} \max_{0\le x\le 1} |\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t}| \int\limits_0^1 a U^l dx.$$

Следовательно,

$$y'(t) \le \frac{l-1}{l} \max_{0\le x\le 1} |\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t}| y(t),$$

$$y^l(t) = \int\limits_0^1 (a^{1/l} \rho)^l dx,$$

$$y(t) \le y(0) \exp\{\frac{l-1}{l} \int\limits_0^t \max_{0\le x\le 1} |\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t}| d\tau\}.$$

После предельного перехода при $l \to \infty$, получим

$$\max_{0\le x\le 1} U(x,t) \le \max_{0\le x\le 1} \rho^0(x) \exp\{\int\limits_0^t \max_{0\le x\le 1} |\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t}| d\tau\}.$$

Учитывая, что $\max\limits_{0\le x\le 1} \rho^0(x) \le M_1$, и выбирая t из условия $t \le t_1$, $\exp\{\int\limits_0^{t_1} \max\limits_{0\le x\le 1} |\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t}| d\tau\} \le 2$, приходим к утверждению леммы об оценке сверху. Для получения оценки снизу уравнение (15) представим в виде $(z(x,t) = 1/U(x,t))$

$$\frac{1}{l} \frac{\partial (a z^l)}{\partial t} + (l+1) b U_0 z^{l-2} (\frac{\partial z}{\partial x})^2 - \frac{l+1}{l} z^l \frac{\partial a}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (b U_0 z^{l-1} \frac{\partial z}{\partial x}).$$

Откуда сначала получим неравенство

$$\frac{1}{l} \frac{d}{dt} \int\limits_0^1 a z^l dx \le \frac{l+1}{l} \max_{0\le x\le 1} |\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t}| \int\limits_0^1 a z^l dx,$$

а затем и оценку

$$\max_{0\le x\le 1} \frac{1}{U(x,t)} \le$$

$$\le \max_{0\le x\le 1} \frac{1}{\rho^0(x)} \exp\{\int\limits_0^t \max_{0\le x\le 1} |\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t}| d\tau\} \le \frac{2}{m_1}.$$

Лемма 1 доказана.

Далее, используя шаудеровские оценки, покажем, что функция ρ обладает той же гладкостью, что и функция $\bar{\rho}$. Для этого уравнение (14) представим в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{b(\bar{\phi})(\bar{\rho}+\rho^0)}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial b(\bar{\phi})(\bar{\rho}+\rho^0)}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial a(\bar{\phi})}{\partial x} \rho + \frac{1}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial}{\partial x} \Big(b(\bar{\phi})(\bar{\rho} + \qquad (17)$$

$$+ \rho^0) \frac{\partial \rho^0}{\partial x} - \frac{1}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial a(\bar{\phi}) \phi^0}{\partial x},$$

где эллиптический оператор L имеет вид

$$L = \frac{b(\bar{\phi})(\bar{\rho}+\rho^0)}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial b(\bar{\phi})(\bar{\rho}+\rho^0)}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial a(\bar{\phi})}{\partial x} \rho,$$

а правая часть f равна

$$f = \frac{1}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial}{\partial x} \left(b(\bar{\phi})(\bar{\rho}+\rho^0) \frac{\partial \rho^0}{\partial x} \right) - \frac{1}{a(\bar{\phi})} \frac{\partial a(\bar{\phi}) \phi^0}{\partial x}.$$

Поскольку $\bar{\phi}, \bar{\rho}, \rho^0 \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_{t_0})$, то коэффициенты оператора L и правая часть f есть функции класса $C^{\alpha, \alpha/2}(Q_{t_0})$.

Тогда получаем, что [5]

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \le C_1 \left(|\rho^0|_{2+\alpha,\Omega} + |\bar{\phi}|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}} \right),$$

где постоянная C_1 зависит только от коэффициентов оператора L.

Выберем постоянную K_2 таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \le K_1 + K_2$.

Кроме того, из уравнения (17) после интегрирования по времени от 0 до t получим, что $|\rho(x,t)| \le |\int_0^t (L(\rho)+f)dt| \le C_2 t$ с некоторой постоянной постоянной C_2, зависящей от K_1, K_2.

После этого, используя интерполяционное неравенство Ниренберга-Гальярдо [1, с. 35], получим

$$|\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le C_3 |\rho|^c_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t0}} |\rho|^{1-c}_{0,Q_{t0}},$$

$$c = (1+\alpha)(2+\alpha)^{-1}.$$

Таким образом, для всех $t \le t_0(K_1, K_2)$ справедлива оценка:

$$|\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t0}} \le C_3 (C_2(K_1+K_2))^c (t_0)^{1-c}$$

и выберем t_0 так, чтобы

$$|\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t0}} \le K_1.$$

Лемма 2. В условиях теоремы 1 для решения задачи (14) выполнено неравенство $\max\limits_{0\le x\le 1} |\rho_f - \rho^0| \le C_6 t$, где C_6 зависит от m_0, M_0, K_1, K_2.

Доказательство. Уравнение (14) представим в виде

$$a\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial a}{\partial t} + \rho^0 \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(b(\bar{\rho}+\rho^0)\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(b(\bar{\rho}+\rho^0)\frac{\partial \rho^0}{\partial x}\right)$$

Умножим это уравнение на $\rho^{2l-1}, l > 1$ и полученное равенство проинтегрируем по x:

$$\frac{1}{2l}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho^{2l} a dx + \int_0^1 b(2l-1)(\bar{\rho}+\rho^0)\rho^{2l-2}(\frac{\partial \rho}{\partial x})^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{2l-1}{2l}\rho^{2l}\frac{\partial a}{\partial t}dx - \int_0^1 b(\bar{\rho}+\rho^0)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^{2l-1}\frac{\partial \rho^0}{\partial x}dx.$$

После некоторых преобразований выводим неравенство

$$\frac{1}{2l}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho^{2l} a dx \le \frac{2l-1}{2l}\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}\right| \int_0^1 \rho^{2l} a dx +$$
$$+ \int_0^1 \left| b(\bar{\rho}+\rho^0)\frac{\partial \rho^0}{\partial x}\right|^2 \rho^{2l-2} dx.$$

Обозначим последнее слагаемое за I. Имеем

$$I \le \max_{0\le x\le 1}(1/a)^{1/2l}\left(\int_0^1 a\rho^{2l}dx\right)^{(l-1)/l} \cdot$$

$$\cdot \left(\left| b(\bar{\rho}+\rho^0)\frac{\partial \rho^0}{\partial x}\right|^{2l}\right)^{1/l}.$$

Положим $y^2 = \int\limits_0^1 (a\rho^{2l})^{1/l}dx$. Тогда

$$y^{2l-1}y' \le \frac{2l-1}{2l}\max_{(x,t)\in Q_t}\left|\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}\right| y^{2l} + C_4 y^{2l-2},$$

где $C_4 = const$.

Преобразовывая это неравенство, получим

$$w \le C_5 \frac{1}{A}(e^{At}-1),$$

где $C_5 = C_4/2, w = y^2$, $A = \frac{2l-1}{l}\max\limits_{(x,t)\in Q_t}\left|\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}\right|$.

Заметим, что имеет место очевидное неравенство

$$e^{At} - 1 \le C_6 t,$$

где $C_6 = Ae^{AT}$.

Поэтому переходя к пределу по $l \longrightarrow \infty$ в неравенстве для ω, получим

$$\max_{0\le x\le 1}|\rho_f - \rho^0| \le C_6 t.$$

Лемма 2 доказана.

Установим физический принцип максимума для ϕ. Используя найденное ρ и $\bar{\phi}$, найдем функцию $\phi(x,t)$ как решение задачи:

$$G(\phi) = \rho + \int_0^t \frac{a_1(\bar{\phi})}{a_2(\bar{\phi})}(\rho+\rho^0)dt. \qquad (18)$$

Заметим, что существует постоянная C_7, зависящая от m_0, M_0, M_1, K_1, K_2, такая, что $|G(\phi)| \le C_7 t$.

Лемма 3. При $t_0 \le \min(t_1, t_2), t_2 = \min\{\frac{1}{2C_7}, \frac{m_0}{2C_8}, \frac{1-M_0}{2C_8}\}, C_8 = 2C_7(1-m_0)(R\beta_\phi + 1)$ классическое решение задачи (18) удовлетворяет в Q_{t_0} неравенству $0 < \frac{m_0}{2} \le \phi \le \frac{M_0+1}{2} < 1$.

Доказательство вытекает из представления (18) и свойств функции $G(\phi)$.

Дифференциальные свойства ϕ, входящие в определение пространства V, следуют из представления (18).

Таким образом, оператор Λ отображает множество V в себя при достаточно малых t.

Установим непрерывность оператора Λ в гельдеровских нормах.

Пусть $\rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2, \bar\rho_1, \bar\rho_2, \bar\phi_1, \bar\phi_2$ – попарно различные, но близкие в гельдеровских нормах значения соответственно функций $\rho, \phi, \bar\rho, \bar\phi$.

Рассмотрим уравнение (14) для попарно различных функций с индексами 1 и 2 ($i = 1, 2$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\bar\phi_i)(\rho_i + \rho^0)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(b(\bar\phi_i)(\bar\rho_i + \rho^0)\frac{\partial(\rho_i + \rho^0)}{\partial x}\right),$$

Положим $\rho = \rho_1 - \rho_2, \phi = \phi_1 - \phi_2, \bar\rho = \bar\rho_1 - \bar\rho_2, \bar\phi = \bar\phi_1 - \bar\phi_2$. Функции ρ и ϕ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\bar\phi_1)(\rho_1 + \rho^0) - a(\bar\phi_2)(\rho_2 + \rho^0)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(b(\bar\phi_1)(\bar\rho_1 + \rho^0)\frac{\partial(\rho_1 + \rho^0)}{\partial x} -\right.$$
$$\left. - b(\bar\phi_2)(\bar\rho_2 + \rho^0)\frac{\partial(\rho_2 + \rho^0)}{\partial x}\right).$$

Чтобы воспользоваться шаудеровскими оценками, представим это уравнение в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L_1\rho + F_1,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}|_{x=0,x=1} = 0, \rho|_{t=0} = 0,$$

где L_1 – эллиптический оператор

$$L_1\rho = \frac{b(\bar\phi)(\bar\rho_1 + \rho^0)}{a(\bar\phi)}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{1}{a(\bar\phi 1)}\frac{\partial b(\bar\phi_1)(\bar\rho_1 + \rho^0)}{\partial x}\rho,$$

а F_1 – правая часть

$$F_1 = \frac{1}{a(\bar\phi_1)}\frac{\partial(\rho^0 + \rho_2)(a(\bar\phi_1) - a(\bar\phi_2))}{\partial t} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\rho_2 + \rho^0)}{\partial x}\left(b(\bar\phi_1)\bar\rho + \bar\rho_2(b(\bar\phi_1) - b(\bar\phi_2)) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \rho^0(b(\bar\phi_1) - b(\bar\phi_2)\right)\right).$$

Используя шаудеровские оценки, получим:

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \le C_8(|\bar\phi|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} + \quad (19)$$
$$|\bar\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}}).$$

Для $G(\phi)$ имеем:

$$G(\phi_i) = \rho_i + \int_0^t \frac{a_1(\bar\phi_i)}{a_2(\bar\phi_i)}(\rho_i + \rho^0)dt.$$

Рассмотрим разность:

$$G(\phi_1) - G(\phi_2) = \rho + \int_0^t \frac{a_1(\bar\phi_1)}{a_2(\bar\phi_1)}(\rho_1 + \rho^0) - \frac{a_1(\bar\phi_2)}{a_2(\bar\phi_2)}(\rho_2 +$$
$$+\rho^0)dt = \rho + \int_0^t \frac{a_1(\bar\phi_1)}{a_2(\bar\phi_1)}\rho +$$
$$+(\rho_2 + \rho^0)\left(\frac{a_1(\bar\phi_1)}{a_2(\bar\phi_1)} - \frac{a_1(\bar\phi_2)}{a_2(\bar\phi_2)}\right)dt.$$

Тогда

$$|G(\phi_1) - G(\phi_2)| \le$$
$$\le C_9(m_0, M_0, M_1, K_1)(|\bar\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} + \quad (20)$$
$$+|\bar\phi|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}}).$$

Отсюда в силу непрерывности $G(\phi)$ аналогичное неравенство верно для $\phi_1 - \phi_2$.

Оценки (19), (20) гарантируют непрерывность оператора.

Таким образом, оператор Λ обладает следующими свойствами: отображает компактное выпуклое замкнутое множество банахова пространства в себя непрерывно в норме этого пространства. Следовательно, на V имеется неподвижная точка, т.е. для любого $\eta > 0$ существует решение (ϕ^η, ρ^η).

В силу леммы 3 имеем неравенство $\frac{m_0}{2} \le \phi^\eta \le \frac{M_0+1}{2}$, поэтому функция $a_2(\phi^\eta) + \eta > \left(\frac{m_0}{2}\right)^\beta \beta_\phi$ равномерно по η. Тогда из равенства (18) (после дифференцирования по времени) следует равномерная по η ограниченность производной ϕ^η_t. После этого можно осуществить предельный переход в задаче A_η и получить утверждение теоремы 1.

2.3. Единственность

Теорема 2. Пусть $a_1 = 0$. Тогда классическое решение задачи (5)–(10) единственно.

Доказательство. Пусть существуют два различных решения задачи $\rho_{fi}, \phi_i, i = 1, 2$ (5)–(9). Обозначим разность двух различных решений $\rho = \rho_{f1} - \rho_{f2}, \phi = \phi_1 - \phi_2$. С учетом (11), (12) эти функции удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}(A_1\rho + A_2\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(B_3\frac{\partial\rho}{\partial x} + B_1\rho + B_2\phi\right), \quad (21)$$

$$\rho = D_1 \phi,$$

где

$$A_1 = 2a(\phi_1), \quad A_2 = 2\frac{\rho_2}{\phi_1 - \phi_2}(a(\phi_1) - a(\phi_2)),$$

$$B_1 = b(\phi_1)\frac{\partial(\rho_1 + \rho_2)}{\partial x},$$

$$B_2 = \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)^2 \frac{b(\phi_1) - b(\phi_2)}{\phi_1 - \phi_2},$$

$$B_3 = b(\phi_1)(\rho_1 + \rho_2), \quad D_1 = (G(\phi_1) - G(\phi_2))/\phi.$$

Уравнение (21) умножим на функцию F, обладающую свойствами $F(x,T) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}|_{x=0,x=1} = 0$. После некоторых преобразований получим

$$\int\limits_{Q_t} \phi \left((A_1 D_1 + A_2)\frac{\partial F}{\partial t} - (B_1 D_1 + B_2)\frac{\partial F}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + B_3 D_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dxdt = 0. \right.$$

Для F рассматривается задача

$$(A_1 D_1 + A_2)\frac{\partial F}{\partial t} - (B_1 D_1 + B_2)\frac{\partial F}{\partial x} +$$

$$+ B_3 D_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = h,$$

$$F(x,T) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}|_{x=0,x=1} = 0$$

где $h(x,t) \in C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ – произвольная непрерывная функция, $(B_1 D_1 + B_2) > 0$, $(A_1 D_1 + A_2) > 0$.

Данная задача разрешима [7] и, следовательно, $\phi = 0$, $\rho = 0$. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. Monercy C., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of geophisical research. – 2007. – Vol. 112.
2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. – 1998. – Vol. 11.
3. Папин А.А., Токарева М.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе // Известия АлтГУ. – 2010. – №1 (65).
4. Akhmerova I.G., Papin A.A. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87, №2.
5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.
6. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – М., 1969.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.