

УДК 532.517

*О.Н. Гончарова, О.А. Кондратенко***Деформация вязкого теплопроводного слоя в условиях дополнительных касательных напряжений\****O.N. Goncharova, O.A. Kondratenko***Deformation of a Viscous Heat Conducting Liquid Layer under Conditions of the Additional Tangential Stresses**

В работе исследуется трехмерная нестационарная задача о движении бесконечного слоя несжимаемой, вязкой, теплопроводной жидкости со свободными границами в условиях невесомости. Свободные границы подвержены действию дополнительных касательных напряжений со стороны внешней газовой среды, согласованных с изменяющимся во времени градиентом температуры. Построены точные решения, описывающие движение жидкости в слое и распределение температуры в нем, исследованы условия, приводящие к различному поведению свободного слоя. Построенные решения позволяют изучить вопрос об учете влияния дополнительных касательных напряжений на динамику и теплообмен в жидкости.

**Ключевые слова:** точное решение, деформация слоя, свободная граница, теплопроводная жидкость, касательные напряжения.

In the present paper a three-dimensional non-stationary problem of motion of a layer of a viscous, incompressible, heat-conducting liquid with free boundaries is studied under conditions of weightlessness. The free boundaries are subjected to action of the additional tangential stresses created by an external gas medium and coupled with a time-dependent temperature gradient. The exact solutions characterized a liquid motion and a temperature distribution in a layer are constructed. The conditions, which lead to a various behavior of a free layer, are described. The examples of the constructed solutions allow to investigate the effects of the tangential stresses on the dynamics and heat transfer process in the liquid.

**Key words:** exact solutions, layer deformation, free boundary, heat-conducting liquid, tangential stresses.

**1. Введение.** Задачи о нестационарном течении жидкости в областях со свободными границами достаточно сложны для исследований [1]. В случае, когда газовая фаза является источником дополнительных касательных напряжений на свободной поверхности жидкости, необходимы исследования взаимодействия различных механизмов движения жидкости [2, 3]. Неустановившиеся движения плоских слоев со свободными границами изучались в работах [4–12] (см. также цитированную в [7–9] литературу). В [5] изучено точное решение для нестационарного плоского слоя идеальной жидкости со свободными границами, утончающегося со временем, проанализирована устойчивость относительно малых возмущений, дана физическая интерпретация решения. Групповая природа по-

добных решений исследована в [6]. Аналитическое построение и экспериментальное подтверждение достаточно простых решений, описывающих невязкие, безвихревые течения со свободными поверхностями, проведены в [13]. В.В. Пухначев [7, 8] представил математические модели деформации вязкого слоя жидкости термодинамическими силами в плоском и трехмерном случае, исследовал разрешимость поставленных начально-краевых задач. Решения специального вида построены в [7–9] и представляют собой частично инвариантные решения системы уравнений Навье-Стокса. При этом считалось, что распределение температуры задано на свободных границах слоя и представляет собой квадратичную зависимость от продольных координат.

Свободные границы остаются параллель-

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00007) и при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт 14.740.11.0355).

ными плоскостями во все моменты времени, расстояние между ними меняется, а задача сводится в итоге к решению системы двух интегро-дифференциальных уравнений. Нестационарная двумерная задача динамики теплопроводного слоя вязкой жидкости изучена в [3]. Свободные границы подвергаются действию дополнительных касательных напряжений со стороны внешней среды. Построенные в [3] точные решения характеризуются линейной зависимостью продольной компоненты скорости от продольной координаты. Численно исследуются условия растекания и разбухания слоя, возможные механизмы контроля деформации. Предлагается численный алгоритм нахождения распределения температуры в слое.

Цель данной работы – построение точных решений уравнений, описывающих движение жидкости в слое и распределение температуры в нем в трехмерном случае, а также моделирование условий растекания и разбухания бесконечного слоя теплопроводной жидкости. Проведенные исследования позволяют моделировать движение слоя и теплообмен в жидкости в условиях невесомости в случае, когда на свободных границах учитывается касательное напряжение, индуцированное внешней средой. Динамическое условие на свободных границах диктует выполнение своего рода условия согласования касательных напряжений со стороны внешней газовой среды и создаваемого на границе градиента температуры. Тем самым задача о деформации слоя теплопроводной жидкости со свободными границами решается в полной постановке.

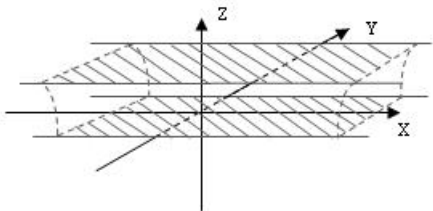


Рис. 1. Слой жидкости

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечный плоскопараллельный слой  $\Omega$

$$\Omega = \{(x, y, z) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -Z(t) < z < Z(t)\}$$

несжимаемой, вязкой, теплопроводной жидкости (см. рис. 1), находящийся в условиях невесомости ( $\mathbf{g} = 0$ ). Пусть система координат

выбрана таким образом, что оси  $Ox, Oy$  направлены вдоль свободных поверхностей

$$\Gamma_- = \{(x, y, z) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, z = -Z(t)\},$$

$$\Gamma_+ = \{(x, y, z) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, z = Z(t)\},$$

а ось  $Oz$  – перпендикулярно к ним.

Пусть свободные границы  $\Gamma_-, \Gamma_+$  остаются недеформируемыми и параллельными во все последующие моменты времени. Единичные векторы внешней нормали и касательные векторы к свободным границам  $\Gamma_{\pm}$  определяются соответственно следующим образом:  $\mathbf{n} = (0, 0, \pm 1)$  и  $\mathbf{s}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{s}_2 = (0, 1, 0)$ .

Для изучения процессов динамики и теплообмена жидкости в слое  $\Omega$  при невесомости будем использовать уравнения конвекции, записанные в скалярном виде [1]:

$$\begin{aligned} u_t + u u_x + v u_y + w u_z &= -p_x + \frac{1}{Re} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ v_t + u v_x + v v_y + w v_z &= -p_y + \frac{1}{Re} (v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}), \\ w_t + u w_x + v w_y + w w_z &= -p_z + \frac{1}{Re} (w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}), \\ u_x + v_y + w_z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} T_t + u T_x + v T_y + w T_z &= \\ \frac{1}{RePr} (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости жидкости  $\mathbf{v}$ ;  $p$  – давление;  $T$  – температура жидкости;  $Pr = \frac{\nu}{\chi}$  число Прандтля;  $Re = \frac{v_* l}{\nu}$  число Рейнольдса. При этом  $l$  – характерный размер (например, толщина слоя в момент времени  $t = 0$ );  $v_*$  – характерная скорость;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\chi$  – коэффициент температуропроводности.

На свободных границах  $\Gamma_{\pm}$  должны быть выполнены следующие кинематические и динамические условия [1]:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \pm w|_{z=\pm Z(t)} = \frac{dZ}{dt}, \quad (3)$$

$$-p + \frac{2}{Re} \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}) \mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)} = -P_g, \quad (4)$$

$$2\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)} = \tau_1(x, y, t) - \frac{Ma}{RePr} T_x,$$

$$2\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)} = \tau_2(x, y, t) - \frac{Ma}{RePr} T_y. \quad (5)$$

Здесь  $Ma = \frac{\sigma_T T_* l}{\rho \nu \chi}$  – число Марангони;  $T_*$  – характерная температура (или характерный перепад температуры);  $\sigma_T$  – температурный коэффициент поверхностного натяжения ( $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$ );  $\rho$  – плотность жидкости;  $P_g$  – известное (внешнее) давление;  $\tau_1(x, y, t)$ ,  $\tau_2(x, y, t)$  – касательные напряжения, индуцируемые внешней средой;  $D(\mathbf{v})$  – тензор скоростей деформации ( $D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ , если  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ).

Для замыкания постановки задачи следует задать также начальные условия, определяющие состояние слоя (см. начальное состояние, определенное ниже условиями (13), (14), (17), (18)).

Решение поставленной задачи предполагает нахождение области  $\Omega$ , скорости  $\mathbf{v}$ , давления  $p$  и температуры  $T$  жидкости, которые удовлетворяют системе уравнений (1), (2), а также начальным (13), (14), (17), (18) и граничным условиям (3)–(5), (19), (20).

**3. Построение решения.** Построим решение сформулированной задачи в слое  $\Omega$  при  $0 < t < t_{end}$  следующим образом. Компоненты скорости  $\mathbf{v}$  будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= (f(t) + g(t))x, \\ v(x, y, z, t) &= (f(t) - g(t))y, \\ w(x, y, z, t) &= -2f(t)z. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что уравнение неразрывности из системы (1) удовлетворяется автоматически. Потребуем, чтобы выполнялось  $p_x = 0, p_y = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} (f_t(t) + g_t(t))x + (f(t) + g(t))^2 x &= 0, \\ (f_t(t) - g_t(t))x + (f(t) - g(t))^2 x &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Если функции  $f(t)$  и  $g(t)$  найдены, то давление  $p$  можно получить из третьего уравнения системы (1)

$$-2f_t(t)z + 4f^2(t)z = -p_z$$

с помощью граничного условия (4).

Введем дополнительные обозначения:

$$\varphi(t) = f(t) + g(t), \psi(t) = f(t) - g(t).$$

Исходя из (7) получим:

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0}{1 + \varphi_0 t}, \quad \psi(t) = \frac{\psi_0}{1 + \psi_0 t}. \quad (8)$$

Здесь  $\varphi_0, \psi_0$  будут определяться из начальных условий (см. (13), (14)). В итоге компоненты вектора скорости (6) определяются выражениями:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{\varphi_0}{1 + \varphi_0 t} x, \\ v(x, y, z, t) &= \frac{\psi_0}{1 + \psi_0 t} y, \\ w(x, y, z, t) &= -\left(\frac{\varphi_0}{1 + \varphi_0 t} + \frac{\psi_0}{1 + \psi_0 t}\right) z. \end{aligned} \quad (9)$$

Давление в жидкости зависит от вертикальной координаты  $z$  и времени  $t$  следующим образом:

$$p = -\frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_0^2}{(1 + \varphi_0 t)^2} + \frac{\psi_0^2}{(1 + \psi_0 t)^2} + \left( \frac{\varphi_0}{1 + \varphi_0 t} + \frac{\psi_0}{1 + \psi_0 t} \right)^2 z^2 + P(t), \quad (10)$$

где функция  $P(t)$  будет определена ниже.

Кинематическое условие (3) на свободной поверхности  $\Gamma_+$  позволяет найти  $Z(t)$ :

$$Z(t) = \frac{Z_0}{(1 + \varphi_0 t)(1 + \psi_0 t)}. \quad (11)$$

Здесь  $Z_0 = Z(0) > 0$ . Заметим, что тем самым будет определена и граница  $\Gamma_-$  ( $z = -Z(t)$ ).

Поскольку на свободной поверхности  $z = Z(t)$  имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n} = \frac{\partial w}{\partial z} = -2f(t),$$

$$\mathbf{s}_1 \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\mathbf{s}_2 \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0,$$

то выполняется (см. (10)):

$$\begin{aligned} P(t) &= P_g - \frac{2}{Re} \left( \frac{\varphi_0}{1 + \varphi_0 t} + \frac{\psi_0}{1 + \psi_0 t} \right) + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_0^2}{(1 + \varphi_0 t)^2} + \frac{\psi_0^2}{(1 + \psi_0 t)^2} + \left( \frac{\varphi_0}{1 + \varphi_0 t} + \frac{\psi_0}{1 + \psi_0 t} \right)^2 \right) Z^2(t). \end{aligned}$$

Выполнение динамических условий (5) ведет к системе двух соотношений:

$$\begin{aligned}\tau_1(x, y, t) &= \frac{Ma}{RePr} T_x|_{z=\pm Z(t)}, \\ \tau_2(x, y, t) &= \frac{Ma}{RePr} T_y|_{z=\pm Z(t)},\end{aligned}\quad (12)$$

которые следует понимать как согласование на свободных границах  $\Gamma_{\pm}$  дополнительных тангенциальных напряжений  $\tau_1(x, y, t)$ ,  $\tau_2(x, y, t)$  и продольных градиентов температуры.

Итак, пусть в начальный момент времени имеется бесконечный слой жидкости шириной  $2Z_0$

$$\Omega_0 = \{(x, z) : -\infty < x < +\infty, -Z_0 < z < Z_0, Z_0 > 0, Z_0 = const\},$$

движущийся по закону, определяемому соотношениями

$$\begin{aligned}u|_{t=0} &= \varphi_0 x, \quad v|_{t=0} = \psi_0 y, \quad w|_{t=0} = -(\varphi_0 + \psi_0)z, \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad Z(0) = Z_0.\end{aligned}\quad (13)$$

**4. Моделирование распределения температуры в слое.** Решение поставленной задачи (1)–(5), (13), (14), (17)–(20) предполагает нахождение температуры  $T$  жидкости, удовлетворяющей уравнению (2). Пусть распределение температуры линейно зависит от пространственных координат и времени следующим образом:

$$T = A(t)x + B(t)y + C(t)z + D(t). \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{A_0}{\varphi_0 t + 1}, \\ B(t) &= \frac{B_0}{\psi_0 t + 1}, \\ C(t) &= C_0(\varphi_0 t + 1)(\psi_0 t + 1), \\ D(t) &= D_0,\end{aligned}\quad (16)$$

где постоянные  $A_0, B_0, C_0, D_0$  определяются из начального условия

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z) = A_0 x + B_0 y + C_0 z + D_0. \quad (17)$$

Заметим, что на свободных границах заданы касательные напряжения  $\tau_{10}, \tau_{20}$  в начальный момент времени  $t = 0$ , а потому должно выполняться

$$A_0 = \frac{RePr}{Ma} \tau_{10}, \quad B_0 = \frac{RePr}{Ma} \tau_{20}. \quad (18)$$

Примем, что на границах  $\Gamma_{\pm}$  задано распределение температуры в виде

$$T^+(x, y, t) = A(t)x + B(t)y + C_0 Z_0 + D_0 \quad (19)$$

при  $z = Z(t)$  и в виде

$$T^-(x, y, t) = A(t)x + B(t)y - C_0 Z_0 + D_0 \quad (20)$$

при  $z = -Z(t)$ . Условия (19), (20) можно записать и следующим образом:

$$T^+(x, y, t) = A(t)x + B(t)y + \Theta^+,$$

$$T^-(x, y, t) = A(t)x + B(t)y + \Theta^-.$$

Тем самым при известном поперечном перепаде температуры  $\Delta\Theta = \Theta^+ - \Theta^-$  следует положить  $C_0 = \frac{\Delta\Theta}{2Z_0}$ ,  $D_0 = \frac{\Theta^+ + \Theta^-}{2}$ . Отметим, что начальное и граничные распределения температуры согласованы между собой. Действительно,

$$T^+|_{t=0} = T_0|_{z=Z_0} = A_0 x + B_0 y + C_0 Z_0 + D_0,$$

$$T^-|_{t=0} = T_0|_{z=-Z_0} = A_0 x + B_0 y - C_0 Z_0 + D_0.$$

**5. Примеры растекания и разбухания теплопроводного свободного слоя.** Решения вида (9), (10), (15), (16) можно интерпретировать как растекание или разбухание теплопроводного слоя вязкой жидкости с границами (11), находящегося в начальный момент времени в состоянии, определяемом (13), (14), (17), (18). Касательные напряжения

$$\tau_1(x, y, t) = \frac{Ma}{RePr} \frac{A_0}{\varphi_0 t + 1},$$

$$\tau_2(x, y, t) = \frac{Ma}{RePr} \frac{B_0}{\psi_0 t + 1}$$

на границе могут быть как величиной положительной, так и отрицательной, что определяется знаками  $\varphi_0 > 0, \psi_0 > 0$  (см. ниже) и  $A_0, B_0$  (или  $\tau_{10}, \tau_{20}$  ввиду (18)). Температура  $T$  на границах согласована с величиной касательного напряжения согласно (12).

Для исследования динамики слоя  $\Omega$  рассмотрим  $\frac{dZ}{dt} = -Z(t) \{\psi(t) + \varphi(t)\}$ . В силу положительности  $Z(t)$  должно выполняться одно из условий:  $\begin{cases} \psi_0 t + 1 > 0 \\ \varphi_0 t + 1 > 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} \psi_0 t + 1 < 0 \\ \varphi_0 t + 1 < 0 \end{cases}$  (см. (11)). При выполнении условия  $\frac{dZ}{dt} > 0$  имеет место разбухание слоя, в случае  $\frac{dZ}{dt} < 0$  имеем растекание слоя.

1. Пусть  $\varphi_0 > 0, \psi_0 > 0$  и слой в начальный момент времени растекается. Тогда продолжится растекание жидкого слоя за бесконечное время. На рисунке 2 изображено изменение свободной границы  $Z(t)$ . Заметим, что все величины на рисунках приведены в безразмерном виде.

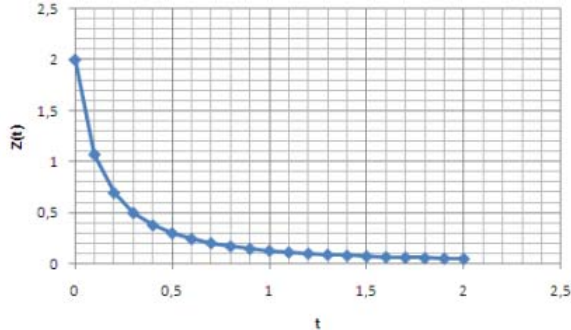


Рис. 2. Изменение свободной границы  $Z(t)$  за промежуток времени  $[0, 2]$ . Начальные условия:  $u|_{t=0} = \varphi_0 x, v|_{t=0} = \psi_0 y, w|_{t=0} = -(\varphi_0 + \psi_0)z, \varphi_0 = 1, \psi_0 = 7; Z_0 = 2$

2. Если  $\psi_0 < 0, \varphi_0 < 0$  и слой в начальный момент разбухает, что обеспечивается условиями (13), (14), то продолжится разбухание жидкого слоя за конечный промежуток времени  $t \in (0, t^*), t^* = \min(t_1^*, t_2^*)$ , где  $t_1^* = -\frac{1}{\psi_0}, t_2^* = -\frac{1}{\varphi_0}$ . На рисунке 3 изображено изменение свободной границы  $Z(t)$ .

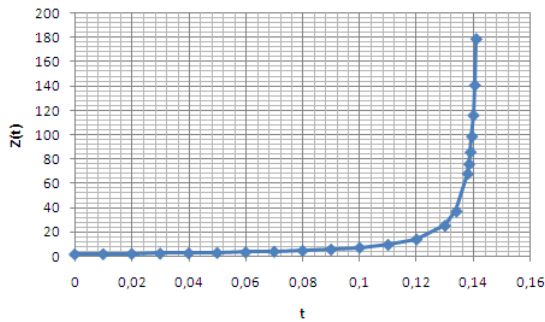


Рис. 3. Изменение свободной границы  $Z(t)$  за промежуток времени  $[0, 0.14]$ . Начальные условия:  $u|_{t=0} = \varphi_0 x, v|_{t=0} = \psi_0 y, w|_{t=0} = -(\varphi_0 + \psi_0)z; \varphi_0 = -1, \psi_0 = -7; Z_0 = 2$

Пусть в начальный момент времени жидкость, подобная этанолу ( $Ma = 7800, Pr = 17, Re = 1$ ), прогрета по закону (17), свободный слой подвержен действию касательных напряжений  $\tau_{10}, \tau_{20}$  (см. (18)) и растекается. Коэффициенты  $A_0, B_0, C_0, D_0$  и параметры  $\varphi_0, \psi_0$

полагаются равными:  $A_0 = 1, B_0 = 3, C_0 = 2, D_0 = 1, \varphi_0 = 2, \psi_0 = 3$ . При этом  $\tau_{10} = 459, \tau_{20} = 1376$ , а начальное положение свободной границы определяется как  $Z_0 = 1$ . Здесь рассматривается модельная ситуация, вместе с тем реальные характерные значения температуры и дополнительных касательных напряжений, диктующие выбор значений вышеназванных коэффициентов, могут быть найдены в [14]. Растекание жидкого слоя, определяемое по формулам (9), продолжится. Состояние слоя, соответствующее моменту времени  $t = 0.1$ , приведено на рисунке 4. В сечении слоя плоскостью  $x = 0$  в рассматриваемый момент времени распределение температуры, как функции координат  $y$  и  $z$ , приведено на рисунке 5, а момент времени  $t = 1$  – на рисунке 6.

Если в начальный момент времени жидкость находится в состоянии, описываемом формулами (13), (14), (17), (18), значения параметров  $A_0, B_0, C_0, D_0$ , определяющих начальную температуру слоя, остаются прежними:  $A_0 = 1, B_0 = 3, C_0 = 2, D_0 = 1$ , положение свободной границы также определяется как  $Z_0 = 1$ , а  $\varphi_0 = -\frac{1}{5}, \psi_0 = -\frac{1}{4}$ , то жидкий слой разбухает. В моменты времени  $t = 0.1$  (рис. 7) и  $t = 1$  (рис. 9) разбухание слоя жидкости продолжится. В сечении слоя плоскостью  $x = 0$  в момент времени  $t = 0.1$  и  $t = 1$  распределение температуры приведено на рисунках 8, 10.

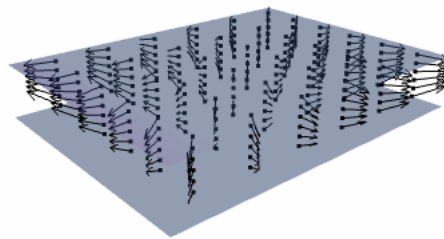


Рис. 4. Растекание слоя жидкости ( $t = 0.1$ ).

Начальные условия:  
 $u|_{t=0} = \varphi_0 x, v|_{t=0} = \psi_0 y, w|_{t=0} = -(\varphi_0 + \psi_0)z;$   
 $\varphi_0 = 2, \psi_0 = 3; Z_0 = 1$

Рисунки 4, 5, 7, 8 позволяют сравнить динамику и распределение температуры в слое при разбухании (рис. 7, 8) и растекании (рис. 4, 5) в момент времени  $t = 0.1$  в случае, когда начальное распределение температуры одинаково.

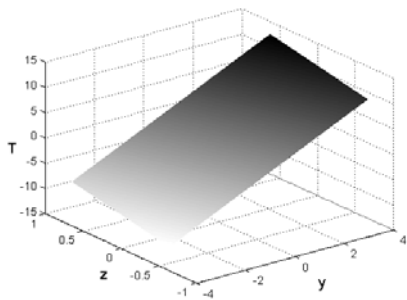


Рис. 5. Растекание слоя жидкости ( $t = 0.1$ ).  
 Распределение температуры в сечении  $x = 0$ .  
 Начальные условия:  $T_0 = A_0x + B_0y + C_0z + D_0$ ;  
 $A_0 = 1, B_0 = 3, C_0 = 2, D_0 = 1, \tau_{20} = 1376$ ;  
 $\varphi_0 = 2, \psi_0 = 3; Z_0 = 1$

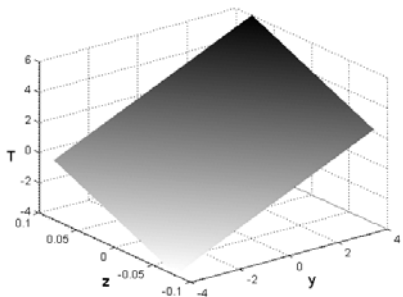


Рис. 6. Растекание слоя жидкости ( $t = 1$ ).  
 Распределение температуры в сечении  $x = 0$ .  
 Начальные условия:  $T_0 = A_0x + B_0y + C_0z + D_0$ ;  
 $A_0 = 1, B_0 = 3, C_0 = 2, D_0 = 1, \tau_{20} = 1376$ ;  
 $\varphi_0 = 1, \psi_0 = 2; Z_0 = 1$

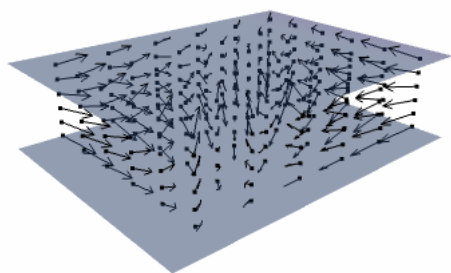


Рис. 7. Разбухание слоя жидкости ( $t = 0.1$ ).  
 Начальные условия:  
 $u|_{t=0} = \varphi_0x, v|_{t=0} = \psi_0y, w|_{t=0} = -(\varphi_0 + \psi_0)z$ ;  
 $\varphi_0 = -\frac{1}{5}, \psi_0 = -\frac{1}{4}; Z_0 = 1$

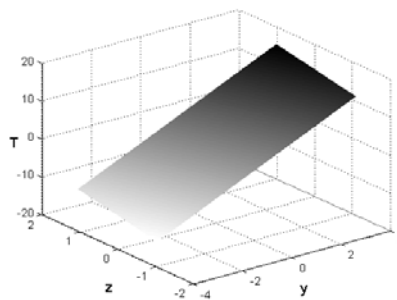


Рис. 8. Разбухание слоя жидкости ( $t = 0.1$ ).  
 Распределение температуры в сечении  $x = 0$ .  
 Начальные условия:  $T_0 = A_0x + B_0y + C_0z + D_0$ ;  
 $A_0 = 1, B_0 = 3, C_0 = 2, D_0 = 1, \tau_{20} = 1376$ ;  
 $\varphi_0 = -\frac{1}{5}, \psi_0 = -\frac{1}{4}; Z_0 = 1$

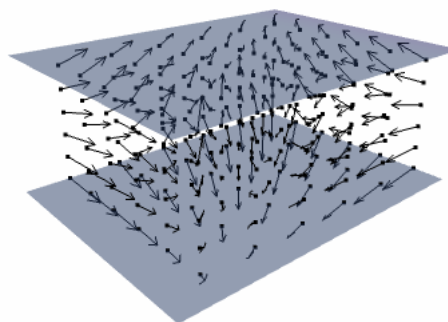


Рис. 9. Разбухание слоя жидкости ( $t = 1$ ).  
 Начальные условия:  
 $u|_{t=0} = \varphi_0x, v|_{t=0} = \psi_0y, w|_{t=0} = -(\varphi_0 + \psi_0)z$ ;  
 $\varphi_0 = -\frac{1}{5}, \psi_0 = -\frac{1}{4}; Z_0 = 1$

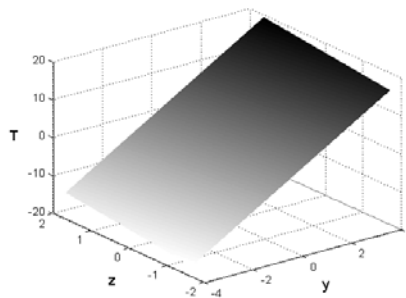


Рис. 10. Разбухание слоя жидкости ( $t = 1$ ).  
 Распределение температуры в сечении  $x = 0$ .  
 Начальные условия:  $T_0 = A_0x + B_0y + C_0z + D_0$ ;  
 $A_0 = 1, B_0 = 3, C_0 = 2, D_0 = 1, \tau_{20} = 1376$ ;  
 $\varphi_0 = -\frac{1}{5}, \psi_0 = -\frac{1}{4}; Z_0 = 1$

На рисунках 11 и 12 приводится зависимость функции  $Z(t)$ , определяющей положение границы слоя при различных начальных данных задачи  $(\varphi_0, \psi_0)$  при растекании (рис. 11) и разбухании (рис. 12) слоя. С определенного момента времени растекание слоя будет происходить практически одинаково, несмотря на различную интенсивность процесса в начальный период времени. При анализе процесса разбухания слоя можно отметить, что оно произойдет со временем более стремительно в случае начального положения, определяемого значением  $Z_0 = 3$ .

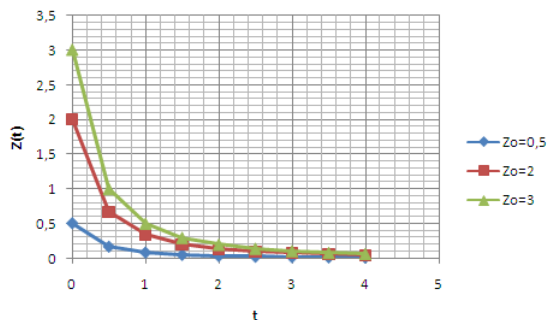


Рис. 11. Изменение свободной границы  $Z(t)$  за промежуток времени  $[0, 4]$ . Начальные условия:  $u|_{t=0} = \varphi_0 x$ ,  $v|_{t=0} = \psi_0 y$ ,  $w|_{t=0} = -(\varphi_0 + \psi_0)z$ ;  $\varphi_0 = 1$ ,  $\psi_0 = 2$ . Начальное положение границы  $Z_0 = 0.5, Z_0 = 2, Z_0 = 3$

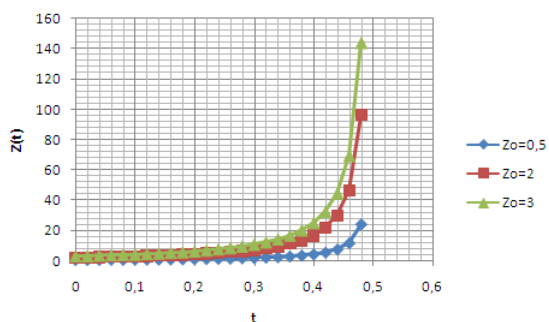


Рис. 12. Изменение свободной границы  $Z(t)$  за промежуток времени  $[0; 0, 48]$ . Начальные условия:  $u|_{t=0} = \varphi_0 x$ ,  $v|_{t=0} = \psi_0 y$ ,  $w|_{t=0} = -(\varphi_0 + \psi_0)z$ ;  $\varphi_0 = -1$ ,  $\psi_0 = -2$ . Начальное положение границы  $Z_0 = 0.5, Z_0 = 2, Z_0 = 3$

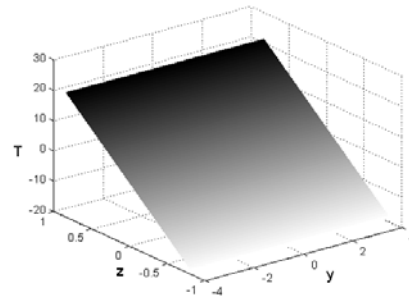


Рис. 13. Растекание слоя жидкости ( $t = 1$ ). Распределение температуры в сечении  $x = 0$ . Начальные условия:  $T_0 = A_0 x + B_0 y + C_0 z + D_0$ ;  $A_0 = 1, B_0 = 0, 4, C_0 = 2, D_0 = 1, \tau_{20} = 445$ ;  $\varphi_0 = 2, \psi_0 = 3; Z_0 = 1$

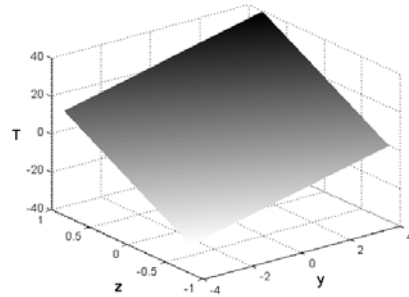


Рис. 14. Растекание слоя жидкости ( $t = 1$ ). Распределение температуры в сечении  $x = 0$ . Начальные условия:  $T_0 = A_0 x + B_0 y + C_0 z + D_0$ ;  $A_0 = 1, B_0 = 13, C_0 = 2, D_0 = 1, \tau_{20} = 5964$ ;  $\varphi_0 = 2, \psi_0 = 3; Z_0 = 1$

Распределение температуры в сечении слоя плоскостью  $x = 0$  демонстрирует качественно различный прогрев в случае растекания слоя (рис. 6 и 15) и в случае разбухания (рис. 10 и 16). При этом более интенсивный прогрев отмечается при меньших (по модулю) значениях параметров  $\varphi_0, \psi_0$  (следует сравнить рисунки 6 и 15, а также 10 и 16).

Отметим также, что большие тангенциальные напряжения, согласованные, естественно, с большими градиентами температуры на границе, вызывают и более интенсивный прогрев (сравните рисунки 13 ( $\tau_{20} = 445$ ), 6 ( $\tau_{20} = 1376$ ), 14 ( $\tau_{20} = 5964$ )).

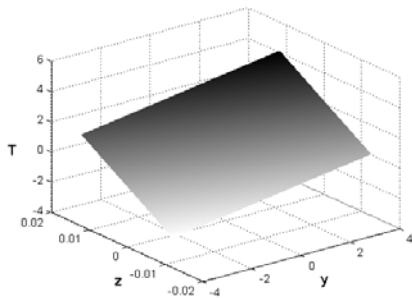


Рис. 15. Растекание слоя жидкости ( $t = 1$ ).  
Распределение температуры в сечении  $x = 0$ .  
Начальные условия:  $T_0 = A_0x + B_0y + C_0z + D_0$ ;  
 $A_0 = 1, B_0 = 3, C_0 = 2, D_0 = 1, \tau_{20} = 1376$ ;  
 $\varphi_0 = 6, \psi_0 = 11; Z_0 = 1$ .

Вопросы существования решения в изотермическом случае, когда  $w = -2 \int_0^z f(\alpha, t) d\alpha$ , а функции  $f, g$  являются решениями некоторых интегро-дифференциальных уравнений (см. (6)), изучены в [8]. Там же проведено аналитическое исследование поведения свободной границы  $Z(t)$  для вязкой несжимаемой жидкости. Результаты, представленные в [13], позволяют проследить за потенциальным движением слоя невязкой жидкости между двумя свободными поверхностями, остающимися плоскими и параллельными.

**Заключение.** Для исследования поведения свободного теплопроводного слоя жидкости в ус-

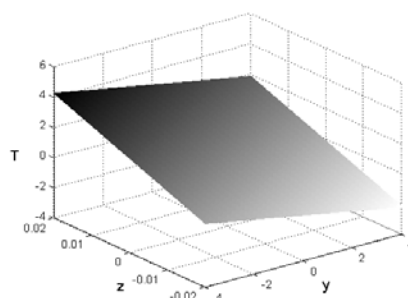


Рис. 16. Разбухание слоя жидкости ( $t = 1$ ).  
Распределение температуры в сечении  $x = 0$ .  
Начальные условия:  $T_0 = A_0x + B_0y + C_0z + D_0$ ;  
 $A_0 = 1, B_0 = 3, C_0 = 2, D_0 = 1, \tau_{20} = 1376$ ;  
 $\varphi_0 = -6, \psi_0 = -11; Z_0 = 1$ .

ловиях невесомости построены точные решения нестационарной задачи. Решения вида (9), (10) относятся к простым представителям широкого класса частично-инвариантных решений уравнений Навье-Стокса [7, 8]. Важной составляющей в постановке задачи является учет действия касательных напряжений со стороны внешней газовой среды. Исследованы условия, определяющие динамику неизотермического слоя жидкости, и условия разрушения слоя. Проведены расчеты при различных значениях исходных параметров, определяющих начальное состояние слоя жидкости, подобной этанолу в случае различных граничных режимов.

### Библиографический список

1. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. – М., 2008.
2. Гончарова О.Н., Кабов О.А. Гравитационно-термокапиллярная конвекция жидкости в горизонтальном слое при спутном потоке газа // ДАН. – 2009. – Т. 426, №2.
3. Goncharova O.N., Kabov O.A. Deformation of a viscous heat conducting free liquid layer by the thermocapillary forces and tangential stresses: Analytical and numerical modeling // Microgravity sci. technol. – 2010. – Vol. 22, №3.
4. Андреев В.К., Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений термокапиллярного движения // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1983. – №14(5).
5. Андреев В.К. Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. – Новосибирск, 1992.
6. Бытев В.О. Неустановившееся движение кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами // ПМТФ. – 1970. – №3.
7. Pukhnachov V.V. On a problem of a viscous strip deformation with a free boundary C.R. // Acad. Scien. – Paris, 1999. – №328(1).
8. Pukhnachov V.V. Model of a viscous layer deformation by the thermocapillary forces, Max-Planck-Institut fuer die Mathematik in den Naturwissenschaften. – Leipzig, 2000. – Preprint №50.
9. Пухначева Т.П. Численное решение задачи о деформировании вязкого слоя термокапиллярными силами // Симметрия и дифференциальные уравнения. – Красноярск, 2000.
10. Galaktionov V.A., Vazquez J.L. Blow-up of a class of solutions with free boundary for the Navier-Stokes equations // Advances in Differential equations. – 1999. – V. 1.



11. Андреев В.К., Картошкина А.Е. О движении плоского слоя жидкости со свободной границей под действием эффекта Соре // Вестник КГУ. Физ.-мат. науки. – Красноярск, 2004. – №1.

12. Картошкина А.Е. Влияние динамики на термодиффузию в плоском слое со свободными границами // Вычислительные технологии. – 2006. – № 11(4).

13. Longuet-Higgins M.S. A class of exact, time dependent, free-surface flows // J. Fluid Mech. – 1972. – 55(3).

14. Goncharova O.N., Kabov O.A. Numerical modeling of the tangential stress effects on convective fluid flows in an open cavity // Microgravity sci. technol. – 2009. – Vol. 21, №1.