УДК 514.765

О.П. Гладунова, Е.Д. Родионов, В.В. Славский

Римановы многообразия с тривиальной целой частью в разложении тензора кривизны*

O.P. Gladunova, E.D. Rodionov, V.V. Slavsky

Riemannian Manifolds with Trivial Integer Part of the Curvature Tensor Decomposition

В данной работе исследуются римановы многообразия с теми или иными ограничениями на целую часть разложения тензора кривизны в прямую сумму произведения Кулкарни-Номидзу тензора одномерной кривизны с метрическим тензором и тензора Вейля. Кроме того, мы строим примеры римановых метрик отрицательной кривизны Риччи и изменяющей знак одномерной кривизны.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, тензор кривизны.

Riemannian manifolds with some restrictions on an integer part of the curvature tensor decomposition as a direct sum of the Kulkarni-Nomizu product of one-dimensional curvature tensor with the metric tensor and the Weyl tensor are investigated in this paper. Besides this we construct some examples of Riemannian metrics with negative Ricci curvature and sign-changing one-dimensional curvature.

Key words: Lie algebras and Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, curvature tensor.

1. Основные обозначения

Пусть (M,g) – ориентированное риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V – векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита, а через $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ и $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$ тензор кривизны Римана и Риччи соответственно. Далее, пусть $s = \mathrm{tr}(r)$ – скалярная кривизна, а

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij} - \frac{sg_{ij}}{2(n-1)}\right) - \tag{1}$$

тензор одномерной кривизны. Тогда имеет место разложение:

$$R = W + A \owedge g, \tag{2}$$

где W – тензор Вейля, а

$$\begin{aligned}(A \owedge g)(X,Y,Z,V) = A(X,Z)g(Y,V) + \\ + A(Y,V)g(X,Z) - A(X,V)g(Y,Z) - \\ - g(Y,Z)P(X,V)\end{aligned} \tag{3}$$

произведение Кулкарни-Номидзу [1].

В координатном виде формула (2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}R_{lkij} = A_{ki}g_{lj} + A_{lj}g_{ki} - \\ - A_{kj}g_{li} - A_{li}g_{kj} + W_{lkij}.\end{aligned} \tag{4}$$

Случай равенства нулю остатка: $W = 0$, или случай конформно-плоских метрик, исследован в литературе [2]. Рассмотрим римановы многообразия с условием равенства нулю целой части: $A \owedge g = 0$. Кроме того, приведем примеры римановых многообразий знакоопределенной кривизны Риччи и осциллирующей одномерной кривизны, определив данные кривизны с помощью соответствующих квадратичных форм:

$$r(x) = \frac{r_{ij}x^i x^j}{g_{ij}x^i x^j}, \tag{5}$$

$$A(x) = \frac{A_{ij}x^i x^j}{g_{ij}x^i x^j}, \tag{6}$$

где $x \in T_pM$; $p \in M$.

Обозначим также через r и A соответствующие самосопряженные операторы в T_pM, определяемые стандартным образом:

$$g(r(x), y) = r_{ij}x^i y^j, \tag{7}$$

$$g(A(x), y) = A_{ij}x^i y^j, \tag{8}$$

где $x, y \in T_pM$; $p \in M$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №08-01-98001, №10-01-90000-Бел_а), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (проект №НШ-5682.2008.1), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

2. Случай $\mathbf{A} \owedge \mathbf{g} = 0$

Теорема. *Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности n. Тогда $A \owedge g = 0$ в том и только том случае, если кривизна Риччи многообразия (M, g) равна нулю, или (M, g) является эйнштейновым многообразием с тривиальной константой Эйнштейна.*

Доказательство. Пусть $p \in M$ – произвольная точка, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – ортонормированный базис, в котором диагонализируема квадратичная форма Риччи. Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_n$ главные кривизны Риччи. Тогда в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, как это следует из формулы (1), диагонализируема и квадратичная форма тензора одномерной кривизны. Далее, если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – главные значения одномерной кривизны, то $a_k = r_k - \frac{s}{2(n-1)}$.

Предположим, что $\dim M = n \geq 4$. В этом случае тензор Вейля в разложении (2), вообще говоря, не тривиален, и равенство нулю целой части равносильно следующей системе уравнений:

$$A_{ki}g_{lj} + A_{lj}g_{ki} - A_{kj}g_{li} - A_{li}g_{kj} = 0. \qquad (9)$$

Запишем (9) в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в точке $p \in M$:

$$A_{ki}\delta_{lj} + A_{lj}\delta_{ki} - A_{kj}\delta_{li} - A_{li}\delta_{kj} = 0, \qquad (10)$$

где δ_{lj} – символы Кронекера-Капелли, а $A_{ki} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ a_k & k = i; \end{cases}$.

Пусть $k = l$, тогда (10) имеет вид:

$$A_{li}\delta_{lj} + A_{lj}\delta_{li} - A_{lj}\delta_{li} - A_{li}\delta_{lj} \equiv 0,$$

что дает тривиальные уравнения.

Положим $k \neq l$, тогда в случае $\{i, j\} \neq \{k, l\}$ опять получаем тривиальные соотношения.

Пусть $\{i, j\} = \{k, l\}$, тогда имеем: $a_k + a_l = 0$ $(k \neq l)$. Отсюда немедленно следует, что единственным решением системы (10) является $a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0$, или $r_1 - \frac{s}{2(n-1)} = r_2 - \frac{s}{2(n-1)} = \ldots = r_n - \frac{s}{2(n-1)} = 0$. Откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left(r_k - \frac{s}{2(n-1)} \right) = \frac{n-2}{2(n-1)} s = 0, \qquad (11)$$

а значит, $s = 0$, $r_1 = r_2 = \ldots r_n = 0$ $(n \geq 4)$.

Рассмотрим случай, когда размерность многообразия равна 2 или 3. Если $\dim M = 2$, то $R = \frac{s}{4} g \owedge g$, а если $\dim M = 3$, то $R = \frac{s}{12} g \owedge g + \left(r - \frac{s}{3} g\right) \owedge g$. Таким образом, равенство нулю целой части означает, что $R = 0$, или многообразие (M, g) является плоским.

Теорема доказана.

Следствие. *Однородное риманово многообразие $(M, \mathfrak{g})$ с условием $A \owedge g = 0$ изометрично прямому риманову произведению евклидова пространства и плоского тора.*

Доказательство. Истинность данного утверждения следует из доказанной выше теоремы и теоремы Алексеевского-Кимельфельда [3].

3. Примеры

Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G, $\langle \cdot, \cdot) \rangle$ – скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует положительно ориентированный ортонормированный базис $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ такой, что [4]:

$$[e_1, e_2] = \alpha e_1 + \beta e_2,\ [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta\, e_3,$$
$$[e_2, e_3] = 0,$$

где $\alpha + \delta \neq 0$ и $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

Заметим, что в случае $\alpha + \delta = 2$ инвариант $D = \alpha\delta - \gamma\beta$ определяет алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма. Следуя [4], положим $\alpha = 1 + \xi$, $\beta = (1 + \xi)\eta$, $\gamma = -(1 - \xi)\eta$, $\delta = 1 - \xi$, где $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Тогда квадратичная форма Риччи и одномерной кривизны диагонализируемы в этом базисе, и их главные кривизны и след вычисляются по формулам:

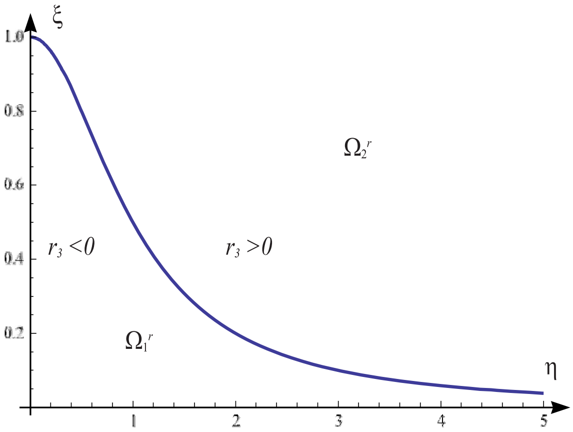
$$\begin{aligned} r_1 &= -2 - 2\xi^2 - 2\xi^2\eta^2 < 0, \\ r_2 &= -2 - 2\xi - 2\xi\eta^2 < 0, \\ r_3 &= -2 + 2\xi + 2\xi\eta^2, \\ s &= -6 - 2\xi^2 - 2\xi^2\eta^2 < 0,\ (\xi \geq 0,\ \eta \geq 0) \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2\xi^2 < 0, \\ a_2 &= -\frac{1}{2} - 2\xi - 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2, \\ a_3 &= -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2, \end{aligned} \qquad (13)$$

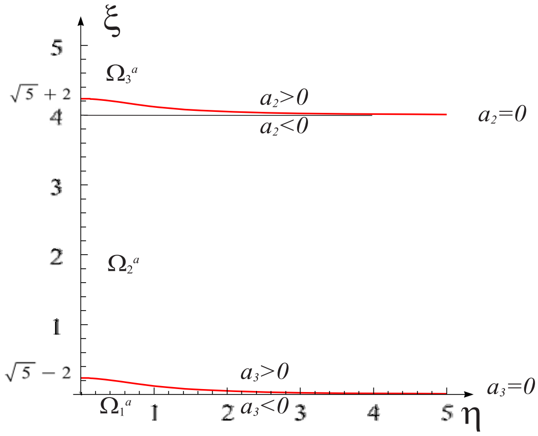
Исследуем сигнатуры оператора Риччи и одномерной кривизны трехмерных неунимодулярных групп Ли в базисе Дж. Милнора.

Пример 1. Рассмотрим случай кривизны Риччи. Так как $r_1 < 0$, $r_2 < 0$, то исследуем знак r_3 в первом квадранте. Имеем: $r_3 = -2 + 2\xi + 2\xi\eta^2 = 0$, или $\xi = \frac{1}{1+\eta^2}$ при условии $\eta \geq 0$.

Построим график кривой $r_3 = 0$ (см. рис. 1A).



A



B

Рис. 1. Области знакопостоянства сигнатур кривизны Риччи (A) и сигнатур оператора одномерной кривизны (B)

Очевидно, что в области Ω_1^r имеем сигнатуру оператора Риччи $(-,-,-)$, а в области Ω_2^r: $(-,-,+)$. На кривой $r_3 = 0$ – сигнатура $(-,-,0)$. Области Ω_1^r и Ω_2^r задаются неравенствами :

$$\Omega_1^r : \begin{cases} \xi \geq 0, \\ \eta \geq 0, \\ r_3 < 0; \end{cases} \qquad \Omega_2^r : \begin{cases} \xi \geq 0, \\ \eta \geq 0, \\ r_3 > 0. \end{cases}$$

Пример 2. В случае оператора одномерной кривизны $a_1 < 0$, и необходимо исследовать знаки главных кривизн a_2 и a_3. Рассмотрим кривые $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$, или

$$\xi = 2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}} \quad (a_2 = 0),$$
$$\xi = -2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}} \quad (a_3 = 0)$$

и их графики (см. рис. 1B).

Имеем следующие сигнатуры: $(-,-,-)$ в области Ω_1^a, $(-,-,+)$ в Ω_2^a и $(-,+,+)$ в Ω_3^a, где

$$\Omega_1^a : \begin{cases} \xi \geq 0, \\ \eta \geq 0, \\ a_3 < 0; \end{cases} \quad \Omega_2^a : \begin{cases} \xi \geq 0, \\ \eta \geq 0, \\ a_2 < 0 < a_3; \end{cases} \quad \Omega_3^a : \begin{cases} \xi \geq 0, \\ \eta \geq 0, \\ a_2 > 0. \end{cases}$$

На кривых $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, очевидно, возможны сигнатуры: $(-,0,+)$ на $a_2 = 0$; $(-,-,0)$ на $a_3 = 0$. Заметим, что выполняется неравенство:

$$-2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}} = \frac{\frac{1}{1+\eta^2}}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}}} \leq \frac{0.25}{1+\eta^2},$$

следовательно, сопоставляя чертежи примеров 1 и 2 (см. рис. 2A), получим разбиение первого квадранта $\{\xi \geq 0, \eta \geq 0\}$ на четыре области Ω_i, $i = 1,2,3,4$, задаваемые неравенствами:

$$\Omega_1 = \Omega_1^a \cap \Omega_1^r = \{\xi \geq 0,\ \eta \geq 0,\ a_3 < 0,\ r_3 < 0\},$$
$$\Omega_2 = \Omega_2^a \cap \Omega_1^r = \{\xi \geq 0, \eta \geq 0, a_2 < 0 < a_3, r_3 < 0\},$$
$$\Omega_3 = \Omega_2^a \cap \Omega_2^r = \{\xi \geq 0, \eta \geq 0, a_2 < 0 < a_3, r_3 > 0\},$$
$$\Omega_4 = \Omega_3^a \cap \Omega_2^r = \{\xi \geq 0,\ \eta \geq 0,\ a_2 > 0,\ r_3 > 0\}.$$

Очевидно, что сигнатура одномерной секционной кривизны и кривизны Риччи в областях Ω_i, $i = 1,2,3,4$ будет:

$$\begin{cases} \operatorname{sign}(a_1,a_2,a_3) = (-,-,-), \\ \operatorname{sign}(r_1,r_2,r_3) = (-,-,-), \end{cases} \text{в } \Omega_1;$$
$$\begin{cases} \operatorname{sign}(a_1,a_2,a_3) = (-,-,+), \\ \operatorname{sign}(r_1,r_2,r_3) = (-,-,-), \end{cases} \text{в } \Omega_2;$$
$$\begin{cases} \operatorname{sign}(a_1,a_2,a_3) = (-,-,+), \\ \operatorname{sign}(r_1,r_2,r_3) = (-,-,+), \end{cases} \text{в } \Omega_3;$$
$$\begin{cases} \operatorname{sign}(a_1,a_2,a_3) = (-,+,+), \\ \operatorname{sign}(r_1,r_2,r_3) = (-,-,+), \end{cases} \text{в } \Omega_4;$$

где $\operatorname{sign}(a_1,a_2,a_3) = (\operatorname{sign}(a_1), \operatorname{sign}(a_2), \operatorname{sign}(a_3))$, $\operatorname{sign}(r_1,r_2,r_3) = (\operatorname{sign}(r_1), \operatorname{sign}(r_2), \operatorname{sign}(r_3))$. Здесь $\operatorname{sign}(a_i)$ – знак числа a_i, $\operatorname{sign}(r_i)$ – знак числа r_i. Аналогично на кривых $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $r_3 = 0$ имеем:

$$\begin{cases} \operatorname{sign}(a_1,a_2,a_3) = (-,0,+), \\ \operatorname{sign}(r_1,r_2,r_3) = (-,-,-), \end{cases} \text{на } a_2 = 0;$$
$$\begin{cases} \operatorname{sign}(a_1,a_2,a_3) = (-,-,0), \\ \operatorname{sign}(r_1,r_2,r_3) = (-,-,+), \end{cases} \text{на } a_3 = 0;$$
$$\begin{cases} \operatorname{sign}(a_1,a_2,a_3) = (-,-,+), \\ \operatorname{sign}(r_1,r_2,r_3) = (-,-,0), \end{cases} \text{на } r_3 = 0.$$

Мы видим, что в области Ω_1^r кривизна Риччи отрицательна, а одномерная кривизна осциллирует (т.е. принимает значения разных знаков). Данный пример является дополнением к примерам римановых метрик положительной кривизны Риччи и осциллирующей одномерной кривизны [5].

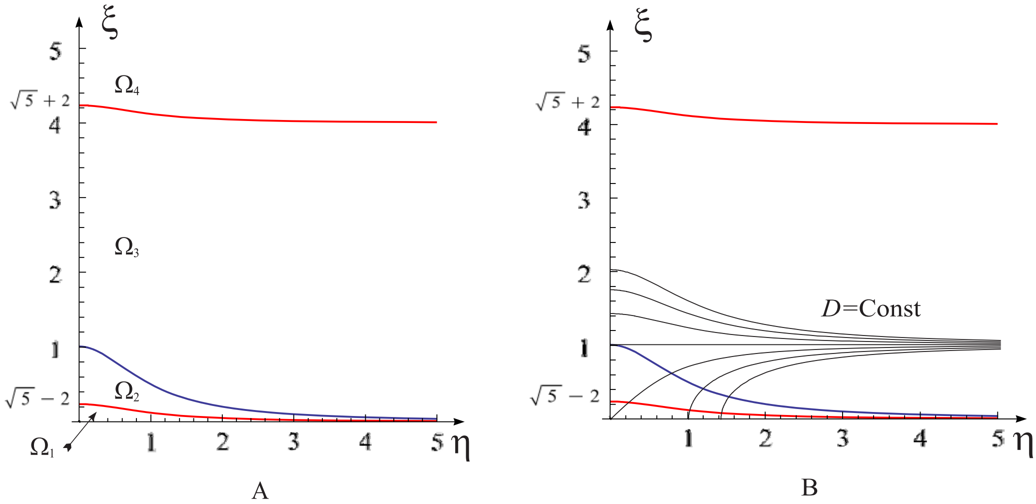


Рис. 2. Области знакопостоянства сигнатур: кривизны Риччи и оператора одномерной кривизны (А). Классы неизоморфных трехмерных неунимодулярных алгебр Ли (В)

Замечание. *1. Используя то свойство, что инвариант D определяет неунимодулярную алгебру Ли с точностью до изоморфизма (за исключением специального случая, когда $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$ т.е. $D = 1$) изобразим на рисунке 2B классы неизоморфных между собой алгебр. При этом кривая $D = Const$ соответствует классу изоморфности, за исключением случая $D = 1$.*

2. Совмещение рисунков 2А и 2В демонстрирует возможность различения неизометричных метрик на группе Ли с помощью сигнатуры. Отметим также, что на каждой неунимодулярной алгебре Ли реализуются сигнатуры области Ω_3, за исключением особого случая.

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: пер. с англ.: в 2 т. – М., 1990.

2. Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Однородные пространства: теория и приложения: монография. – Ханты-Мансийск, 2008.

3. Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н. Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Мат. заметки. – 1978. – Т. 24, №1.

4. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21.

5. Rodionov E.D., Slavsky V.V. Conformal deformation of the Riemannian metrics and homogenious Riemannian spaces // Comm. Math. Univ. Carolinae. – 2002. – V. 43, №2.