УДК 512.54.01

А.И. Будкин

О доминионах конечных подгрупп*

A.I. Budkin

On Dominions of Finite Subgroups

Доминион подгруппы H группы A в квазимногообразии $\mathcal{M}$ — это множество всех элементов $a \in A$, образы которых равны для всех пар гомоморфизмов, совпадающих на H, из A в каждую группу из $\mathcal{M}$. Найдено условие, при выполнении которого доминион конечной подгруппы совпадает с этой подгруппой.

Ключевые слова: квазимногообразие, доминион, амальгама, свободное произведение с объединенной подгруппой.

The dominion of a subgroup H of a group A in a quasivariety $\mathcal{M}$ is the set of all elements $a \in A$ with equal images under all pairs of homomorphisms from A into every group in $\mathcal{M}$ which coincide on H. The author found the condition when the dominion of a finite subgroup coincides with this subgroup.

Key words: quasivariety, dominion, amalgam, free product with an amalgamated subgroup.

Введение. Понятие доминиона было введено в [1] для изучения эпиморфизмов. Согласно [1], доминионом подалгебры H универсальной алгебры A в полной категории $\mathcal{M}(A \in \mathcal{M})$, обозначаемым $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H)$, называется множество всех элементов $a \in A$ таких, что $a^\varphi = a^\psi$ для любых двух морфизмов $\varphi, \psi : A \to M \in \mathcal{M}$, совпадающих на H. Оказалось, что отображение $\varphi : A \to B$ $(A, B \in \mathcal{M})$ является эпиморфизмом в $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{dom}_B^{\mathcal{M}}(A^\varphi) = B$. Этот факт послужил началом исследования доминионов. Далее, понятие доминиона изучалось в различных классах алгебр [2–4] (см. также библиографию: [5]). В частности, была установлена тесная связь между доминионами и амальгамами. За подробностями мы отсылаем читателя к обзорной статье [2]. Целесообразность изучения доминионов в квазимногообразиях обосновывается в [5] тем, что, согласно [6], только квазимногообразия среди аксиоматизируемых классов обладают полной теорией определяющих соотношений, позволяющей определить свободное произведение с объединенной подалгеброй. Отметим, что доминионы подробно рассмотрены в квазимногообразиях абелевых [3, 7, 8] и метабелевых групп [9], а решетки доминионов введены и изучались в [5, 10, 11].

Пусть $\mathcal{M}$ – произвольное квазимногообразие групп. В этом случае для любой группы A из $\mathcal{M}$ и ее подгруппы H доминион $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H в A (в $\mathcal{M}$) определяется так:

$$\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in A \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall f, g : A \to M,$$

$$\text{если } f\mid_H = g\mid_H, \text{ то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : A \to M$ обозначены гомоморфизмы группы A в группу M, через $f\mid_H$ – ограничение f на H.

С основными понятиями теории квазимногообразий можно познакомиться в [12–14], а теории групп – в [15, 16].

2. Предварительные замечания. Напомним некоторые понятия и обозначения.

Запись $A \leq B$ означает, что A является подгруппой группы B.

Через $\mathrm{gr}(S)$ обозначим группу, порожденную множеством S, через (a) — циклическую группу, порожденную элементом a.

Как обычно, $q\mathcal{M}$ — это квазимногообразие, порожденное классом $\mathcal{M}$ групп.

Вложением группы A в группу B будем называть любой гомоморфизм $\varphi : A \to B$, являющийся изоморфизмом A на A^φ. Если существует вложение A в B, то говорим, что A *вложима* в B.

Подмножество H группы G называется частичной подгруппой, если на H задана частичная операция $\circ$ такая, что для любых элементов $a, b, c \in H$ имеем: $ab = c$ тогда и только тогда, когда $a \circ b = c$.

Говорят, что частичная подгруппа H группы G вложима в группу C, если существует взаимно однозначное отображение φ частичной подгруппы H на подходящую частичную подгруппу L группы C такое, что для любых элементов $a, b \in H$ выполнено следующее:

1) $a \circ b$ определено в H, тогда и только тогда, когда $a^\varphi \circ b^\varphi$ определено в L;

2) $(a \circ b)^\varphi = a^\varphi \circ b^\varphi$.

*Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (мероприятие 1).

Под амальгамой понимают индексированное семейство $\{A_i \mid i \in I\}$ групп, пересекающихся по общей подгруппе H. В этой статье рассматривается амальгама только двух групп A и B с общей подгруппой H, которая обозначается через $[A, B; H]$.

Для амальгамы $[A, B; H]$ естественно возникает понятие свободного произведения групп A и B с объединенной подгруппой H, которое будем обозначать через $A *_H B$.

Пусть $G = A *_H B$. Тогда [17] всякий элемент из G имеет следующий канонический вид: если $g \in G$, то либо $g \in H$, либо $g = h_1 \dots h_m$ для некоторого $m \geq 1$, где каждый элемент h_i лежит в $Hv_i \setminus H$ для некоторого v_i и $v_i \neq v_{i+1}$.

Напомним определение квадрата группы с объединенной подгруппой. Пусть группа G имеет представление:

$$G = \text{гр}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(\overline{x}) = r'_j(\overline{x}) \mid j \in J\}).$$

Возьмем две группы G_1, G_2, изоморфные группе G, и зафиксируем их представления:

$$G_1 = \text{гр}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(\overline{x}) = r'_j(\overline{x}) \mid j \in J\}),$$

$$G_2 = \text{гр}(\{y_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(\overline{y}) = r'_j(\overline{y}) \mid j \in J\}).$$

Предполагаем, что пересечение $X = \{x_i \mid i \in I\}$ и $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ пусто.

Пусть H — подгруппа группы G. Берем произвольное множество $\{h_l(\overline{x}) \mid l \in L\}$ групповых слов в алфавите $X = \{x_i \mid i \in I\}$, множество $\{h_l(\overline{x}) \mid l \in L\}$ значений которых в G порождает H. Возьмем группу F, обладающую представлением:

$$F = \text{гр}(X \cup Y \parallel \{r_j(\overline{x}) = r'_j(\overline{x}) \mid j \in J\} \cup$$

$$\{r_j(\overline{y}) = r'_j(\overline{y}) \mid j \in J\} \cup \{h_l(\overline{x}) = h_l(\overline{y}) \mid l \in L\}).$$

Эта группа $F = G *_H G$ называется свободным квадратом группы G с объединенной подгруппой H. Отображения $\lambda : G \to F$, где $x_i^\lambda = x_i (i \in I)$; $\rho : G \to F$ $(x_i^\rho = y_i (i \in I))$ являются вложениями, и подгруппы $G^\lambda, G^\rho, H^\lambda$ снова обозначим через G_1, G_2, H соответственно.

Если $H = (1)$, то возникшая группа F называется свободным произведением групп G_1 и G_2 и будет обозначиться через $F = G_1 * G_2$.

Хорошо известно (см., например: [2]), что $G_1 \cap G_2 = \text{dom}_{G_1}(H)$.

Напомним определение фильтрованного произведения.

Пусть I — произвольное непустое множество. Совокупность D подмножеств множества I называется фильтром над I, если выполнено следующее:

1) $\emptyset \notin D$,

2) если $A, B \in D$, то $A \cap B \in D$,

3) если $A \in D$ и $A \subseteq B \subseteq I$, то $B \in D$.

Фильтр D называется ультрафильтром, если для любого подмножества A множества I либо $A \in D$ либо $I \setminus A \in D$.

Пусть $\{A_i \mid i \in I\}$ — произвольное множество групп и D — фильтр над I. Тогда определяем нормальную подгруппу N декартова произведения $A = \overline{\prod_{i\in I}} A_i$ следующим образом:

$$N = \{f \in A \mid \{i \in I \mid f(i) = 1\} \in D\}.$$

Фактор-группа A/N называется фильтрованным произведением групп A_i по фильтру D и обозначается через $\prod_{i\in I} A_i/D$. Смежный класс fN принято обозначать через fD. Если D — ультрафильтр над I, то соответствующее фильтрованное произведение называется ультрапроизведением.

Лемма. Пусть $[A_i, B_i; H_i]$ — амальгама групп A_i и B_i $(i \in I)$, D — ультрафильтр над I, $G = \prod_{i\in I}(A_i *_{H_i} B_i)/D$, $H = \prod_{i\in I} H_i/D$. Если $A = \prod_{i\in I} A_i/D$, $B = \prod_{i\in I} B_i/D$ — подгруппы группы G, то $\text{гр}(A, B) = A *_H B$.

Доказательство. Для каждого $i \in I$ зафиксируем множества S_i и T_i представителей правых смежных классов $H_i g$ групп A_i, соответственно B_i, по H_i. Полагаем

$$S = \{fD \mid f(i) \in S_i \text{ для каждого } i \in I\},$$

$$T = \{fD \mid f(i) \in T_i \text{ для каждого } i \in I\}.$$

Покажем, что S (соответственно T) является полной системой представителей правых смежных классов A по H (соответственно B по H). В самом деле, пусть gD — произвольный элемент из A. При каждом $i \in I$ элемент $g(i)$ представим в виде $g(i) = h_i s_i$ для подходящих $h_i \in H_i$, $s_i \in S_i$. Берем элементы $h \in \overline{\prod_{i\in I}} H_i$, $s \in \overline{\prod_{i\in I}} A_i$ такие, что $h(i) = h_i$, $s(i) = s_i$. Тогда $gD = hDsD, hD \in H, sD \in S$. Таким образом, S — полная система представителей правых смежных классов A по H. Аналогично показывается, что T — полная система представителей B по H.

Пусть $gD \in \text{гр}(A, B)$ и
$gD = hDf_1D \dots f_nD$,
где $hD \in H$, $f_1D, \dots, f_nD \in S \cup T$, элементы f_kD, $f_{k+1}D$ не принадлежат одновременно A и B при всех $k = 1, \dots, n-1$. Предположим,

что $gD = 1$. Мы уже отмечали каков канонический вид элементов свободного произведения с объединенной подгруппой. Отсюда необходимо лишь установить, что $hD = 1$ и элементы $f_1D, \dots, f_nD$ в записи gD отсутствуют.

Имеем:

$$I_0 = \{i \in I \mid h(i)f_1(i)\dots f_n(i) = 1\} \in D.$$

Полагаем:

$$I_k = \{i \in I \mid f_k(i) \neq 1\},\ k = 1, \dots, n.$$

Так как $I_k \in D,\ k = 1, \dots, n$, то

$$J = \bigcap_{i=0}^{n} I_i \in D.$$

Поскольку $f_1(i), \dots, f_n(i) \in S_i \cup T_i$, $h(i) \in H_i$, то при $i \in J$ соотношение $h(i)f_1(i)\dots f_n(i) = 1$ истинно в группе $A_i *_{H_i} B_i$. Это возможно лишь в случае, когда $f_1(i), \dots, f_n(i)$ отсутствуют и $hD = 1$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть класс $\mathcal{M}$ групп обладает свойством:

$(\forall A)(\forall U)(A \in \mathcal{M}\ \&\ (U-$ конечная подгруппа группы $A) \ \rightarrow\ A *_U A \in q\mathcal{M})$. (1)

Тогда для любой группы $C \in q\mathcal{M}$ и любой ее конечной подгруппы U имеет место включение:

$$C *_U C \in q\mathcal{M}.$$

Доказательство. Пусть I — множество всех конечных частичных подгрупп группы C. Хорошо известно [15], что каждая конечная частичная подгруппа любой группы из $q\mathcal{M}$ вложима в некоторую группу из $\mathcal{M}$. Итак, для каждого $i \in I$ зафиксируем вложение $\varphi_i : i \rightarrow A_i \in \mathcal{M}$. Полагаем: $H_i = \text{гр}((i \cap U)^{\varphi_i})$. Далее поступаем по аналогии с доказательством теоремы 2 [15, с. 208].

Для каждого $i \in I$ вводим

$$I_i = \{j \mid i \subseteq j,\ j \in I\}.$$

Множество $S = \{I_i \mid i \in I\}$ – центрированное, т.е. пересечение любого конечного множества элементов из S не пусто. Следовательно, S содержится в некотором ультрафильтре D над I.

Для всякого элемента $g \in C$ определим элемент $\overline{g}$ так: полагаем

$\overline{g}(j) = g^{\varphi_j}$ при любом $j \in I_{\{g\}}$;

$\overline{g}(j) = 1$ при $j \notin I_{\{g\}}$.

Хорошо известно (см., например, теорему 2: [15, с. 208]), что отображение $\varphi : g \rightarrow \overline{g}D$ является вложением группы C в группу $A = \prod_{i\in I} A_i/D$. Пусть $H = \prod_{i\in I} H_i/D \leq A$. По лемме группа $A *_H A$ вложима в группу $B = \prod_{j\in I}(A_i *_{H_i} A_i)/D$. Поскольку при любом $i \in I_U$ $A_i *_{H_i} A_i \in q\mathcal{M}$, то $B \in q\mathcal{M}$, следовательно, $A *_H A \in q\mathcal{M}$.

Покажем, что $C^\varphi \cap H = U^\varphi$. Ясно, что $U^\varphi \leq C^\varphi \cap H$. Обратно, пусть $\overline{g}D \in C^\varphi \cap H$. Из построения вложения φ следует, что можно считать, что для некоторого $g \in C$ $\overline{g}(i) = g^{\varphi_i}$ при $i \in I_{\{g\}}$. Следовательно, найдется $J \in D$, для которого $g^{\varphi_i} \in H_i$ для каждого $i \in J$.

Далее, считаем, что U — конечная группа. Пусть $U = \{u_1, \dots, u_n\}$. Рассматривая $i \in I_{\{u_1,\dots,u_n\}} \cap J$, видим, что $g^{\varphi_i} = u_m^{\varphi_i}$ для некоторого m. Поскольку φ_i — вложение, то $g = u_m$. Значит, $g \in U^\varphi$. Итак, $C^\varphi \cap H = U^\varphi$.

Равенство $C^\varphi \cap H = U^\varphi$ влечет, что подгруппа $C^\varphi *_{U^\varphi} C^\varphi$ содержится в $A *_H A \in q\mathcal{M}$, откуда $C^\varphi *_{U^\varphi} C^\varphi \cong C *_U C \in q\mathcal{M}$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\mathcal{F}$ — квазимногообразие, порожденное всеми конечными группами. Тогда для любой группы $C \in \mathcal{F}$ и ее конечной подгруппы U имеем: группа $C *_U C \in \mathcal{F}$, в частности, $dom_C^{\mathcal{F}}(U) = U$.

Доказательство следует из результата [18], в котором доказано, что класс конечных групп обладает свойством (1).

При доказательстве теоремы 1 мы воспользовались фактически тем, что любая ультрастепень конечной группы изоморфна этой группе. Применив аналогичное утверждение к конечной циклической группе, почти дословным повторением доказательства теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть класс $\mathcal{M}$ групп обладает свойством:

$(\forall A)(\forall U)(A \in \mathcal{M}\ \&\ (U-$ конечная циклическая подгруппа группы $A) \ \rightarrow\ A *_U A \in q\mathcal{M})$. (2)

Тогда для любой группы $C \in q\mathcal{M}$ и любой ее конечной циклической подгруппы U имеет место включение:

$$C *_U C \in q\mathcal{M}.$$

В [19] показано, что если $[A, B; U]$ — амальгама конечных p-групп с циклической подгруппой U порядка p, то группа $A *_U B$ аппроксимируется конечными p-группами. Кроме того, в [19] для амальгамы $[A, A; U]$ конечных p-групп доказано, что $A *_U A$ аппроксимируется конечными p-группами. Отсюда и из теоремы 1 теперь получаем

Следствие 2. Пусть $\mathcal{P}_p$ — квазимногообразие, порожденное всеми конечными p-группами. Тогда для любой группы $C \in \mathcal{P}_p$ и ее конечной подгруппы U группа $C *_U C$ принадлежит $\mathcal{P}_p$, в частности, $dom_C^{\mathcal{P}_p}(U) = U$.

Библиографический список

1. Isbell J.R. Epimorphisms and dominions // Proc. of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Lange and Springer. – New York, 1966.

2. Higgins P.M. Epimorphisms and amalgams // Colloq. Math. – 1988. – V. 56, №1.

3. Шахова С.А. О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44, №2.

4. Magidin A. Dominions in varieties of nilpotent groups // Comm. Algebra. – 2000. – V. 28, №3.

5. Budkin A.I. Dominions in Quasivarieties of Universal Algebras // Studia Logica. – 2004. – V. 78, №1/2.

6. Мальцев А.И. Квазипримитивные классы абстрактных алгебр // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 108, №2.

7. Шахова С.А. Условия дистрибутивности решеток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, №4.

8. Шахова С.А. Об одном свойстве операции пересечения в решетках доминионов квазимногообразий абелевых групп // Известия АлтГУ. – 2010. – №1.

9. Будкин А.И. О доминионах в квазимногообразиях метабелевых групп // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, №3.

10. Будкин А.И. Решетки доминионов универсальных алгебр // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, №1.

11. Будкин А.И. Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, №5.

12. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. – Барнаул, 2002.

13. Будкин А.И., Горбунов В.А. К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. – 1975. – Т. 14, №2.

14. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. – Новосибирск, 1999.

15. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М., 1970.

16. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М., 1982.

17. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. – М., 1980.

18. Baumslag G. On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – V. 106.

19. Higman G. Amalgams of p-groups // J. Algebra. – 1964. – V. 1.